

Precorso di Geometria a Fisica

A.A. 2014/2015

Lezioni ed Esercizi

E. Abbena, A.M. Fino, G.M. Gianella

22 luglio 2014

In queste note è sviluppato il programma di Geometria proposto al Precorso del Corso di Laurea in Fisica. Si tratta, in realtà, del riassunto, con un'esposizione di tipo universitario, degli argomenti già incontrati nelle scuole superiori, che sono ritenuti indispensabili per seguire il corso di Geometria e Algebra Lineare I.

Per una esposizione approfondita e completa si rimanda ai testi classici universitari di Algebra e di Geometria in commercio e ai testi del liceo; per esempio si consigliano:

P. Boieri, G. Chiti: Precorso di Matematica; Ed. Zanichelli, Bologna, 1994.

E. Gallo: La Matematica, Vol. I e II; Ed. SEI, 1990.

N. Doderò, P. Baroncini, R. Manfredi: Elementi di Matematica per i Licei Scientifici, Vol. III; Ghisetti e Corvi Editore, 1991.

G. Malafarina: Matematica per i Precorsi; Mc Grow Hill Ed. 2003.

L'ultimo capitolo tratta alcune nozioni elementari di Logica Matematica, non espressamente legate al programma del corso di Geometria e Algebra Lineare I ma indispensabili per l'acquisizione di un linguaggio di tipo accademico. Il testo è stato quasi integralmente tratto dai libri di liceo francesi ed inglesi sotto elencati; non si pretende, pertanto, lo stile espositivo di tipo universitario che tale argomento dovrebbe avere.

A. Antibì, R. Barra : Math. Term. S. Obligatoire; Ed. Nathan, 1998.

V. Hanrahan, J. Matthews, R. Porkess, P. Secker: AS Pure Mathematics: C1,C2; Ed. Hodder & Stoughton, 2004.

Le figure inserite sono state ottenute con il programma *Mathematica*.

Per chiarimenti, approfondimenti, suggerimenti non si esiti a scrivere a: elsa.abbena@unito.it, annamaria.fino@unito.it, gianmario.gianella@unito.it.

Indice

1	Richiami di Teoria degli Insiemi	9
1.1	Insiemi, generalità	9
1.1.1	Metodi per descrivere gli insiemi	9
1.1.2	Quantificatori	10
1.1.3	Inclusione	11
1.1.4	Insieme delle parti	11
1.1.5	Principio di induzione (prima forma)	12
1.2	Operazioni tra insiemi	12
1.2.1	Intersezione	12
1.2.2	Unione	12
1.2.3	Complemento (Insieme complementare)	12
1.2.4	Principali proprietà	13
1.2.5	Partizione di un insieme	13
1.2.6	Prodotto Cartesiano	14
2	Insiemi di Numeri	15
3	Equazioni e Sistemi Lineari	19
3.1	Equazioni Lineari	19
3.2	Sistemi Lineari	22
4	Il Riferimento Cartesiano nel Piano	31
4.1	Il Riferimento Cartesiano, generalità	31
4.1.1	Distanza tra due punti	33
4.1.2	Punto medio di un segmento	33
4.1.3	Baricentro di un triangolo	34
4.2	Luoghi geometrici del piano	34

4.3	Traslazione degli assi	37
4.4	Simmetrie	41
5	La Retta nel Piano	45
5.1	Retta parallela agli assi coordinati	45
5.2	Retta passante per l'origine	46
5.3	Retta in posizione generica	48
5.4	Condizione di parallelismo tra rette	49
5.5	Condizione di perpendicolarità tra rette	49
5.6	Legame tra a, b, c e m	50
5.7	Retta passante per due punti	51
5.8	Posizione reciproca di due rette nel piano	52
5.9	Distanza di un punto da una retta	54
5.10	Esercizi di riepilogo	54
5.11	Fasci di rette	57
6	La Circonferenza nel Piano	63
6.1	Posizione reciproca tra una retta e una circonferenza	64
6.2	Retta tangente ad una circonferenza in un suo punto	68
6.3	Posizione reciproca di due circonferenze	68
6.4	Fasci di circonferenze	71
7	Le Coniche: definizione e proprietà focali	77
7.1	L'ellisse	77
7.2	L'iperbole	84
7.2.1	Iperbole equilatera	89
7.2.2	Iperbole riferita agli asintoti	92
7.3	La parabola	98
8	Le Coniche: luoghi geometrici di punti	113
9	Richiami di Teoria degli Insiemi – Esercizi	123
9.1	Esercizi	123
9.2	Soluzioni	124
10	Equazioni e Sistemi Lineari – Esercizi	127
10.1	Esercizi	127

10.2	Soluzioni	132
11	Geometria analitica nel piano – Esercizi	139
11.1	Esercizi	139
11.2	Soluzioni	144
12	Cenni Elementari di Logica	151
12.1	L'implicazione	151
12.1.1	Il Controesempio	152
12.1.2	Esercizi	152
12.1.3	Implicazioni nascoste	153
12.1.4	Esercizi	153
12.1.5	Implicazioni reciproche	153
12.1.6	Esercizi	153
12.2	L'Equivalenza	154
12.2.1	Esercizi	154
12.3	I Quantificatori	154
12.3.1	Esercizi	155
12.3.2	Uso simultaneo dei quantificatori	155
12.3.3	Esercizi	156
12.4	Negazione di una proposizione	156
12.4.1	Caso della proposizione P e Q	157
12.4.2	Caso della proposizione P o Q	157
12.4.3	Esercizi	157
12.4.4	Negazione di una proposizione universale	157
12.4.5	Esercizi	158
12.4.6	Negazione di una proposizione esistenziale	158
12.4.7	Esercizi	158
12.4.8	Contrapposizione di una implicazione	159
12.4.9	Esercizi	159
12.5	La Dimostrazione	159
12.5.1	Dimostrare un'implicazione	159
12.5.2	Dimostrazione per trasformazione della tesi	160
12.5.3	Esercizi	161
12.5.4	Un errore da evitare	161
12.5.5	Dimostrare che P e Q sono equivalenti	161

12.5.6	Ragionamento per assurdo	162
12.5.7	Esercizi	163
12.5.8	Ragionamento per un numero finito di passi	163
12.6	Esercizi	164
12.6.1	Dimostrare un'uguaglianza	164
12.7	Problemi di Determinazione di Insiemi	165
12.8	Problemi di esistenza	165
12.8.1	Esercizi	166
12.9	Soluzioni degli Esercizi	166

Capitolo 1

Richiami di Teoria degli Insiemi

In questo capitolo si riassumono quelle nozioni di teoria elementare degli insiemi che sono fondamentali per ogni corso di tipo matematico.

1.1 Insiemi, generalità

Insieme: concetto primitivo che non si definisce.

Elemento: tutto ciò che appartiene ad un insieme.

Gli insiemi sono denotati con le lettere maiuscole dell'alfabeto, gli elementi con le lettere minuscole.

$$x \in A$$

$\in$: simbolo di **appartenenza**, indica che l'elemento x appartiene all'insieme A . Si usa solo tra un elemento e un insieme.

$$x \notin A$$

$\notin$: simbolo di **non appartenenza**, si usa solo tra un elemento e un insieme.

1.1.1 Metodi per descrivere gli insiemi

1. Con i diagrammi di Eulero–Venn.
2. Con l'elenco degli elementi, racchiusi tra parentesi graffe (elementi ripetuti contano una volta sola e non è importante l'ordine).

Esempio 1.1 $A = \{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{1, 1, 2, 3\}$.

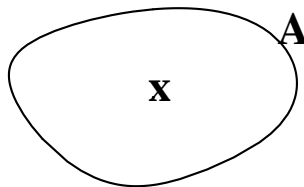


Figura 1.1: Un Insieme, un Elemento

3. Con una proprietà caratteristica dell'insieme.

Esempio 1.2 $B = \{ \text{alunni di questa classe} \}$.

Esempi fondamentali

1. $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Si osservi che, in alcuni testi si indica con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri precedente escludendo lo 0.
2. $\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi o relativi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. $\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.
4. $\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali (razionali e irrazionali).

1.1.2 Quantificatori

$\forall$: per ogni, qualunque, nessuno escluso; quantificatore universale.

$\exists$: esiste almeno un..., quantificatore esistenziale.

$\exists!$: esiste ed è unico.

Per abbreviare la scrittura si usa spesso il simbolo $|$ al posto di “tale che”.

Esempio 1.3 $2\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri pari; $2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}, x = 2y\}$

oppure: $\forall x \in 2\mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \mid x = 2y$.

1.1.3 Inclusione

Si tratta di una relazione tra due insiemi. $A \subseteq B$: si legge A è contenuto (o incluso) in B , vale a dire ogni elemento di A è anche un elemento di B . La scrittura $A \subseteq B$ **non** esclude che $A = B$. Se invece si vuole precisare che $A \neq B$ allora si scrive $A \subset B$ che si può anche leggere: A strettamente incluso in B . Se $A \subseteq B$ allora A è un **sottoinsieme** di B .

$\emptyset$ è il simbolo che indica l'**insieme vuoto**, vale a dire l'insieme privo di elementi. È chiaro che:

$$\emptyset \subseteq A, \forall A.$$

Esempio 1.4 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Esempio 1.5 $\forall A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq A$, (sottoinsiemi impropri).

Si noti che due insiemi A e B sono uguali se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

1.1.4 Insieme delle parti

Sia X un insieme, l'**insieme delle parti** di X , denotato con $\mathcal{P}(X)$, è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X :

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Esempio 1.6 $X = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$.

Esempio 1.7 $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset, \quad \forall X$.

Esempio 1.8 Se il numero degli elementi di X è n , $\#X = n$, allora $\#\mathcal{P}(X) = 2^n$.
(Dimostrazione per esercizio, per induzione su n).

1.1.5 Principio di induzione (prima forma)

Sia $A(n)$ un'asserzione che ha significato per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

1. $A(0)$ sia vera,
2. supposta vera $A(k)$ segua che $A(k+1)$ sia vera, allora l'asserzione $A(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vale un analogo principio di induzione (seconda forma) per $n \in \mathbb{Z}$. Per le dimostrazioni cfr. un qualsiasi testo di Algebra.

1.2 Operazioni tra insiemi

1.2.1 Intersezione

Dati due insiemi A e B , la loro intersezione, $A \cap B$, è l'insieme degli elementi comuni ad A e a B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, allora gli insiemi A e B si dicono disgiunti.

1.2.2 Unione

Dati due insiemi A e B , la loro unione, $A \cup B$, è l'insieme di tutti gli elementi di A e di B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

1.2.3 Complemento (Insieme complementare)

Dato un sottoinsieme A di X , il complemento di A in X , $X - A = \bar{A} = \mathcal{C}_X(A)$, è l'insieme degli elementi che appartengono ad X ma non appartengono ad A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \in X \text{ e } x \notin A\}.$$

1.2.4 Principali proprietà

Le dimostrazioni sono lasciate per esercizio.

1. Proprietà commutativa (di $\cap$ e $\cup$)

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A, \quad \forall A, B. \end{aligned}$$

2. Associativa (di $\cap$ e $\cup$)

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \quad \forall A, B, C. \end{aligned}$$

3. Distributive (di $\cap$ rispetto a $\cup$ e viceversa)

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad \forall A, B, C. \end{aligned}$$

- 4.

$$\begin{aligned} A \cap X &= A; & A \cup X &= X; & A \cap A &= A \\ A \cap \bar{A} &= \emptyset; & A \cup \bar{A} &= X; & A \cup A &= A; \\ A \cap \emptyset &= \emptyset; & A \cup \emptyset &= A; & \bar{X} &= \emptyset; \\ \bar{\emptyset} &= X; & \bar{\bar{A}} &= A; & \forall A \subseteq X. \end{aligned}$$

5. Leggi di de Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \forall A, B \subseteq X. \end{aligned}$$

1.2.5 Partizione di un insieme

Sia X un insieme, una **partizione** di X è una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ (I è l'insieme degli indici) di sottoinsiemi di X ($A_i \subseteq X, \forall i \in I$) tale che:

1. la loro unione coincide con X , ossia:

$$\cup_{i \in I} A_i = X;$$

2. gli elementi della famiglia sono a due a due disgiunti:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j;$$

3. ogni elemento della famiglia non è vuoto:

$$A_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in I.$$

Esempio 1.9 : Se $X = \{1, 2, 3\}$, allora $Y = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ è una partizione di X .

1.2.6 Prodotto Cartesiano

Dati due insiemi A e B , si definisce **prodotto cartesiano** di A e B , l'insieme $A \times B$ di tutte le coppie ordinate (a, b) per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$.

Segue dalla definizione che non vale la proprietà commutativa del prodotto cartesiano.

Esempio 1.10 Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$ il loro prodotto cartesiano è dato da:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}; \\ B \times A &= \{(x, 1), (y, 1), (x, 2), (y, 2), (x, 3), (y, 3)\}. \end{aligned}$$

Esempio 1.11 Il piano cartesiano è dato da:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si può estendere facilmente la definizione di prodotto cartesiano a più di due insiemi, per esempio, dati tre insiemi A, B, C si definisce prodotto cartesiano di A, B, C l'insieme $A \times B \times C$ di tutte le terne ordinate $(a, b, c), \forall a \in A, \forall b \in B, \forall c \in C$.

Esempio fondamentale: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, n volte, è l'insieme di tutte le n -uple ordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall x_i \in \mathbb{R}$.

Capitolo 2

Insiemi di Numeri

In questo capitolo si richiamano gli insiemi: $\mathbb{N}$ dei numeri naturali; $\mathbb{Z}$ dei numeri relativi; $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali; $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Inoltre si vuole vedere come essi sono “strutturati”, perciò, definite in $\mathbb{N}$ le usuali operazioni di somma e prodotto di due numeri, si studiano le loro proprietà dalle quali si giustifica l’esigenza di estendere tale insieme a $\mathbb{Z}$. Lo stesso dicasi per l’estensione da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$. Si ottiene poi $\mathbb{R}$ aggiungendo a $\mathbb{Q}$ tutti i numeri irrazionali, cioè che non sono del tipo p/q , con $p, q \in \mathbb{Z}$, come ad es. $\sqrt{2}$, e , π , ecc...

Nell’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

si definiscono due operazioni in modo elementare: la **somma** e il **prodotto** per cui valgono le seguenti proprietà:

per la somma:

1. proprietà commutativa: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$
2. proprietà associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$
3. esiste l’elemento neutro: $\exists 0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall a \in \mathbb{N}$, $0 + a = a + 0 = a$.

