Prova scritta di Meccanica Quantistica II

Corso di Laurea in Fisica

3 APRILE 2008

COMPITO 1

1. a) Determinare lo stato (puro o misto), nello spazio di spin, di una particella di spin 1, di cui si sappia **soltanto** che in quello stato:

   $< S_z >= 0,\ \Delta S_z = \hbar$.

   Suggerimento : calcolare $< S_z >$ e $< S_z^2 >$ su un ket generico, sviluppato in una base conveniente, e imporre sui coefficienti i vincoli di cui sopra; rappresentare quindi lo stato nel formalismo opportuno, considerando equiprobabili i valori dei coefficienti compatibili con i vincoli suddetti.

   b) La dinamica di spin della particella di cui sopra sia determinata dall'Hamiltoniana:

$$H = \ A\ S_x^2 \ + \ B\ S_y^2 \ + \ C\ S_z^2\ ;$$

   quali vincoli bisogna porre sui parametri A, B, C affinché l'osservabile S_z sia una costante del moto ?

   c) Nell'Hamiltoniana di cui al punto b) si ponga $A \neq 0,\ B = C = 0$; supposto che all'istante $t_0 = 0$ la particella si trovi nello stato di cui al punto a), calcolare dopo quanto tempo ritorna nello stato iniziale, qualora questo non sia stazionario.

   Suggerimento : usare la rappresentazione matriciale dell'osservabile S_x nella base degli autovettori di S_z:

$$S_x \ = \ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

2. a) L'Hamiltoniana di spin di un sistema di due particelle **identiche** di spin 1/2 sia:

$$H = \ A\ \mathbf{S}^2 \ + g\ B\ S_z\ , \qquad\qquad A > 0, \quad g > 0,$$

dove il vettore $\mathbf{S} = \mathbf{S^{(1)}} + \mathbf{S^{(2)}}$ é l'operatore spin totale delle due particella e S_z la sua terza componente.

A seconda del valore di B, a partire da $B = 0$, si determini l'autostato di **energia minima** di tale Hamiltoniana.

b) Si supponga che il sistema si trovi sempre nello stato di **energia minima** di cui al punto a) e si dica quali fra le seguenti funzioni d'onda orbitali per il **moto relativo** sono ammissibili, distinguendo fra i vari casi possibili a seconda del valore di B :

$\psi_1(\mathbf{x}) = f(r)$,

$\psi_2(\mathbf{x}) = f(r)\ x$,

$\psi_3(\mathbf{x}) = f(r)\ y\ z$,

$\psi_4(\mathbf{x}) = f(r)\ x^2\ y$,

dove $\mathbf{x} = \mathbf{x^{(1)}} - \mathbf{x^{(2)}}$ é la coordinata relativa dei due elettroni e le $f(r)$ sono funzioni di $r = |\mathbf{x}|$, tali che ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 siano normalizzate.

c) Per ciascuna delle funzioni d'onda precedenti si determinino i possibili valori che puó dare una misura dell'osservabile L_z, dove $\mathbf{L}$ é il momento angolare orbitale **relativo**, e con quali probabilitá.

COMPITO 2

1. a) Determinare lo stato (puro o misto), nello spazio di spin, di una particella di spin 1, di cui si sappia **soltanto** che in quello stato:

   $< S_z >= \Delta S_z = \hbar/2$.

   Suggerimento : calcolare $< S_z >$ e $< S_z^2 >$ su un ket generico, sviluppato in una base conveniente, e imporre sui coefficienti i vincoli di cui sopra; rappresentare quindi lo stato nel formalismo opportuno, considerando equiprobabili i valori dei coefficienti compatibili con i vincoli suddetti.

b) La dinamica di spin della particella di cui sopra sia determinata dall'Hamiltoniana:

$$H = \ A\ S_x^2\ +\ B\ S_y^2\ +\ C\ S_z^2\ ;$$

quali vincoli bisogna porre sui parametri A, B, C affinché l'osservabile S_z sia una costante del moto ?

c) Nell'Hamiltoniana di cui al punto b) si ponga $B = 0, A = 2C \neq 0$; supposto che all'istante $t_0 = 0$ la particella si trovi nello stato di cui al punto a), calcolare dopo quanto tempo ritorna nello stato iniziale, qualora questo non sia stazionario.