Per il prodotto:

1. proprietà commutativa: $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$
2. proprietà associativa: $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$

3. esiste l'elemento neutro: $\exists 1 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall a \in \mathbb{N}, 1a = a1 = a$.

Non è possibile, però, definire le operazioni inverse di somma e prodotto in $\mathbb{N}$: per esempio $-2 \notin \mathbb{N}$ e $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Ciò suggerisce l'introduzione di opportuni insiemi contenenti $\mathbb{N}$.

Nell'insieme dei numeri relativi:

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$$

si definiscono le stesse operazioni di $\mathbb{N}$: la somma e il prodotto, per cui valgono le stesse proprietà ma, solo per quanto riguarda la somma, si può parlare di **opposto** di un numero. Infatti è ben noto che l'opposto di 3 è -3 in quanto $3 + (-3) = 0$; analogamente l'opposto di -5 è 5 e l'opposto di 0 è 0, quindi per la somma vale la proprietà:

4. esiste l'opposto di ogni numero relativo:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z} \mid a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Si osservi che, mentre l'elemento neutro 0 è uguale per ogni numero, esistono infiniti opposti, tutti diversi, uno per ciascun elemento di $\mathbb{Z}$.

Si osservi inoltre che:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Nell'insieme dei numeri relativi non esiste, però, l'inverso di ogni elemento; a questo scopo si introduce l'insieme dei numeri **razionali**:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

In $\mathbb{Q}$ vengono definite le stesse operazioni di somma e prodotto introdotte in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$ per cui valgono le stesse proprietà. Inoltre, per quanto riguarda il prodotto, in $\mathbb{Q}$ esistono gli **inversi**, infatti è ben noto che l'inverso di -5 è $-\frac{1}{5}$ in quanto $(-5) \left(-\frac{1}{5}\right) = 1$. Tale proprietà è verificata per ogni elemento di $\mathbb{Q}$ non nullo, infatti per il prodotto, in $\mathbb{Q}$, vale anche la:

4. esiste l'inverso di ogni elemento non nullo: $\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, \exists \frac{1}{a} = a^{-1} \mid aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Analogamente al caso dell'opposto, si osservi che in $\mathbb{Q}$ esistono infiniti inversi, uno per ciascun elemento. Inoltre:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

È anche verificata una proprietà che lega il prodotto alla somma: la proprietà distributiva definita da:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

In pratica, l'insieme dei numeri razionali risolve il problema posto per le due operazioni elementari introdotte: la somma e il prodotto.

Dalle scuole superiori è noto che non tutti i numeri incontrati sono razionali, per esempio: $\sqrt{2}$, π e molti altri, che costituiscono l'insieme dei numeri **irrazionali**. Per una descrizione approfondita e completa si rimanda ai Corsi di Analisi Matematica. Si riporta, invece, la dimostrazione del fatto che $\sqrt{2}$ non è razionale, trattandosi di considerazioni piuttosto elementari e del primo esempio di dimostrazione per **assurdo** che si incontra.

Si ricorda che dimostrare un'affermazione per assurdo consiste nel negare la tesi, giungendo ad una contraddizione, da cui segue la veridicità della tesi.

TS. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Per assurdo si supponga che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, quindi $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Essendo $a, b \in \mathbb{Z}$ saranno scomponibili nel prodotto di potenze di numeri primi, del tipo:

$$a = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3} \dots, \quad b = 2^{q_1} 3^{q_2} 5^{q_3} \dots;$$

si assume noto il fatto che tali decomposizioni, dati a e b sono uniche.

Allora:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{2^{2p_1} 3^{2p_2} 5^{2p_3} \dots}{2^{2q_1} 3^{2q_2} 5^{2q_3} \dots} = 2^{2(p_1 - q_1)} 3^{2(p_2 - q_2)} \dots$$

da cui si ha subito l'assurdo.

Analogamente si può dimostrare che $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ non sono razionali. Più precisamente, si ottiene facilmente che $\sqrt{p}$ è razionale se e solo se esiste un numero razionale q tale che $p = q^2$. Si introducono, in questo modo, infiniti numeri irrazionali.

Si definisce così l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ dato dall'unione di $\mathbb{Q}$ con l'insieme dei numeri irrazionali. Ovviamente in $\mathbb{R}$ si definiscono le stesse proprietà di somma e prodotto, per cui valgono le quattro proprietà per ciascuna precedentemente elencate, e vale anche la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Non è banale dimostrare il principio fondamentale su cui si basa la geometria analitica:

i numeri reali sono rappresentabili su una retta orientata. Ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e viceversa.

L'affermazione precedente sottintende un'altra proprietà dei numeri reali: l'ordinamento totale; vale a dire, dati due numeri reali qualsiasi, siamo in grado di stabilire quale dei due sia minore o uguale all'altro, ossia:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \text{ oppure } b \leq a.$$

La relazione $\leq$ appena ricordata gode delle proprietà:

1. riflessiva: $a \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$;
2. transitiva: se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.
3. antisimmetrica: se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$.

Esempio 2.1 Si osservi che la relazione di inclusione tra insiemi $A \subseteq B$ è una relazione d'ordine, nel senso che valgono le proprietà riflessiva, transitiva e antisimmetrica prima elencate, ma non è una relazione d'ordine totale. Infatti dati due insiemi qualsiasi A e B non è detto che sia possibile decidere se $A \supseteq B$ o $B \supseteq A$. Si considerino per esempio $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{4, 5\}$.

Capitolo 3

Equazioni e Sistemi Lineari

In questo capitolo si introduce il concetto di equazione lineare a una o più incognite e se ne esaminano le soluzioni. Successivamente si richiamano i sistemi di equazioni lineari a due o più incognite, risolti con il metodo di sostituzione detto anche metodo di riduzione di Gauss.

3.1 Equazioni Lineari

Un'**equazione**, a coefficienti reali, in un'incognita x , è un polinomio in x uguagliato a zero.

Esempio 3.1 $2x + 5 = 0$ è un'equazione in x di primo grado.

$3x^2 - x + 5 = 0$ è un'equazione in x di secondo grado.

Il **grado** di un'equazione coincide con il grado del polinomio che la definisce ed è l'esponente massimo con cui compare x nel polinomio.

Analogamente, un'equazione a più incognite è un polinomio in diverse incognite uguagliato a zero.

Esempio 3.2 $2x + 3y + 5 = 0$ è un'equazione di primo grado in x, y .

$2xy + 5 = 0$ è un'equazione di secondo grado in x, y .

Il grado di un'equazione è, quindi, il massimo grado dei monomi che la compongono.

Nel corso di Geometria e Algebra Lineare I studieremo solo equazioni di primo grado o **lineari** ed equazioni di secondo grado.

Soluzione di un'equazione (ad un'incognita) è un numero (reale) che sostituito all'incognita verifica l'equazione.

Soluzione di un'equazione a due incognite è una coppia ordinata di numeri che sostituita alle incognite verifica l'equazione.

Esempio 3.3 $x = -\frac{5}{2}$ è soluzione di $2x + 5 = 0$, mentre la coppia $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ è una soluzione di $2x + 3y + 5 = 0$.

Risolvere un'equazione significa determinarne **tutte** le soluzioni.

Rivestono un'importanza particolare le equazioni lineari **omogenee** vale a dire quelle equazioni lineari il cui termine noto è zero. È chiaro che un'equazione omogenea ha sempre la soluzione nulla e se un'equazione ammette la soluzione nulla deve essere necessariamente omogenea. In altri termini l'esistenza della soluzione nulla **caratterizza** le equazioni omogenee.

Iniziamo con lo studio sistematico delle soluzioni di un'equazione di primo grado ad un'incognita a coefficienti reali, vale a dire di:

$$ax = b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Si distinguono i seguenti casi:

1. $a \neq 0$, l'unica soluzione è $x = \frac{b}{a}$.
2. $a = 0$, occorre distinguere: $b = 0$ allora ogni $x \in \mathbb{R}$ è soluzione, l'equazione è indeterminata; $b \neq 0$ allora l'equazione non ha soluzioni.

Riassumendo, un'equazione di primo grado ad un'incognita può ammettere:

-) una sola soluzione
-) nessuna soluzione
-) infinite soluzioni.

Ci occupiamo, ora, di risolvere equazioni lineari a due incognite, iniziando a studiare l'esempio seguente:

$$2x + 3y + 5 = 0.$$

Per esempio si può ricavare

$$x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}y,$$

quindi per ogni valore di y si ricava un particolare valore di x , in altri termini le infinite soluzioni che si trovano sono del tipo:

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

D'altra parte, dall'equazione originale avremmo potuto ricavare

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3},$$

ottenendo infinite soluzioni del tipo:

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -\frac{2}{3}t' - \frac{5}{3}, \quad t' \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni diventa:

$$\mathcal{S}' = \left\{ \left(t', -\frac{2}{3}t' - \frac{5}{3} \right), t' \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Esempio 3.4 Dimostrare che $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

Considerata, invece, l'equazione omogenea:

$$2x + 3y = 0$$

si osserva che le soluzioni sono (per esempio):

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

che, quindi, comprendono la soluzione $(0, 0)$, ottenuta ponendo $t = 0$.

Esercizio 3.1 Determinare le soluzioni di:

$$ax + by + c = 0$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Le equazioni lineari possono avere più di due incognite, per esempio l'equazione:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7$$

ha infinite soluzioni date (per esempio) da:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}t_1 - \frac{4}{3}t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

si osservi che si tratta di infinite soluzioni che dipendono da due parametri.

3.2 Sistemi Lineari

Per definizione un sistema di equazioni è un insieme di equazioni. Per esempio:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 5 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

è un sistema di due equazioni in due incognite x, y .

Il **grado** di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono, l'esempio propone un sistema di secondo grado.

Una **soluzione** di un sistema a due incognite è una coppia di numeri che sostituita alle incognite verifica contemporaneamente tutte le equazioni del sistema. Se si ha un sistema a tre incognite, una soluzione sarà data da una terna ordinata di numeri e così via. In pratica, l'insieme delle soluzioni di un sistema è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di tutte le equazioni che lo compongono.

Risolvere un sistema significa determinare **tutte** le sue soluzioni.

In queste lezioni ci occuperemo solo dei sistemi di primo grado, o **sistemi lineari**.

Un sistema lineare si dice **omogeneo** se i termini noti di tutte le sue equazioni sono nulli; è chiaro che un sistema lineare omogeneo ammette la soluzione nulla e viceversa se un sistema lineare ammette la soluzione nulla, allora è omogeneo.

Esempio 3.5 $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$

Si tratta di un sistema lineare di due equazioni a due incognite. Per esempio per ricavare le soluzioni si può procedere nel modo seguente:

$$y = 2 - x, \quad 2x - (2 - x) = 4, \quad 3x = 6, \quad x = 2, \quad y = 2 - 2 = 0.$$

Si ottiene un'unica soluzione: $(2, 0)$, infatti tale coppia ordinata di numeri (il primo per x e il secondo per y) verifica entrambe le equazioni del sistema.

Esempio 3.6 $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4, \end{cases}$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

si osservi che questo sistema lineare ammette infinite soluzioni.

Esempio 3.7 $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1. \end{cases}$

Tale sistema non ammette soluzioni.

Un sistema che ammette soluzioni si dice **compatibile**, altrimenti è **incompatibile**.

Si dimostrerà nel Corso di Geometria e Algebra Lineare I che, in generale, un sistema lineare può ammettere:

-) una sola soluzione;
-) infinite soluzioni;
-) nessuna soluzione.

In altri termini, nel caso dei sistemi lineari, non si avranno mai due sole soluzioni, a differenza di ciò che avviene, per esempio, nel caso dei sistemi di secondo grado.

Ci occupiamo ora di risolvere i sistemi lineari. Si possono usare metodi diversi, alcuni già studiati nelle scuole superiori. Scegliamo di presentare il metodo che prende il nome di **metodo di riduzione di Gauss** perché è quello più veloce al computer. La spiegazione avverrà tramite un esempio.

Si vuole risolvere il sistema lineare, di due equazioni in due incognite, seguente:

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 3x - 5y - 18 = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Il metodo di Gauss consiste nel sommare, sottrarre, moltiplicare per opportuni coefficienti le equazioni in modo da annullare, in modo opportuno, i coefficienti delle incognite. Si deve prestare molta attenzione ad ogni passaggio che consiste nel trasformare il sistema dato in un altro ad esso **equivalente**, ossia con le stesse soluzioni, onde evitare che il sistema che si ottiene non sia equivalente a quello di partenza.

Nel nostro caso decidiamo (per esempio) di sostituire alla seconda equazione la differenza tra il triplo della prima e la seconda in modo da annullare il coefficiente di x :

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 3(x - 2y - 7) - (3x - 5y - 18) = 0, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ -y - 3 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Da (3.2) è sufficiente risolvere la seconda equazione $y = -3$, sostituire nella prima e ricavare $x = 1$. Si deduce che il sistema dato ammette una sola soluzione: $(1, -3)$.

Si osservi che lo stesso sistema lineare poteva essere risolto in un altro modo, per esempio sottraendo da 5 volte la prima equazione il doppio della seconda si otteneva l'annullarsi del coefficiente di y , vale a dire:

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 5(x - 2y - 7) - 2(3x - 5y - 18) = 0 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene la soluzione.

Esercizio 3.2 Dimostrare che i sistemi (3.1) e (3.2) sono equivalenti, ossia dimostrare che:

1. se (x_0, y_0) è soluzione di (3.1) allora (x_0, y_0) è soluzione di (3.2);

2. se (x_0, y_0) è soluzione di (3.2) allora (x_0, y_0) è soluzione di (3.1).

Nel Corso di Geometria e Algebra Lineare I si dimostreranno le regole generali che permettono di passare da un sistema lineare ad un altro ad esso equivalente. In pratica si può solo sostituire ad una equazione una combinazione lineare di se stessa e delle altre equazioni del sistema purché il coefficiente per cui si moltiplica l'equazione che viene sostituita non sia nullo. In altri termini, il sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 5(x - 2y - 7) - 0(3x - 5y - 18) = 0 \end{cases}$$

non è equivalente a (3.1). Si lascia la dimostrazione per esercizio (per dimostrare che un'affermazione è falsa si può, per esempio, costruire un controesempio). Ogni altro tipo di combinazione lineare non conduce a sistemi equivalenti.

Esercizio 3.3 Si risolva il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0. \end{cases}$$

Soluzione Si riportano i passaggi essenziali, per esercizio se ne cerchi la giustificazione:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ -2y + 7z = 17 \\ -3y + 11z = 27, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ -2y + 7z = 17 \\ -z = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 1. \end{cases}$$

Il sistema dato ammette una sola soluzione: $(1, 2, 3)$.

Esercizio 3.4 Si risolva il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Soluzione Si riportano i passaggi essenziali, per esercizio se ne cerchi la giustificazione:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ 0 = -2. \end{cases}$$

Il sistema dato è incompatibile.

Esercizio 3.5 Si risolva il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Soluzione Si riportano i passaggi essenziali, per esercizio se ne cerchi la giustificazione:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 3x_3 = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 3t + 1 \\ x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il sistema dato ammette infinite soluzioni che dipendono da un parametro:

$$(-t, 3t + 1, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3.6 Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo di tre equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Soluzione Si riportano i passaggi essenziali, per esercizio se ne cerchi la giustificazione:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_2 = \frac{3}{2}t_1 - t_2 \\ x_1 = -2t_1 + t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da due parametri:

$$\left(-2t_1 + t_2, \frac{3}{2}t_1 - t_2, t_1, t_2 \right), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che per $t_1 = t_2 = 0$ si ha la soluzione nulla: $(0, 0, 0, 0)$.

Esercizio 3.7 Risolvere il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = h, \quad h, k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione Si deve prestare particolare attenzione ai parametri, evitando, fin quando è possibile, di coinvolgerli nei calcoli. Si riportano i passaggi essenziali, per esercizio se ne cerchi la giustificazione:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + (-2 - k)z = -1 \\ (1 - k)y - 4z = 1 - h; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (2 + k)z = 1 \\ (k^2 + k - 6)z = k - h. \end{cases}$$

Poichè $k^2 + k - 6 = (k + 3)(k - 2)$ si distinguono i seguenti casi:

A) $k \neq -3$ e $k \neq 2$;

B) $k = -3$;

C) $k = 2$.

A) $k \neq -3$ e $k \neq 2$; il sistema lineare ammette una sola soluzione al variare di h che si determina nel solito modo.

B) $k = -3$: sostituendo nell'ultimo sistema ricavato si ha:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = -3 - h, \end{cases}$$

si distinguono così due sottocasi:

B1) $k = -3$, $h = -3$ da cui si ottengono infinite soluzioni che dipendono da un parametro, date da:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

B2) $k = -3$, $h \neq -3$ che porta subito ad un sistema incompatibile.

C) $k = 2$: sostituendo nell'ultimo sistema ottenuto nel caso generale si ha:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0 = 2 - h, \end{cases}$$

si distinguono così due sottocasi:

C1) $k = 2$, $h = 2$ da cui si ottengono infinite soluzioni che dipendono da un parametro, date da:

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

C2) $k = 2$, $h \neq 2$ che porta subito ad un sistema incompatibile.

Capitolo 4

Il Riferimento Cartesiano nel Piano

Per Geometria Analitica si intende, grosso modo, il legame tra algebra e geometria, vale a dire il metodo per rappresentare, tramite equazioni, luoghi geometrici del piano e dello spazio. In queste note si presenta un rapido riassunto della geometria analitica del piano, cercando di evidenziarne le caratteristiche salienti, utili per i corsi successivi.

4.1 Il Riferimento Cartesiano, generalità

Si inizia con l'introduzione del **riferimento cartesiano**, costituito da due rette ortogonali, orientate. Il punto di incontro è l'origine, la retta orizzontale è l'asse delle ascisse o asse x , la retta verticale è l'asse delle ordinate o asse y . Si introduce l'orientamento verso destra sull'asse x e verso l'alto sull'asse y , si rappresentano i numeri reali su entrambe le rette (come spiegato nel capitolo precedente) e si pone il numero 0 nel punto di intersezione delle rette. Si viene così a definire una corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie di numeri reali come rappresentato in figura. Ogni punto P ha coordinate $P = (x, y)$, x è l'ascissa di P e y è l'ordinata di P . Il piano viene così diviso in quattro quadranti, che, per convenzione, sono numerati in senso antiorario, a partire dal semiasse positivo delle x .

Alcuni degli esercizi risolti sono tratti dai testi elencati nell'introduzione. Si rimanda anche ai medesimi per le dimostrazioni omesse in questi appunti.

Esercizio 4.1 Si rappresentino sul piano i punti $O = (0, 0)$, $A = (2, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (-2, -4)$. Si osservi che i punti sull'asse x sono caratterizzati dall'avere ordinata nulla, i punti sull'asse y hanno invece ascissa nulla.

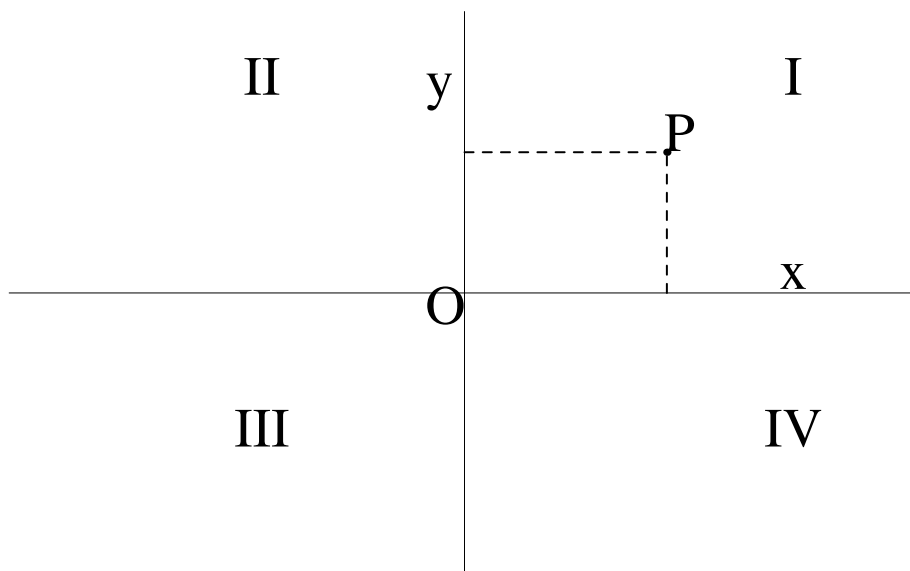


Figura 4.1: Il Riferimento Cartesiano nel Piano

4.1.1 Distanza tra due punti

Dati due punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ la loro distanza è data da:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (4.1)$$

La dimostrazione è una conseguenza del teorema di Pitagora.

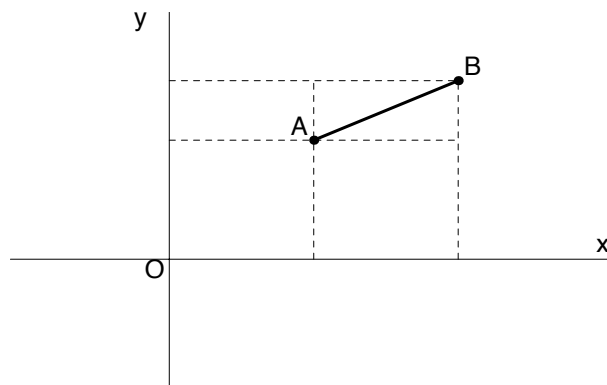


Figura 4.2: Distanza tra due Punti

Esercizio 4.2 Calcolare le coordinate del punto P appartenente all'asse x ed equidistante da $A = (1, 3)$ e da $B = (5, 1)$.

Soluzione Se $P = (x, 0)$ e imponendo che $d(A, P) = d(P, B)$ si ha $(x - 1)^2 + 9 = (x - 5)^2 + 1$ da cui segue $x = 2$.

4.1.2 Punto medio di un segmento

Dati due punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ le coordinate del punto medio M del segmento AB sono:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

4.1.3 Baricentro di un triangolo

Dati tre punti $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ non allineati, il baricentro G del triangolo da essi individuato ha coordinate:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right).$$

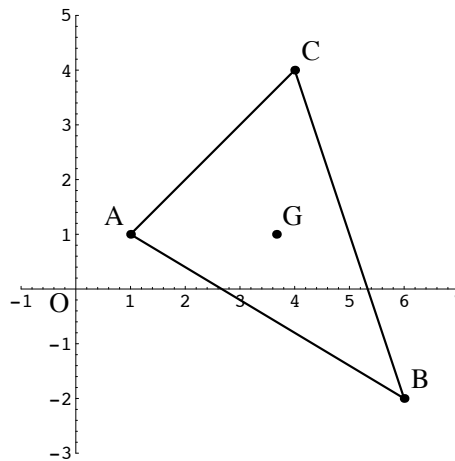


Figura 4.3: Il Baricentro di un Triangolo

4.2 Luoghi geometrici del piano

L'insieme dei punti del piano che verificano una determinata proprietà costituisce un *luogo geometrico*. Per esempio:

1) Asse di un segmento. Dati due punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, l'asse del segmento AB è il luogo dei punti $P = (x, y)$ equidistanti da A e da B , quindi:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2,$$

da cui:

$$2(x_A - x_B)x + 2(y_A - y_B)y + x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2 = 0$$

che è l'equazione del luogo richiesto. Si osservi che si tratta di un'equazione di primo grado in x e y e si osservi anche che, dal punto di vista geometrico, l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio. Si ritornerà su questo argomento nel prossimo capitolo.

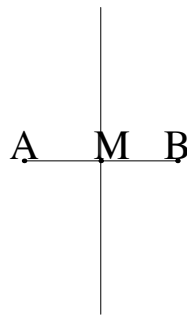


Figura 4.4: Asse di un Segmento

2) La circonferenza. È il luogo dei punti $P = (x, y)$ aventi distanza $r \geq 0$ da un punto fisso $C = (\alpha, \beta)$. Imponendo:

$$d(P, C)^2 = r^2$$

si ottiene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Si tratta di una particolare equazione di secondo grado in x e y che sarà studiata in dettaglio nel Sesto Capitolo.

Può rivelarsi molto più complicato il problema inverso, vale a dire. data un'equazione in x e y studiare il luogo geometrico individuato dai punti $P = (x, y)$ che la verificano. Procediamo in questo senso proponendo una serie di esempi ed esercizi.

Esercizio 4.3 Verificare che la curva di equazione:

$$y = -x^2 + x + 3$$

passa per i punti $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 1)$ e non passa per $O = (0, 0)$ e $C = (5, 0)$.

Soluzione Un punto appartiene al luogo geometrico descritto da un'equazione se e solo se le sue coordinate verificano l'equazione stessa. Quindi A appartiene alla curva data

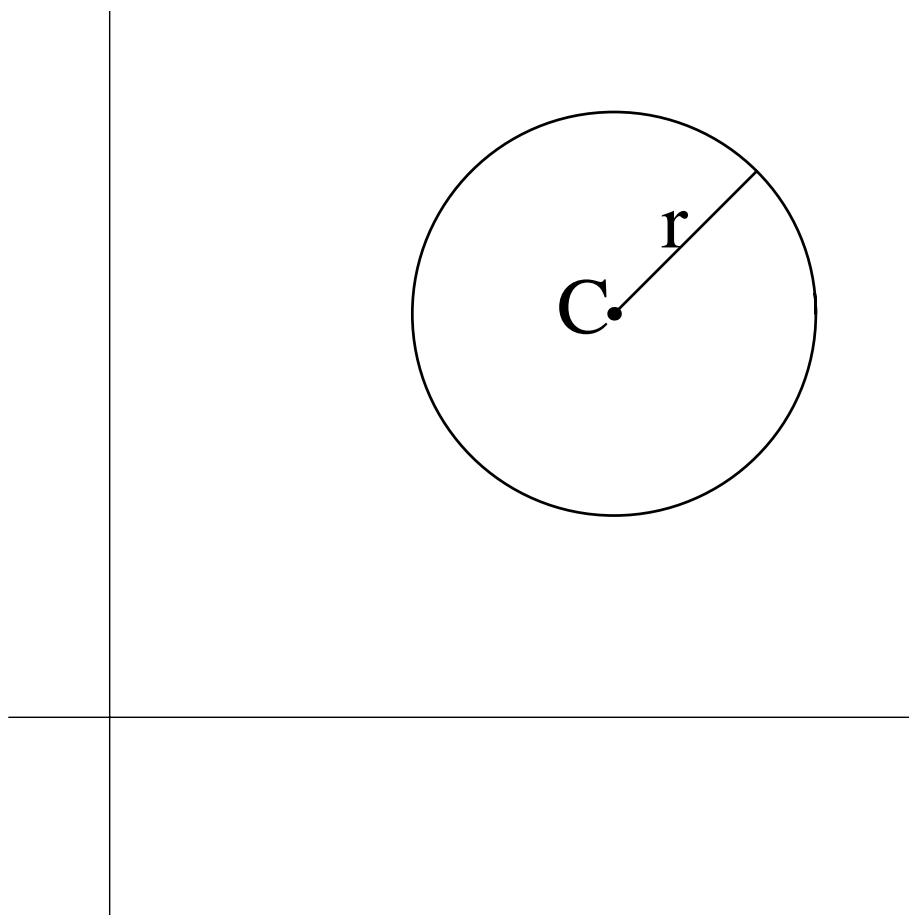


Figura 4.5: La Circonferenza

perchè $-1 - 1 + 3 = 1$, lo stesso per B . L'origine, invece, non appartiene a tale curva perchè $3 \neq 0$, analoga verifica per C .

Esercizio 4.4 Come si fa a capire se l'origine del sistema di riferimento appartiene al luogo geometrico considerato?

Soluzione Dalle considerazioni precedenti segue che tutte e sole le equazioni in x, y con termine noto nullo, rappresentano luoghi geometrici passanti per l'origine. Per esempio: $x^2 + 2x = 0$ è una curva passante per O .

Esercizio 4.5 Determinare i punti $P = (a, a + 3)$, $a \in \mathbb{R}$, appartenenti alla curva di equazione:

$$2y^2 - 9(x + 2) = 0. \quad (4.2)$$

Soluzione Sostituendo le coordinate di P nell'equazione (4.2) si ha $2(a + 3)^2 - 9(a + 2) = 0$ da cui segue $a_1 = -\frac{3}{2}$ e $a_2 = 0$. Quindi si ottengono i punti: $P_1 = (0, 3)$ e $P_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

4.3 Traslazione degli assi

Un altro metodo che può essere utile nello studio dei luoghi geometrici è quello di scrivere l'equazione del luogo in un sistema di riferimento traslato.