Suggerimento : usare la rappresentazione matriciale dell'osservabile S_x nella base degli autovettori di S_z:

$$S_x\ =\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

2. a) L'Hamiltoniana di spin di un sistema di due particelle **identiche** di spin 1/2 sia:

$$H = \ A\ \mathbf{S}^2\ + g\ B\ S_z\ , \qquad\qquad A > 0, \quad g > 0,$$

dove il vettore $\mathbf{S} = \mathbf{S^{(1)}} + \mathbf{S^{(2)}}$ é l'operatore spin totale delle due particella e S_z la sua terza componente.

A seconda del valore di B, a partire da $B = 0$, si determini l'autostato di **energia minima** di tale Hamiltoniana.

b) Si supponga che il sistema si trovi sempre nello stato di **energia minima** di cui al punto a) e si dica quali fra le seguenti funzioni d'onda orbitali per il **moto relativo** sono ammissibili, distinguendo fra i vari casi possibili a seconda del valore di B :

$\psi_1(\mathbf{x}) = f(r)\ y,$

$\psi_2(\mathbf{x}) = f(r)\ r^2,$

$\psi_3(\mathbf{x}) = f(r)\ x\ z,$
$\psi_4(\mathbf{x}) = f(r)\ x^3,$
dove $\mathbf{x} = \mathbf{x^{(1)}} - \mathbf{x^{(2)}}$ é la coordinata relativa dei due elettroni e le $f(r)$ sono funzioni di $r = |\mathbf{x}|$, tali che ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 siano normalizzate.

c) Per ciascuna delle funzioni d'onda precedenti si determinino i possibili valori che puó dare una misura dell'osservabile L_z, dove $\mathbf{L}$ é il momento angolare orbitale **relativo**, e con quali probabilitá.

COMPITO 3

1. a) Determinare lo stato (puro o misto), nello spazio di spin, di una particella di spin 1, di cui si sappia **soltanto** che in quello stato: $\Delta S_z = \frac{\hbar}{2} = - < S_z >$.
   Suggerimento : calcolare $< S_z >$ e $< S_z^2 >$ su un ket generico, sviluppato in una base conveniente, e imporre sui coefficienti i vincoli di cui sopra; rappresentare quindi lo stato nel formalismo opportuno, considerando equiprobabili i valori dei coefficienti compatibili con i vincoli suddetti.

   b) La dinamica di spin della particella di cui sopra sia determinata dall'Hamiltoniana:
   $$H = \ A\ S_x^2 \ + \ B\ S_y^2 \ + \ C\ S_z^2\ ;$$
   quali vincoli bisogna porre sui parametri A, B, C affinché l'osservabile S_z sia una costante del moto ?

   c) Nell'Hamiltoniana di cui al punto b) si ponga $B \neq 0$, $A = C = 0$; supposto che all'istante $t_0 = 0$ la particella si trovi nello stato di cui al punto a), calcolare dopo quanto tempo ritorna nello stato iniziale, qualora questo non sia stazionario.
   Suggerimento : usare la rappresentazione matriciale dell'osservabile S_y nella base degli autovettori di S_z:
   $$S_y \ = \ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

2. a) L'Hamiltoniana di spin di un sistema di due particelle **identiche** di spin 1/2 sia:

$$H = \ A\, \mathbf{S}^2 \ + g\ B\ S_z\ , \qquad\qquad A > 0, \quad g > 0,$$

dove il vettore $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(\mathbf{1})} + \mathbf{S}^{(\mathbf{2})}$ é l'operatore spin totale delle due particella e S_z la sua terza componente.

A seconda del valore di B, a partire da $B = 0$, si determini l'autostato di **energia minima** di tale Hamiltoniana.

b) Si supponga che il sistema si trovi sempre nello stato di **energia minima** di cui al punto a) e si dica quali fra le seguenti funzioni d'onda orbitali per il **moto relativo** sono ammissibili, distinguendo fra i vari casi possibili a seconda del valore di B :

$\psi_1(\mathbf{x}) = f(r)\ z,$

$\psi_2(\mathbf{x}) = f(r)\ x\ y,$

$\psi_3(\mathbf{x}) = f(r)\ y^3,$

$\psi_4(\mathbf{x}) = f(r)\ r^4,$

dove $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(\mathbf{1})} - \mathbf{x}^{(\mathbf{2})}$ é la coordinata relativa dei due elettroni e le $f(r)$ sono funzioni di $r = |\mathbf{x}|$, tali che ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 siano normalizzate.

c) Per ciascuna delle funzioni d'onda precedenti si determinino i possibili valori che puó dare una misura dell'osservabile L_z, dove $\mathbf{L}$ é il momento angolare orbitale **relativo**, e con quali probabilitá.