Nel riferimento $\mathcal{R} = (O, x, y)$ si definiscono una nuova origine nel punto $O' = (a, b)$ e i nuovi assi X e Y , passanti per O' , paralleli e concordi a x e a y . Si ottiene così un nuovo riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (O', X, Y)$ che è traslato rispetto al precedente. Si vogliono le relazioni che legano le coordinate del generico punto $P = (x, y)$ e $P = (X, Y)$ rispetto ai due riferimenti. Dalla figura segue:

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y, \end{cases} \quad (4.3)$$

oppure:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b. \end{cases}$$

Esempio 4.1 Data la curva di equazione:

$$9x^2 + 9y^2 - 24x - 30y - 13 = 0,$$

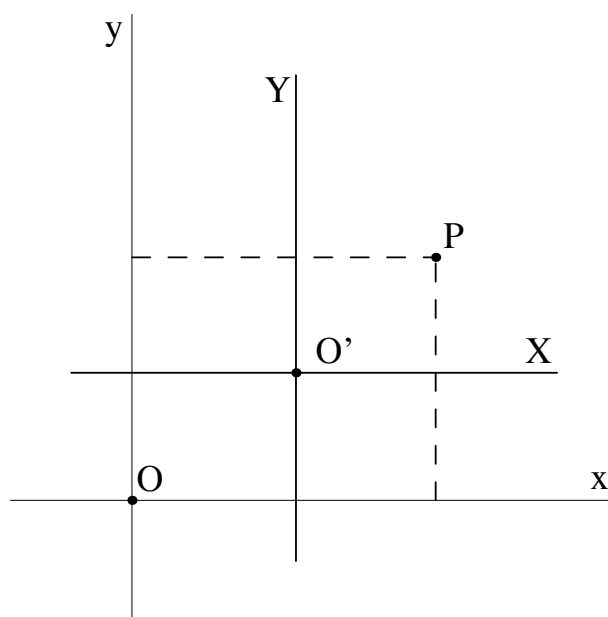


Figura 4.6: Traslazione degli Assi

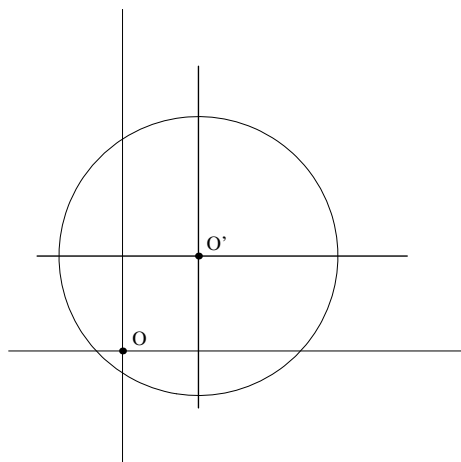


Figura 4.7: Esempio 4.1

determinare la sua espressione nel riferimento traslato $\mathcal{R}' = (O', X, Y)$, dove

$$O' = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Le equazioni della traslazione sono:

$$\begin{cases} x = X + \frac{4}{3} \\ y = Y + \frac{5}{3}, \end{cases}$$

che sostituite nell'equazione assegnata danno:

$$X^2 + Y^2 = 6.$$

Adesso è chiaro che si tratta di una circonferenza di centro l'origine O' nel nuovo riferimento e raggio $\sqrt{6}$.

Esempio 4.2 Un punto P ha coordinate $(-2, 3)$ nel riferimento $\mathcal{R} = (O, x, y)$ e coordinate $(4, -6)$ nel riferimento traslato $\mathcal{R}' = (O', X, Y)$. Determinare le coordinate del punto O' rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{R} = (O, x, y)$.

Sostituendo le coordinate di P in (4.3) si ha:

$$\begin{cases} -2 = a + 4 \\ 3 = b - 6 \end{cases}$$

da cui segue $O' = (-6, 9)$.

Esempio 4.3 Quale traslazione si deve operare sugli assi affinché l'equazione:

$$y = -x^2 + 3x - 2$$

si trasformi in:

$$Y = -X^2?$$

Sostituendo (4.3) nella prima equazione data si ha:

$$Y = -X^2 + (-2a + 3)X - a^2 + 3a - 2 - b,$$

da cui segue:

$$\begin{cases} -2a + 3 = 0 \\ a^2 - 3a + 2 + b = 0 \end{cases}$$

quindi: $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{4}$.

Esempio 4.4 Operando con il metodo del completamento dei quadrati individuare un'opportuna traslazione che permetta di studiare la curva di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y = 0.$$

Il **metodo del completamento dei quadrati** (insegnato nelle scuole superiori per dimostrare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado) consiste nel sommare e sottrarre numeri opportuni in modo da far comparire dei quadrati. Nel nostro caso si ha:

$$(x^2 + 2x + 1) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) - 1 - \frac{9}{4} = 0;$$

$$(x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

Operando con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + \frac{3}{2} \end{cases}$$

si ottiene, nel nuovo riferimento, l'equazione:

$$X^2 + Y^2 = \frac{13}{4}$$

che rappresenta la circonferenza di centro l'origine $O' = \left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ e raggio $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

4.4 Simmetrie

Un altro metodo per studiare il grafico di una curva, di cui si conosce l'equazione, è cercare le eventuali simmetrie.

1) Curva simmetrica rispetto all'asse y

Una curva è simmetrica rispetto all'asse y se per ogni punto $P = (x, y)$ appartenente alla curva anche il punto $P' = (-x, y)$ appartiene alla curva. Per esempio $x^2 + y + 5 = 0$ è simmetrica rispetto all'asse y mentre $x^2 + x + y + 5 = 0$ non lo è.

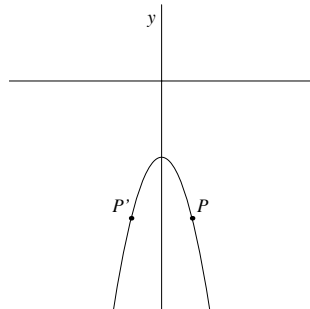


Figura 4.8: Simmetria rispetto all'asse y

2) Curva simmetrica rispetto all'asse x

Una curva è simmetrica rispetto all'asse x se per ogni punto $P = (x, y)$ appartenente alla curva anche il punto $P' = (x, -y)$ appartiene alla curva. Per esempio $x + y^2 + 5 = 0$ è simmetrica rispetto all'asse x mentre $x + y + 5 = 0$ non lo è.

3) Curva simmetrica rispetto all'origine

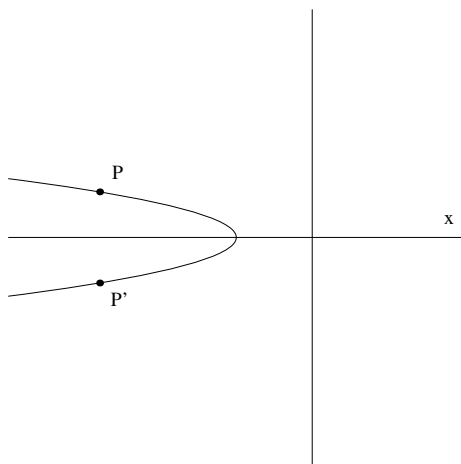


Figura 4.9: Simmetria rispetto all'asse x

Una curva è simmetrica rispetto all'origine se per ogni punto $P = (x, y)$ appartenente alla curva anche il punto $P' = (-x, -y)$ appartiene alla curva. Per esempio $x^2 + y^2 = 5$ è simmetrica rispetto all'origine mentre $x^2 + x + y + 5 = 0$ non lo è.

Esempio 4.5 Verificare che la curva di equazione: $x^3 + y^3 + 3x - 2y = 0$ è simmetrica rispetto all'origine.

Dato il punto $P' = (-x, -y)$, si sostituiscono le sue coordinate nell'equazione data e si ha:

$$(-x)^3 + (-y)^3 + 3(-x) - 2(-y) = -(x^3 + y^3 + 3x - 2y) = 0$$

da cui si deduce che la curva è simmetrica rispetto all'origine.

Esercizio 4.6 Verificare che la curva di equazione:

$$4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y - 68 = 0 \tag{4.4}$$

è simmetrica rispetto al punto $C = (-1, -2)$.

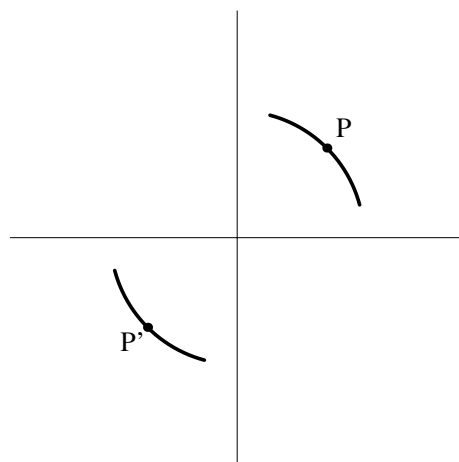


Figura 4.10: Simmetria rispetto all'origine

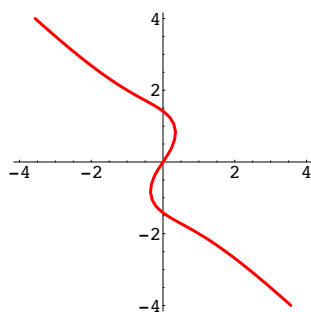


Figura 4.11: Esempio 4.5

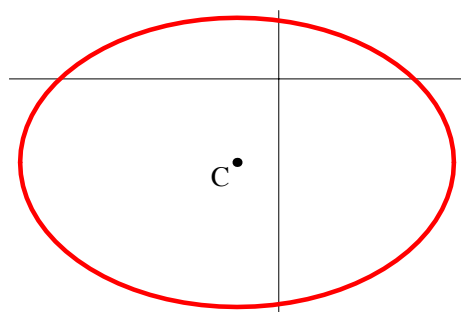


Figura 4.12: Esempio 4.6

Soluzione Il problema si risolve trasladando la curva data nel riferimento $\mathcal{R}' = (C, X, Y)$ e poi dimostrando che l'equazione ottenuta è simmetrica rispetto all'origine. Le equazioni della traslazione sono:

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$$

che sostituite in (4.4) portano a:

$$4X^2 + 9Y^2 = 108$$

che definisce una curva (è un'ellisse) simmetrica rispetto all'origine del nuovo sistema di riferimento.

Capitolo 5

La Retta nel Piano

Scopo del capitolo è dimostrare il seguente:

Teorema 5.1 *Ogni equazione di primo grado in x, y del tipo:*

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad (5.1)$$

rappresenta una retta. Viceversa ogni retta del piano è rappresentabile tramite un'equazione lineare in x, y del tipo suddetto.

Si precisa che le spiegazioni inserite in questo testo seguono l'andamento dei programmi delle scuole superiori e si scostano in modo evidente dall'approccio che sarà usato per argomenti analoghi durante il Corso di Geometria e Algebra Lineare I, i quali presuppongono le nozioni di calcolo vettoriale. La geometria analitica nel piano può essere riletta in quel contesto.

5.1 Retta parallela agli assi coordinati

Dal capitolo precedente appare chiaro che tutti e soli i punti appartenenti all'asse x sono caratterizzati dall'avere ordinata nulla, quindi l'asse x ha equazione:

$$y = 0.$$

Analoga considerazione vale per l'asse y che ha equazione:

$$x = 0.$$

Usando la teoria delle traslazioni esposta nel capitolo precedente, consideriamo, per esempio il punto $A = (1, 2)$ e le equazioni della traslazione del riferimento in A :

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + Y, \end{cases}$$

da cui si deduce che l'asse X ha equazione $y = 2$ e l'asse Y ha equazione $x = 1$. Segue che ogni retta parallela all'asse y ha equazione:

$$x = h, \quad h \in \mathbb{R},$$

ogni retta parallela all'asse x ha equazione:

$$y = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

5.2 Retta passante per l'origine

La bisettrice del primo e terzo quadrante passa per i punti del tipo $A = (5, 5)$, $B = (-7, -7)$, in generale, per i punti $P = (x, x)$, quindi ha equazione:

$$y = x,$$

la bisettrice del secondo e quarto quadrante passa per i punti del tipo $A = (-5, 5)$, $B = (7, -7)$, in generale, per i punti $P = (x, -x)$, quindi ha equazione:

$$y = -x.$$

Consideriamo una generica retta passante per l'origine e per i punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Se α è l'angolo che la retta data forma con l'asse x è chiaro che:

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = \tan \alpha.$$

Le coordinate del generico punto $P = (x, y) \neq O$ appartenente alla retta verificano la stessa relazione, ossia $\frac{y}{x} = \text{costante} = m$. La generica retta passante per l'origine ha equazione:

$$y = mx, \quad m \in \mathbb{R}.$$

m prende il nome di *coefficiente angolare* della retta e $m = \tan \alpha$ dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse x . Si osservi che questa rappresentazione comprende tutte le rette per l'origine, tranne l'asse y .

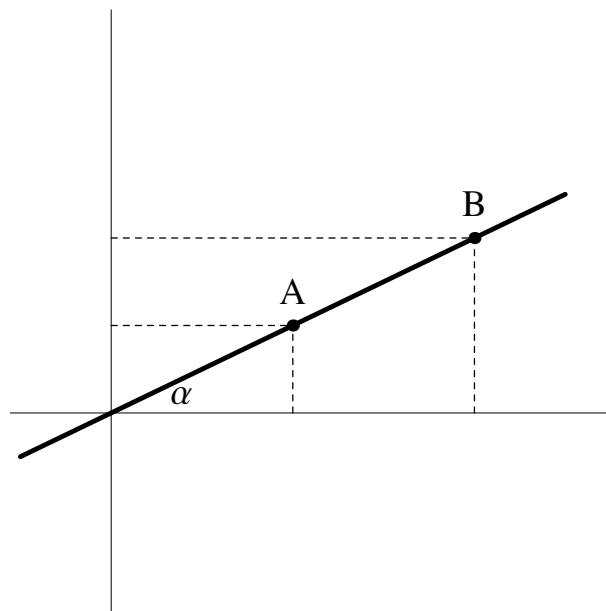


Figura 5.1: Retta nel Piano passante per l'Origine

5.3 Retta in posizione generica

Consideriamo la traslazione nel punto $O' = (x_O, y_O)$ di equazioni:

$$\begin{cases} X = x - x_O \\ Y = y - y_O \end{cases}$$

e sostituiamo nell'equazione della generica retta per O' : $Y = mX$, si ha:

$$y - y_O = m(x - x_O) \quad (5.2)$$

che è l'equazione della generica retta passante per O' con coefficiente angolare m .

Sviluppando l'equazione precedente si ottiene:

$$y = mx + q \quad (5.3)$$

dove il numero q è l'ordinata del punto $A = (0, q)$ appartenente alla retta considerata, in altri termini q è la lunghezza (con segno) del segmento che la retta stacca sull'asse y , a partire dall'origine.

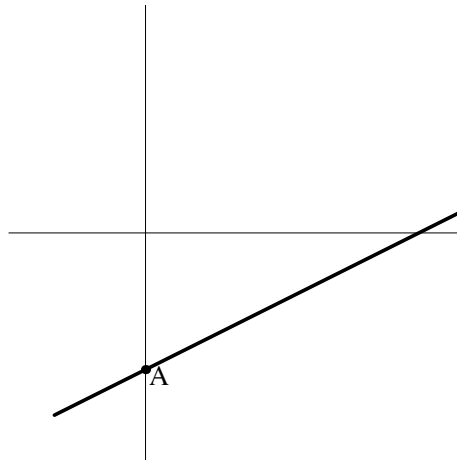


Figura 5.2: Una rappresentazione grafica di $y = mx + q$

5.4 Condizione di parallelismo tra rette

Due rette:

$$r : y = mx + q, \quad r' : y = m'x + q'$$

sono parallele se e solo se:

$$m = m',$$

ossia se i loro coefficienti angolari coincidono.

5.5 Condizione di perpendicolarità tra rette

Due rette:

$$r : y = mx + q, \quad r' : y = m'x + q'$$

sono perpendicolari se e solo se:

$$mm' = -1,$$

infatti $mm' = \tan \alpha \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -1$.

Esercizio 5.1 Condurre dal punto $A = \left(\frac{3}{4}, -2 \right)$ la retta r parallela all'asse y e dal punto $B = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{3} \right)$ la retta s parallela all'asse x ; detto C il loro punto di intersezione, determinare la lunghezza del segmento OC .

Soluzione Le rette richieste sono:

$$r : x = \frac{3}{4}, \quad s : y = \frac{4}{3}$$

quindi $C = \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3} \right)$ da cui segue: $d(O, C) = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{9}}$.

Esercizio 5.2 Condurre per $A = (2, -3)$ la perpendicolare alla retta di equazione $y = 2x - 1$.

Soluzione La retta richiesta ha equazione $y = mx + q$ con $2m = -1$, quindi $m = -\frac{1}{2}$. Imponendo il passaggio per A segue $q = -2$.

Riepilogando, abbiamo dimostrato che una generica retta r non parallela all'asse y ha equazione del tipo

$y = mx + q$, $m, q \in \mathbb{R}$, invece una retta parallela all'asse y ha equazione del tipo $x = m$, $m \in \mathbb{R}$. Per concludere la dimostrazione del Teorema 5.1, si deve dimostrare che un'equazione di primo grado del tipo:

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

rappresenta una retta. Distinguiamo i casi seguenti:

1. $a \neq 0, b \neq 0, c \in \mathbb{R}$: si ha $y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$, ossia una retta di coefficiente angolare $-\frac{a}{b}$ che passa per l'origine se $c = 0$.
2. $a = 0, b \neq 0, c \in \mathbb{R}$. Se $c = 0$ abbiamo $y = 0$, ossia l'asse x ; se $c \neq 0$ si ha: $y = -\frac{c}{b}$, quindi una retta parallela all'asse x .
3. $a \neq 0, b = 0, c \in \mathbb{R}$. Se $c = 0$ si ha $x = 0$, ossia l'asse y ; se $c \neq 0$ segue $x = -\frac{c}{a}$, quindi una retta parallela all'asse y .

5.6 Legame tra a, b, c e m

Dal confronto tra le equazioni della retta (5.1) e (5.3) segue che il coefficiente angolare è dato da:

$$m = -\frac{a}{b}.$$

Di conseguenza, date due rette:

$$r : ax + by + c = 0, \quad r' : a'x + b'y + c' = 0$$

la condizione di parallelismo è:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

mentre la condizione di perpendicolarità è:

$$aa' + bb' = 0.$$

5.7 Retta passante per due punti

Dati due punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ si vuole ricavare una formula che permetta di scrivere l'equazione della retta passante per A e per B . Imponiamo in (5.2) il passaggio per A e per B , si ha: $y - y_A = m(x - x_A)$, e $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$, da cui $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ che, sostituito nella prima equazione, porta a :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},$$

ossia l'equazione richiesta.

Esercizio 5.3 È ben noto che due punti distinti individuano una sola retta, infatti nell'equazione $y = mx + q$ ci sono solo due incognite: m e q . Perché nell'equazione $ax + by + c = 0$ ci sono tre incognite: a , b , c ?

Esercizio 5.4 Data la retta di equazione:

$$(a - 2)x + (1 - 2a)y + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

determinare a in modo che:

1. passi per $A = (2, 0)$;
2. sia parallela a $y = 2x - 1$;
3. sia perpendicolare a $3x - y + 1 = 0$;
4. sia parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante;
5. formi un angolo acuto con l'asse x .

Soluzione

1. Sostituendo in (5.4) le coordinate di A si ha: $a = \frac{3}{2}$.
2. Da (5.4) segue che il coefficiente angolare è $-\frac{a-2}{1-2a}$, $a \neq \frac{1}{2}$, imponendo che tale numero coincida con 2 segue: $a = 0$.
3. Si deve imporre che $3\frac{2-a}{1-2a} = -1$.

4. Si deve imporre il parallelismo alla retta $y = x$, ossia $\frac{2-a}{1-2a} = 1$.
5. Si deve imporre che $\frac{2-a}{1-2a} > 0$.

5.8 Posizione reciproca di due rette nel piano

Dalla geometria euclidea segue che due rette nel piano possono essere:

- .) coincidenti;
- .) parallele e distinte;
- .) incidenti.

Dal punto di vista algebrico si risolve il problema studiando le soluzioni del sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

dato dalle equazioni delle due rette:

$$r : ax + by + c = 0, \quad r' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Dal metodo di riduzione di Gauss segue:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (a'b - ab')y + a'c - ac' = 0. \end{cases}$$

Distinguiamo i due casi:

- 1) $a'b - ab' = 0$, ossia $a'b = ab'$, vale a dire:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

che è la condizione di parallelismo tra le due rette. Si presentano due possibilità:

- 1A) $ac' - a'c = 0$, ossia

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'};$$

il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da un parametro, ma le condizioni poste equivalgono a richiedere che le due rette siano coincidenti.

1B) $ac' - a'c \neq 0$, ossia

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'};$$

il sistema è incompatibile, non esistono soluzioni. Ma le condizioni imposte equivalgono a richiedere che le due rette siano parallele ma non coincidenti.

2) $a'b - ab' \neq 0$, ossia

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'},$$

il sistema ammette una sola soluzione. La condizione imposta equivale a richiedere che le due rette non siano parallele, quindi sono incidenti, e, di conseguenza, si intersecano in un solo punto.

Esercizio 5.5 Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca delle rette:

$$r : (2k - 1)x + y - 3k = 0, \quad s : 3kx - 2y + k - 1 = 0.$$

Soluzione Si tratta di studiare le soluzioni del sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} (2k - 1)x + y - 3k = 0 \\ 3kx - 2y + k - 1 = 0 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Procedendo con il metodo di riduzione di Gauss si ha:

$$\begin{cases} (2k - 1)x + y - 3k = 0 \\ (7k - 2)x - 5k - 1 = 0, \end{cases}$$

si distinguono così due casi:

1. se $k \neq \frac{2}{7}$ esiste una sola soluzione, quindi le due rette sono incidenti.
2. se $k = \frac{2}{7}$ le rette sono parallele ma mai coincidenti in quanto $-5k - 1 \neq 0$.

Esercizio 5.6 Date le rette:

$$r_1 : 4x + y - 8 = 0, \quad r_2 : 3x - 2y + 2 = 0$$

e il punto $P = (2, 1)$, determinare:

1. la retta passante per P e parallela a r_1 ;
2. la retta passante per il punto di intersezione di r_1 e r_2 e perpendicolare a r_2 .

Soluzione

1. Una generica retta parallela a r_1 ha equazione del tipo $4x + y + c = 0$, imponendo il passaggio per P si ricava $c = -9$.

2. Il sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

ha soluzione $\left(\frac{14}{11}, \frac{32}{11}\right)$, ossia le coordinate del punto di intersezione di r_1 e r_2 .

La retta richiesta ha equazione: $y - \frac{32}{11} = m \left(x - \frac{14}{11}\right)$ con $\frac{3}{2}m = -1$.

5.9 Distanza di un punto da una retta

Data una retta $r : ax + by + c = 0$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, la distanza di P_0 dalla retta r è data da:

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (5.5)$$

da cui segue, per esempio, che P_0 appartiene ad r se e solo se $d(P_0, r) = 0$. La formula si ottiene calcolando la distanza tra P_0 e H , piede della perpendicolare condotta da P_0 a r .

Esempio 5.1 Calcolare la distanza del punto $P = (1, 2)$ dalla retta $r : 2x - y + 5 = 0$.

Da (5.5) si ha: $d(P, r) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$.

5.10 Esercizi di riepilogo

- 1) **Asse di un segmento.** Calcolare l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A = (-3, 5)$, $B = (2, -3)$.

Il procedimento da usare è già stato spiegato nel capitolo precedente, in alternativa si può determinare l'equazione della retta perpendicolare ad AB nel suo punto medio. Imponendo, invece, che l'asse sia il luogo dei punti $P = (x, y)$ equidistanti da A e B si ha: $\sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$ da cui segue che l'equazione dell'asse è: $10x - 16y + 21 = 0$.

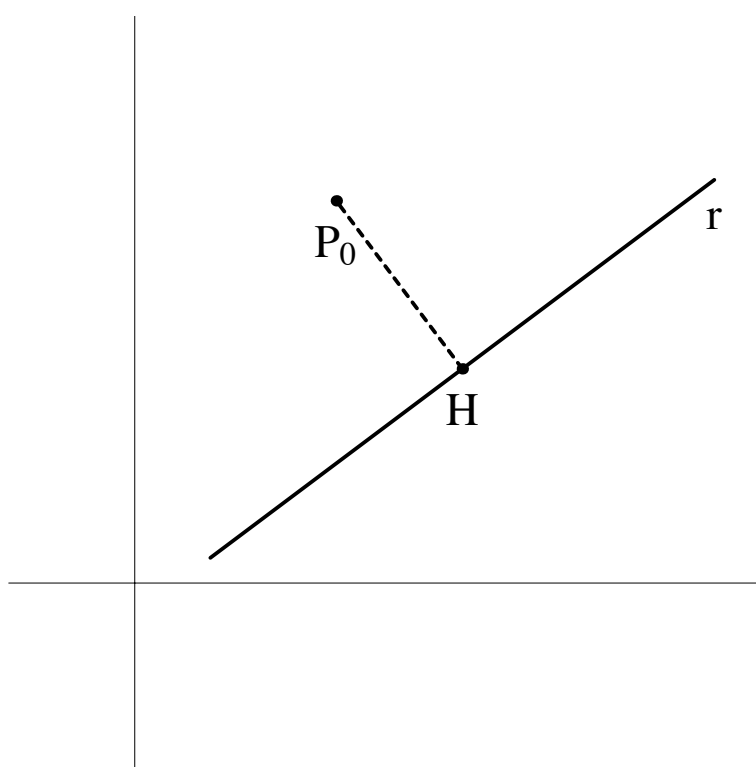


Figura 5.3: Distanza di un Punto da una Retta

2) **Bisettrici di due rette incidenti.** Date le rette:

$$r : 3x + 4y + 2 = 0, \quad s : 7x - 24y - 6 = 0$$

determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli da esse individuati.

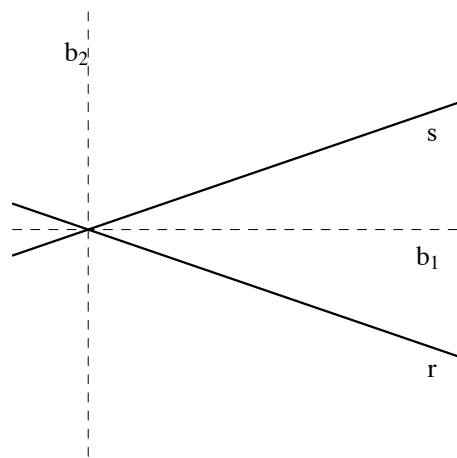


Figura 5.4: Le Bisettrici di due Rette Incidenti

Le bisettrici sono il luogo dei punti $P = (x, y)$ equidistanti dalle due rette, ossia tali che $d(P, r) = d(P, s)$. Da (5.5) segue:

$$\frac{3x + 4y + 2}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{7x - 24y - 6}{\sqrt{49 + 576}}$$

da cui si ottengono le rette:

$$b_1 : 2x + 11y + 4 = 0, \quad b_2 : 11x - 2y + 2 = 0.$$

3) **Simmetrica di una retta rispetto ad un'altra.** Date le due rette:

$$a : x + 2y + 2 = 0, \quad a' : x - y - 3 = 0,$$

determinare l'equazione della retta a'' simmetrica di a rispetto ad a' .

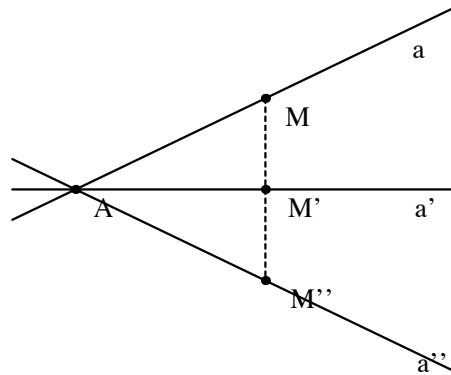


Figura 5.5: Simmetrica di una Retta rispetto ad un'altra Retta ad essa Incidente

Il punto di intersezione di a e a' è $A = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. Sia $M = (0, -1) \in a$. La retta per M perpendicolare ad a' di equazione $y = x - 3$ incontra a' nel punto $M' = (1, -2)$. Il simmetrico M'' di M rispetto a M' , che ha coordinate $(2, -3)$, essendo M' il punto medio tra M e M'' , appartiene alla retta a'' .
 a'' è, quindi, la retta passante per A e per M'' e ha equazione: $2x + y - 1 = 0$.

5.11 Fasci di rette

In geometria euclidea si definiscono due tipi di fasci di rette:

1. il *fascio improprio* di rette formato da tutte le rette parallele ad una retta assegnata;
2. il *fascio proprio* di rette formato da tutte le rette passanti per un punto, detto *centro* del fascio.

Da (5.3) si ha che una semplice rappresentazione di un fascio improprio di rette è:

$$y = mx + q$$

con m fissato e q che assume ogni valore in campo reale. Il fascio di rette parallele all'asse y invece è rappresentato da:

$$x = k, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Per esempio $y = 3x + q, \forall q \in \mathbb{R}$, individua tutte e sole le rette del piano parallele a $y = 3x$.

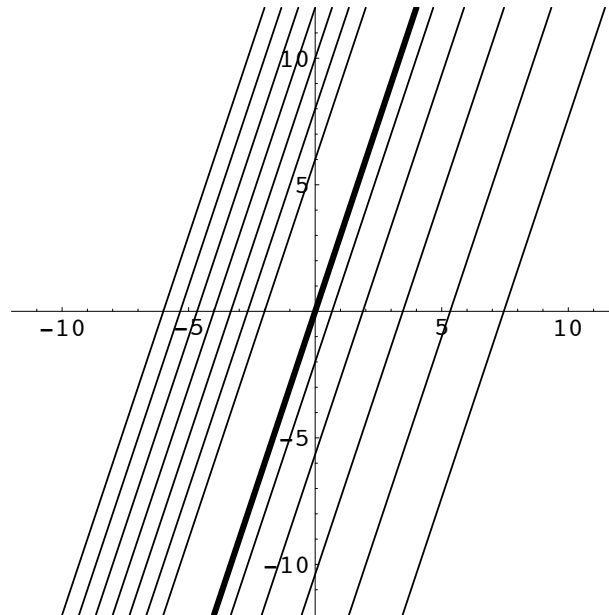


Figura 5.6: Fascio di rette parallele a $y = 3x$

Siano:

$$r : ax + by + c = 0, \quad r' : a'x + b'y + c' = 0$$

due rette incidenti nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Il fascio proprio di rette per P_0 è dato dalla combinazione lineare:

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Per dimostrare questa affermazione, procediamo attraverso considerazioni successive:

1. (5.6) è un'equazione lineare in x, y , pertanto rappresenta una retta al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Le rette r ed r' fanno parte della famiglia di rette individuata da (5.6), per $\mu = 0$ si ottiene la retta r e per $\lambda = 0$ si perviene alla retta r' .
3. I parametri λ e μ considerati sono omogenei, nel senso che è sufficiente assegnare il loro rapporto per individuare la stessa retta, per esempio le coppie $\lambda = 1, \mu = 2$ e $\lambda = 2, \mu = 4$ (insieme con infinite altre dello stesso tipo) danno luogo alla stessa retta.
4. Il punto P_0 appartiene a tutte le rette descritte da (5.6), infatti le sue coordinate (x_0, y_0) verificano le equazioni di r e di r' e, di conseguenza, verificano (5.6).
5. (5.6) individua tutte le rette del piano passanti per P_0 ; sia, infatti $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto del piano diverso da P_0 . Sostituendo le sue coordinate in (5.6) si perviene ad un'equazione del tipo $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$, dove $\alpha = ax_1 + by_1 + c$ e $\beta = a'x_1 + b'y_1 + c'$, da cui si ricava, per esempio, $\lambda = \beta, \mu = -\alpha$ che sostituiti in (5.6) danno luogo all'equazione della retta passante per P_0 e P_1 .

Esercizio 5.7 Dato il fascio proprio di rette:

$$\lambda(x - 2y - 2) + \mu(x + y) = 0 \quad (5.7)$$

individuare:

1. il centro del fascio;
2. la retta del fascio passante per il punto $A = (0, -7)$;
3. la retta del fascio perpendicolare alla retta di equazione: $x + y + 1 = 0$.

Soluzione

1. Il centro del fascio è il punto C di intersezione delle rette di equazione $x - 2y - 2 = 0$ e $x + y = 0$, ha coordinate $C = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
2. Nell'equazione (5.7) si impone il passaggio per A , ottenendo: $12\lambda - 7\mu = 0$, da cui si ha, per esempio: $\lambda = 7, \mu = 12$ che sostituiti in (5.7) portano alla retta di equazione $19x - 2y - 14 = 0$.

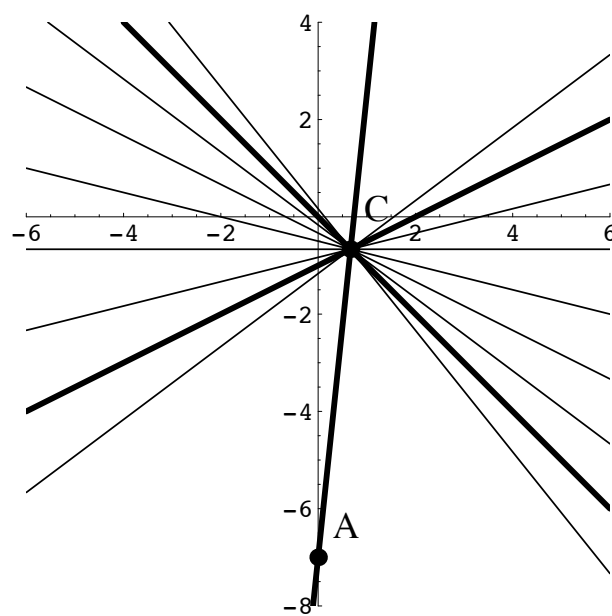


Figura 5.7: Esercizio 5.7

3. Il coefficiente angolare della generica retta del fascio è

$$m = \frac{\lambda + \mu}{2\lambda - \mu}$$

(si osservi che per $2\lambda - \mu = 0$, ossia per $\lambda = 1$, $\mu = 2$ si ha la retta $3x - 2 = 0$ parallela all'asse y). Imponendo la perpendicolarità alla retta $x + y + 1 = 0$ si ha

$$\frac{\lambda + \mu}{2\lambda - \mu} = 1$$

da cui $\lambda = 2$, $\mu = 1$ che portano alla retta del fascio di equazione: $3x - 3y - 4 = 0$.

Capitolo 6

La Circonferenza nel Piano

In questo capitolo si considera la circonferenza nel piano e si studiano le posizioni reciproche tra circonferenza e retta e tra circonferenze. Successivamente, così come si è già visto per i fasci di rette, si introducono e si esaminano i fasci di circonferenze.

Definizione 6.1 *Fissati un punto C e una costante positiva r , la circonferenza del piano, di centro C e raggio r , è il luogo dei punti P del piano tali che:*

$$d(P, C) = r.$$

Se $r = 0$, allora la circonferenza si riduce ad un punto che coincide con il centro.

Da 4.1 si ha:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

che rappresenta l'equazione della circonferenza di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio r . Tale equazione può essere riscritta come:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

con $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Si osservi che l'equazione della circonferenza è di secondo grado in x e in y , il coefficiente del termine xy è nullo e i coefficienti dei termini x^2 e y^2 sono uguali. Viceversa, un'equazione dello stesso tipo, vale a dire:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

non sempre rappresenta una circonferenza nel piano. Infatti, per confronto il centro C ha coordinate

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right)$$

e il raggio è dato da

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}},$$

pertanto l'equazione (6.1) rappresenta una circonferenza reale solo se $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$.

Esercizio 6.1 Determinare il centro e il raggio delle circonferenze:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 4x + 6y &= 0, \\ \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 30 &= 0. \end{aligned}$$

Soluzione In $\mathcal{C}_1$ il centro è $C = (-2, -3)$. Poichè la circonferenza passa per l'origine (Perchè?) il raggio può essere determinato calcolando la distanza del centro dall'origine, quindi: $r = d(C, O) = \sqrt{13}$.

In $\mathcal{C}_2$ il centro è $C = (-2, -3)$, la circonferenza non è reale perchè $16 + 36 - 120 < 0$.

6.1 Posizione reciproca tra una retta e una circonferenza

La posizione reciproca tra una retta a e una circonferenza di centro C e raggio r si determina calcolando la distanza dal centro della circonferenza alla retta e confrontandola con il raggio della circonferenza stessa. Si presentano tre possibilità:

1. $d(C, a) > r$. La retta è esterna alla circonferenza.
2. $d(C, a) = r$. La retta è tangente alla circonferenza.
3. $d(C, a) < r$. La retta incontra la circonferenza in due punti.

Esercizio 6.2 Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta $a : x - 2y + k = 0$ è secante, tangente o esterna alla circonferenza:

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0.$$

Soluzione Il centro della circonferenza è $C = (1, -1)$ e il raggio è $r = 2$. La distanza del centro dalla retta è:

$$d(C, a) = \frac{|k + 3|}{\sqrt{5}},$$

da cui si deduce che a è esterna alla circonferenza se $k < -3 - 2\sqrt{5}$ e $k > -3 + 2\sqrt{5}$.
 a è tangente alla circonferenza se $k = \pm 2\sqrt{5} - 3$ e a è secante la circonferenza se $-3 - 2\sqrt{5} < k < -3 + 2\sqrt{5}$.

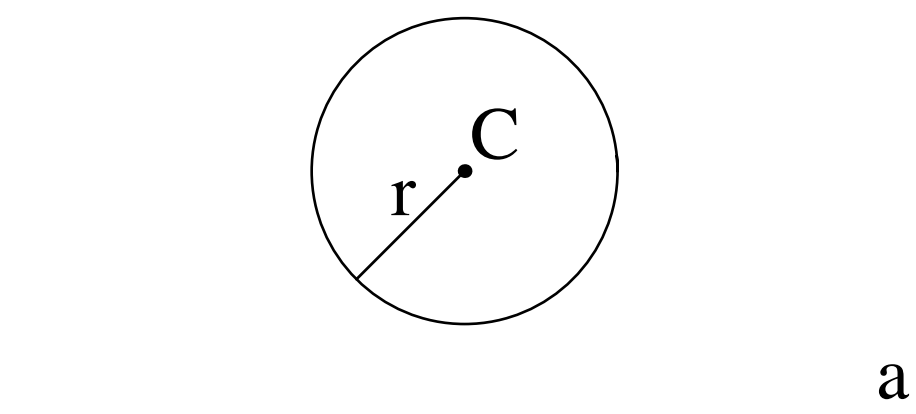


Figura 6.1: Retta Esterna ad una Circonferenza

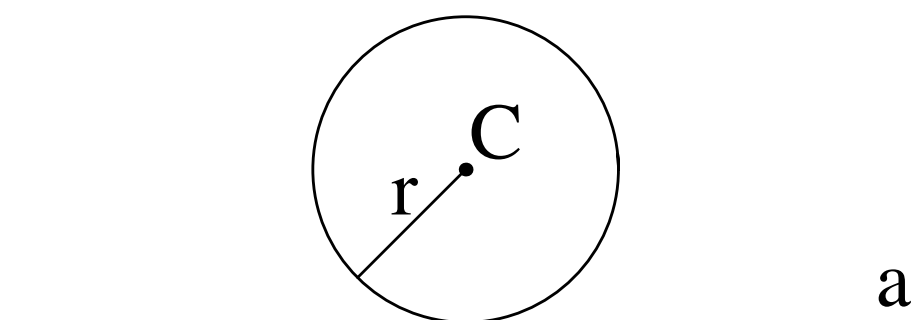


Figura 6.2: Retta Tangente ad una Circonferenza

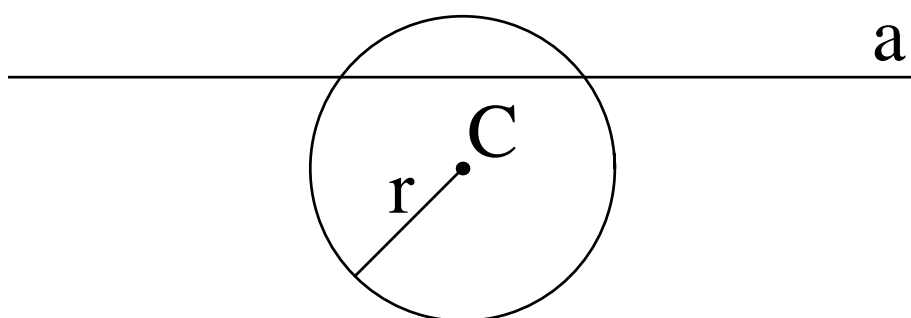


Figura 6.3: Retta Incidente una Circonferenza

6.2 Retta tangente ad una circonferenza in un suo punto

Data una circonferenza di centro C e raggio r , per determinare la retta tangente a tale circonferenza in un punto P_0 è sufficiente scrivere l'equazione della retta passante per P_0 e perpendicolare alla retta CP_0 .

Esempio 6.1 Determinare l'equazione della retta tangente alla circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$$

nel punto $P_0 = (-6, 4)$.

Soluzione Il centro della circonferenza data è $C = (-3, 2)$, la retta passante per P_0 e per C ha equazione: $y = -\frac{2}{3}x$. La retta richiesta ha coefficiente angolare $\frac{3}{2}$ e passa per P_0 , quindi ha equazione:

$$y = \frac{3}{2}x + 13.$$

6.3 Posizione reciproca di due circonferenze

La posizione reciproca di due circonferenze si discute confrontando la distanza tra i loro centri C e C' e la somma e/o la differenza tra i loro raggi r e r' . Si lascia per esercizio la discussione dettagliata dei casi che si presentano.

Esercizio 6.3 Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti: $A = (2, 3)$, $B = (4, 1)$, $D = (2, -1)$.

Soluzione È ben noto che tre punti non allineati individuano una sola circonferenza. Si lascia per esercizio la verifica che i punti A, B, D non sono allineati. Per individuare l'equazione della circonferenza si può procedere in due modi. Il centro C è il circocentro (il punto di incontro degli assi dei lati) del triangolo ABD , quindi se ne possono individuare le coordinate intersecando, per esempio l'asse del segmento AB con l'asse del segmento AD . Il raggio è la distanza, per esempio, da C a B . Altrimenti, si possono sostituire in (6.1) le coordinate dei punti dati e risolvere il sistema lineare così ottenuto:

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = -13 \\ 4a + b + c = -17 \\ 2a - b + c = -5. \end{cases}$$

La circonferenza richiesta ha equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

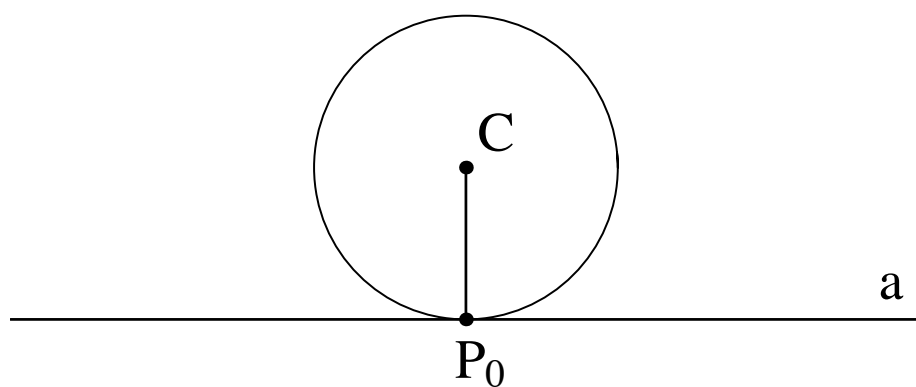


Figura 6.4: Retta Tangente ad una Circonferenza in un suo Punto

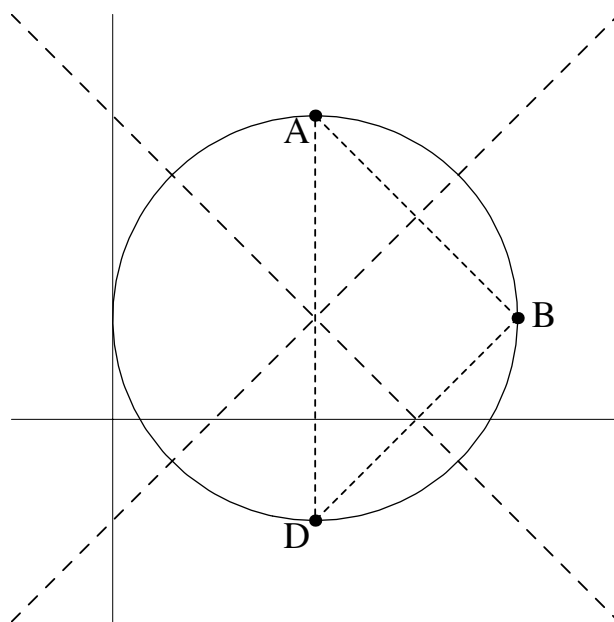


Figura 6.5: Esercizio 6.3

6.4 Fasci di circonferenze

Date le due circonferenze:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1 &= 0, \\ \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2 &= 0, \end{aligned}$$

la loro combinazione lineare:

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1) + \mu(x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2) = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

rappresenta il fascio di circonferenze individuato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, come sarà di seguito spiegato. Si osservi che i parametri λ e μ sono omogenei, vale a dire è sufficiente individuare il loro rapporto per ottenere un solo elemento del fascio. Si osservi, inoltre, che per $\lambda = 0$ si ha $\mathcal{C}_2$ e per $\mu = 0$ si ottiene $\mathcal{C}_1$, per questo motivo si debbono usare sia λ sia μ .

Da (6.2) si ha:

$$(\lambda + \mu)x^2 + (\lambda + \mu)y^2 - 2(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)x - 2(\lambda\beta_1 + \mu\beta_2)y + (\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) = 0 \quad (6.3)$$

da cui appare evidente la necessità di distinguere due casi:

1) $\lambda + \mu = 0$;

2) $\lambda + \mu \neq 0$.

1) $\lambda + \mu = 0$ per esempio: $\lambda = -1, \mu = 1$; (6.3) diventa:

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)x + 2(\beta_1 - \beta_2)y - \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

che è una retta, l'asse *radicale*, di coefficiente angolare:

$$m = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}.$$

La retta passante per i centri $C_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ e $C_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ delle circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ha coefficiente angolare:

$$m' = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Tale retta prende il nome di *asse centrale*. Si verifica che $mm' = -1$, quindi l'asse radicale è perpendicolare all'asse centrale.

2) $\lambda + \mu \neq 0$, (6.3) diventa:

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2}{\lambda + \mu} x - 2 \frac{\lambda\beta_1 + \mu\beta_2}{\lambda + \mu} y + \frac{\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2}{\lambda + \mu} = 0$$

che rappresenta infinite circonferenze del fascio, con centro:

$$C_{\lambda,\mu} = \left(\frac{\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda\beta_1 + \mu\beta_2}{\lambda + \mu} \right). \quad (6.4)$$

Si tratta di circonferenze reali se il raggio è positivo o nullo, altrimenti sono immaginarie.

Elenchiamo alcune proprietà di facile verifica:

1. i centri di tutte le circonferenze del fascio appartengono all'asse centrale.
2. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto comune a C_1 e a C_2 , allora P_0 verifica (6.2), quindi è un punto comune a tutti gli elementi del fascio.
3. Il fascio di circonferenze *riempie* il piano nel senso che dato un generico punto $P_1 = (x_1, y_1)$ del piano è possibile individuare un elemento del fascio passante per P_1 , infatti è sufficiente sostituire le coordinate di P_1 in (6.2) e calcolare il valore dei parametri λ e μ .

Esaminiamo le proprietà precedenti in riferimento alla posizione delle circonferenze C_1 e C_2 . Si presentano tre casi:

- 1) C_1 e C_2 si incontrano in due punti P_1 e P_2 . L'asse radicale e ogni altra circonferenza del fascio passano per P_1 e P_2 . La situazione geometrica è illustrata nella Figura 6.6.
- 2) C_1 e C_2 si incontrano in un punto P . L'asse radicale è la retta tangente ad entrambe le circonferenze e ad ogni altra circonferenza del fascio in P . La situazione geometrica è illustrata nella Figura 6.7.
- 3) C_1 e C_2 non hanno punti comuni. Nessun elemento del fascio ha punti in comune con un altro elemento del fascio. La situazione geometrica è illustrata nella Figura 6.8.

I fasci di circonferenze sono utili (ma non indispensabili) per risolvere alcuni esercizi. Per esempio.

Esercizio 6.4 Determinare l'equazione della circonferenza avente centro sulla retta $r : 2x - y = 0$ e tangente nel punto $A = (-2, 0)$ alla retta $t : 3x - 2y + 6 = 0$.

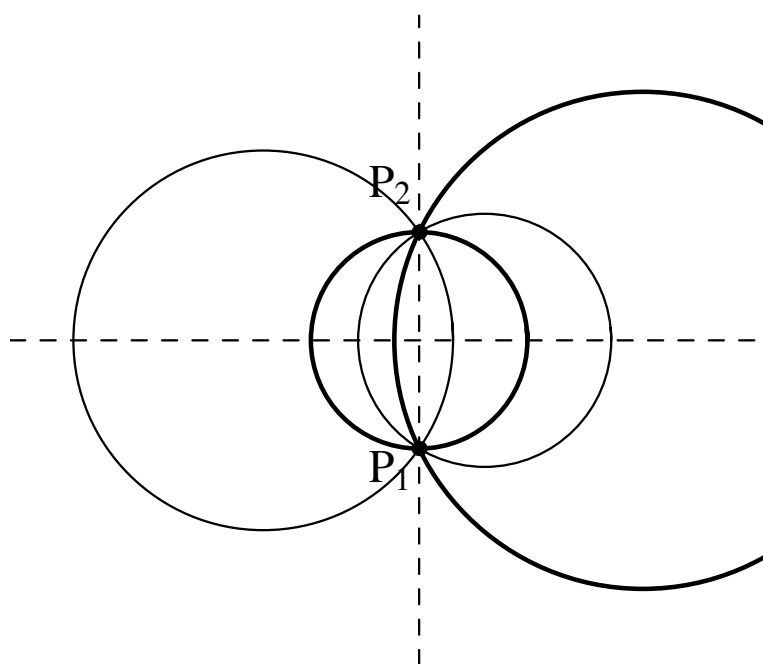


Figura 6.6: Fascio di Circonferenze aventi due punti in comune

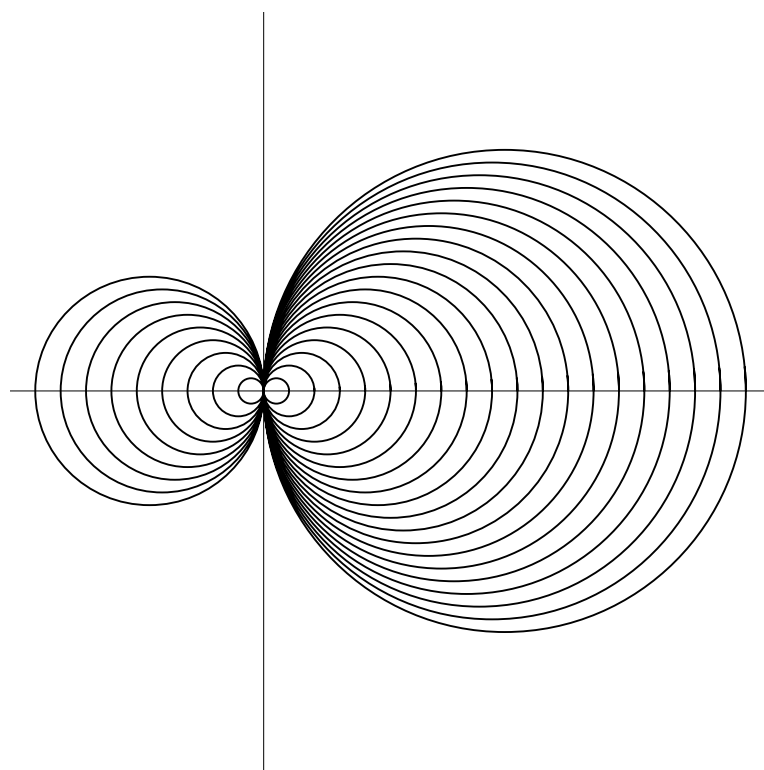


Figura 6.7: Fascio di Circonferenze aventi un punto in comune

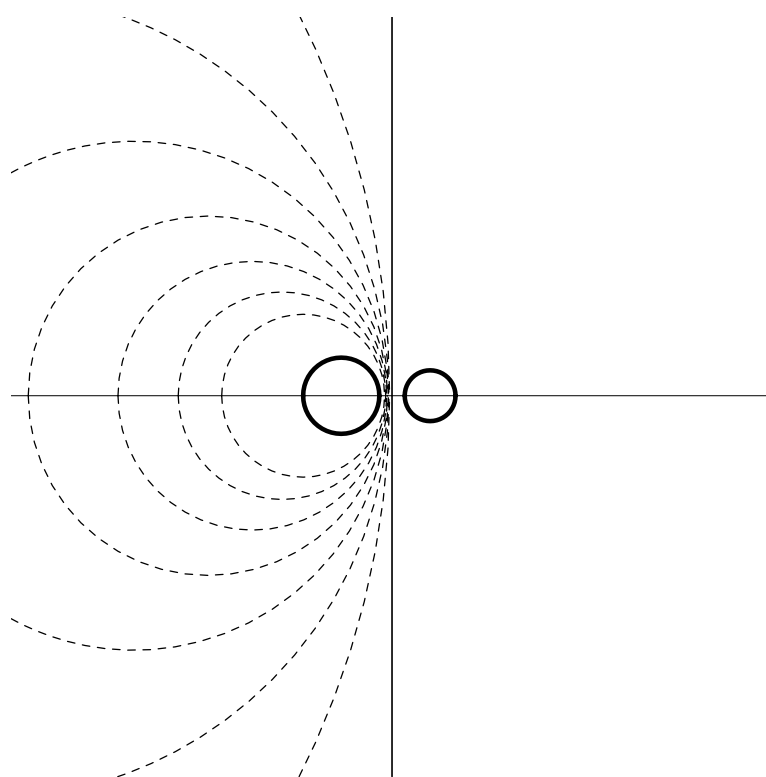


Figura 6.8: Fascio di Circonferenze che non si intersecano

Soluzione La circonferenza richiesta è un elemento del fascio individuato dalla retta t (l'asse radicale) e dalla circonferenza di centro A e raggio 0. Ossia:

$$\lambda[(x+2)^2 + y^2] + \mu(3x - 2y + 6) = 0$$

vale a dire:

$$x^2 + y^2 + \frac{4\lambda + 3\mu}{\lambda}x - \frac{2\mu}{\lambda}y + 4 + \frac{6\mu}{\lambda} = 0.$$

Il centro della generica circonferenza del fascio ha coordinate:

$$C = \left(-\frac{4\lambda + 3\mu}{2\lambda}, \frac{\mu}{\lambda} \right)$$

che, sostituite nell'equazione di r , danno: $\lambda + \mu = 0$. Scegliendo, per esempio, $\lambda = 1$ e $\mu = -1$ si ha che la circonferenza richiesta ha equazione:

$$x^2 + y^2 + x + 2y - 2 = 0.$$

Esercizio 6.5 Determinare la circonferenza passante per i punti $A = (-3, -2)$ e $B = (1, -1)$ sapendo che l'ascissa del centro è -1 .

Soluzione La circonferenza richiesta può essere vista come elemento del fascio individuato dalla retta AB (l'asse radicale) e dalla circonferenza di centro il punto medio tra A e B e diametro AB . La retta AB ha equazione: $x - 4y - 5 = 0$. Il punto medio tra A e B è $M = \left(-1, -\frac{3}{2} \right)$, la distanza tra A e B è $\sqrt{17}$, quindi il fascio considerato ha equazione:

$$\lambda(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1) + \mu(x - 4y - 5) = 0;$$

il centro della generica circonferenza del fascio ha coordinate:

$$C = \left(-\frac{2\lambda + \mu}{2\lambda}, -\frac{3\lambda - 4\mu}{2\lambda} \right).$$

Imponendo $-\frac{2\lambda + \mu}{2\lambda} = -1$ segue: $\mu = 0$, quindi la circonferenza richiesta è:

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0.$$

Capitolo 7

Le Coniche: definizione e proprietà focali

Introduciamo, in questo capitolo, alcune curve notevoli del piano: l'ellisse, l'iperbole e la parabola, tutte appartenenti alla famiglia delle coniche, come sarà meglio spiegato nel capitolo successivo.

7.1 L'ellisse

Definizione 7.1 *Fissati due punti F e F' del piano, l'ellisse è il luogo dei punti P tali che:*

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a,$$

dove a è una costante positiva tale che $2a > d(F, F')$.

I punti F e F' prendono il nome di *fuochi*. La situazione geometrica è ben rappresentata nella Figura 7.1

Per ricavare l'equazione dell'ellisse si sceglie un opportuno sistema di riferimento ponendo l'origine nel punto medio tra F e F' e l'asse x passante per F ed F' , le coordinate dei fuochi sono: $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$. È chiaro che $2c < 2a$, quindi $\frac{c}{a} < 1$, la quantità c/a prende il nome di *eccentricità*. Le rette di equazioni $x = \pm \frac{a}{e}$ prendono il nome di *direttrici*, il loro significato geometrico verrà spiegato nel capitolo seguente.

Se il generico punto P ha coordinate (x, y) , il luogo richiesto ha equazione:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

elevando due volte al quadrato si ha:

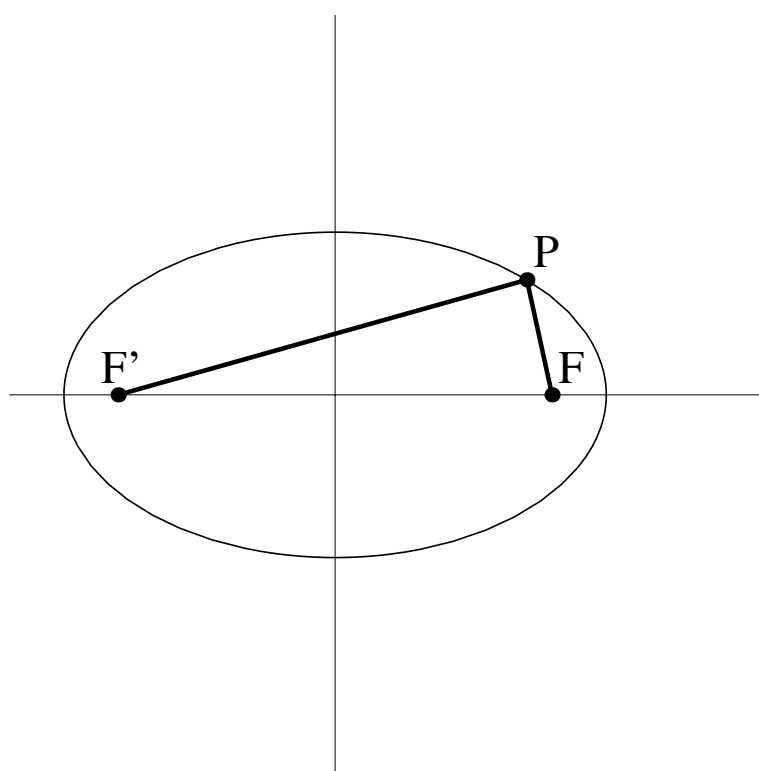


Figura 7.1: L'Ellisse come Luogo di Punti

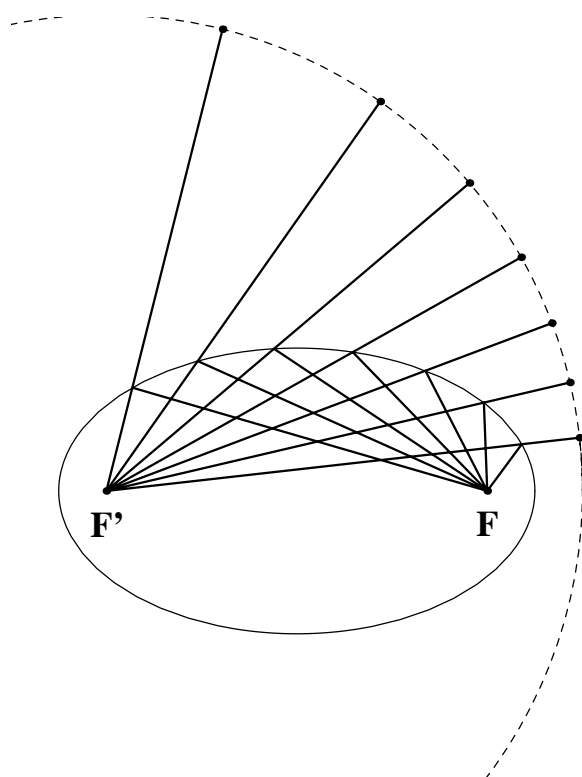


Figura 7.2: L'Ellisse e i suoi Fuochi

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Posto $b^2 = a^2 - c^2$, si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.1)$$

che è l'equazione dell'ellisse **in forma canonica**, vale a dire rispetto ad un riferimento cartesiano opportunamente scelto.

La curva incontra l'asse x nei punti $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$ e l'asse y nei punti $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$, questi quattro punti prendono il nome di *vertici* dell'ellisse; l'origine ne è il *centro*.

Dall'equazione si deduce che si tratta di una curva simmetrica rispetto all'asse x , all'asse y e all'origine, è pertanto sufficiente studiare la sua equazione nel primo quadrante. Da (7.1) si ha:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2 - y^2}{b^2}$$

quindi $|y| \leq b$, analogamente si ottiene $|x| \leq a$. Il grafico è, quindi, compreso nel rettangolo delimitato dalle rette $x = \pm a$ e $y = \pm b$. Poiché

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2},$$

se l'ascissa del punto P , che descrive la curva, aumenta di valore, allora la sua ordinata y diminuisce. Si osservi che se $a = b$, allora $c = 0$ e l'ellisse diventa una circonferenza.

Esercizio 7.1 Determinare il centro, i fuochi e i vertici delle seguenti ellissi:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 : 3x^2 + 8y^2 &= 12 \\ \mathcal{E}_2 : 18x^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

i cui grafici sono rappresentati nelle Figure 7.3 e 7.4.

$\mathcal{E}_1$ si può scrivere come:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

da cui segue che il centro è l'origine, i vertici sono:

$$A = (2, 0), \quad A' = (-2, 0), \quad B = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \quad B' = \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

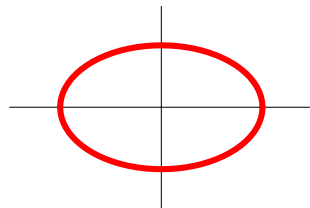


Figura 7.3: Esercizio 7.1, $\mathcal{E}_1$

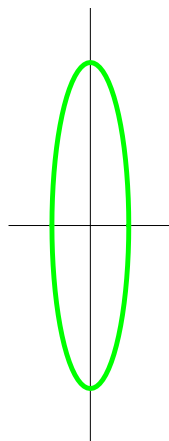


Figura 7.4: Esercizio n. 7.1, $\mathcal{E}_2$

Poichè $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{5}{2}$, i fuochi hanno coordinate:

$$F = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 0 \right), \quad F' = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0 \right).$$

$\mathcal{E}_2$ si può scrivere come:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (7.2)$$

da cui segue che il centro è l'origine, ma i fuochi sono sull'asse y essendo $9 > \frac{1}{2}$. I vertici sono:

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad A' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad B = (0, 3), \quad B' = (0, -3).$$

Poiché $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - \frac{1}{2}$, i fuochi hanno coordinate:

$$F = \left(0, \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \right), \quad F' = \left(0, -\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \right).$$

Si osservi che l'equazione (7.2) non è in forma canonica, per questo scopo è necessario effettuare una rotazione degli assi di 90° , in senso antiorario, vale a dire porre:

$$\begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases}$$

e, nel riferimento $\mathcal{R}' = (O, X, Y)$, l'equazione (7.2) assume la forma canonica:

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Si può dimostrare il seguente:

Teorema 7.1 *La retta tangente ad un'ellisse, di fuochi F ed F' , in un suo punto P , è la bisettrice delle rette PF e PF' .*

La situazione descritta è illustrata nella Figura 7.5.

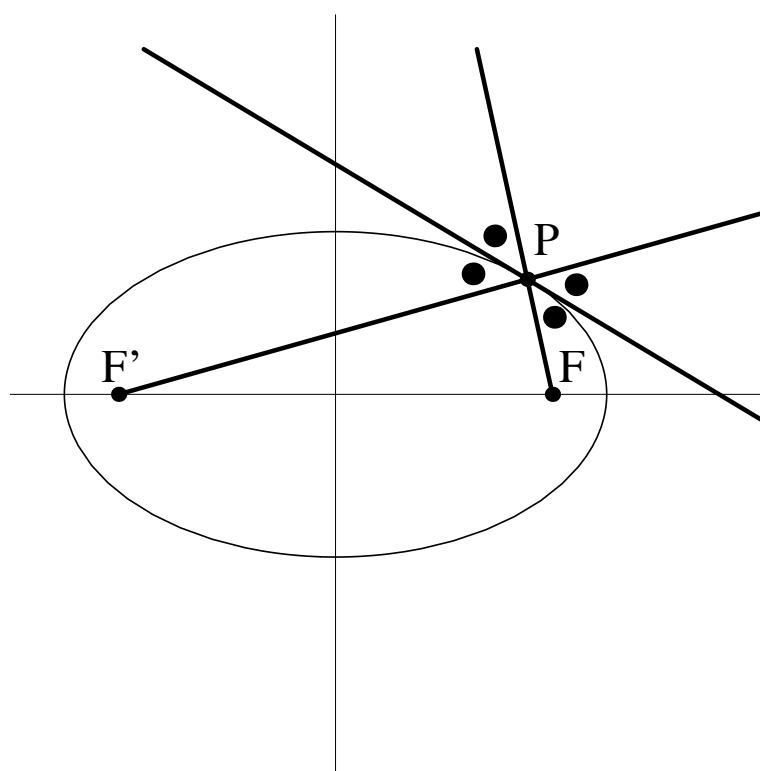


Figura 7.5: Tangente all'Ellisse

7.2 L'iperbole

Definizione 7.2 Fissati due punti F e F' del piano, l'iperbole è il luogo dei punti P tali che:

$$d(P, F) - d(P, F') = 2a, \quad (7.3)$$

oppure:

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a, \quad (7.4)$$

dove a è una costante positiva tale che $2a < d(F, F')$.

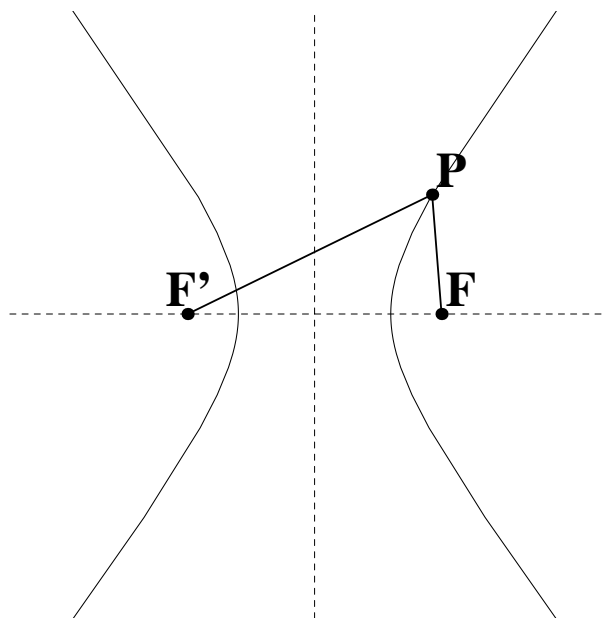


Figura 7.6: L'Iperbole come Luogo Geometrico

I punti F e F' prendono il nome di *fuochi*. La situazione geometrica è ben rappresentata nella Figura 7.7.

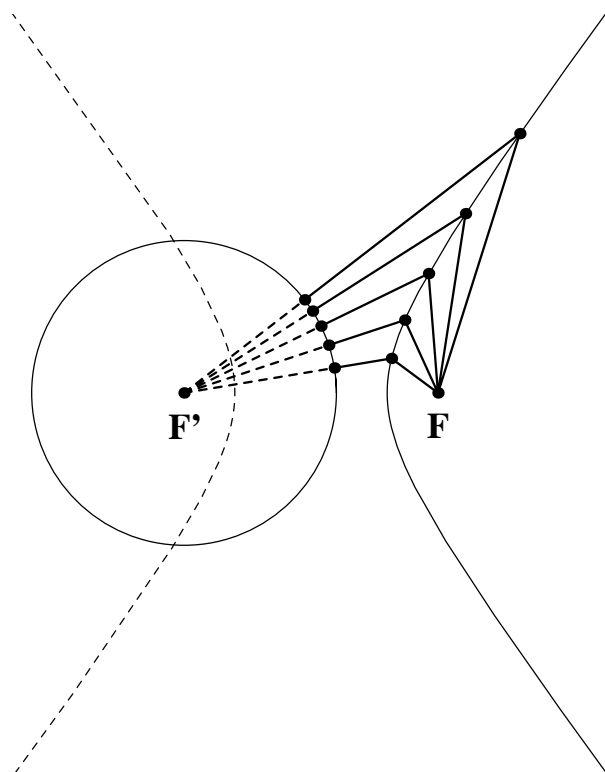


Figura 7.7: L'Iperbole e i suoi Fuochi

Segue, dal procedimento per determinare l'equazione dell'iperbole, che (7.3) e (7.4) sono equivalenti.

Come nel caso dell'ellisse, si sceglie un opportuno riferimento cartesiano avente l'origine nel punto medio tra F ed F' e l'asse x passante per F ed F' . Si pone $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$. Se il generico punto P che descrive il luogo di punti considerato ha coordinate (x, y) , (7.3) diventa:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \quad (7.5)$$

Elevando due volte al quadrato si perviene a:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Poiché $c^2 > a^2$, si pone $b^2 = c^2 - a^2$, sostituendo nell'equazione precedente si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7.6)$$

che è l'equazione dell'iperbole in *forma canonica*. La quantità $\frac{c}{a} > 1$ prende il nome di *eccentricità*. Le rette di equazioni

$$x = \pm \frac{a}{e}$$

prendono il nome di *direttrici*, il loro significato geometrico verrà spiegato nel capitolo seguente.

L'equazione (7.6) rappresenta una curva simmetrica rispetto all'asse x , all'asse y e all'origine del riferimento. La curva incontra l'asse x nei punti $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, i *vertici* dell'iperbole, non ha punti di intersezione con l'asse y . Da

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2},$$

ossia

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

segue che $|x| \geq a$, quindi non vi sono punti della curva compresi tra le rette $x = \pm a$. Inoltre, tali rette intersecano la curva in due punti coincidenti, i vertici, quindi sono rette tangenti alla curva. Da

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

segue che il valore dell'ordinata (in valore assoluto) aumenta all'aumentare del valore dell'ascissa (in valore assoluto). La curva è così divisa in due parti (simmetriche rispetto all'asse y) che prendono il nome di *rami* dell'iperbole.

Studiamo l'intersezione della curva con una generica retta passante per l'origine, quindi studiamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx, \end{cases}$$

al variare di m in $\mathbb{R}$. Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}$$

da cui segue che l'esistenza delle soluzioni dipende dal radicando $b^2 - a^2m^2$. Si distinguono i seguenti casi:

1. Se $|m| < \frac{b}{a}$, le rette incontrano la curva in due punti distinti.
2. Se $|m| > \frac{b}{a}$ le rette non intersecano la curva.
3. Le rette:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

costituiscono un caso “limite” tra le due situazioni descritte. Tali rette prendono il nome di *asintoti*. Per meglio descrivere il comportamento della curva rispetto agli asintoti, si considerino i punti $P_0 = (x_0, y_0)$ appartenente all'asintoto e $P_1 = (x_1, y_1)$ appartenente alla curva, perciò

$$y_0 - y_1 = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Quando P_1 si allontana indefinitamente sull'iperbole, la sua ascissa x cresce sempre di più ed allora l'ultima frazione, avendo il numeratore costante e il denominatore che aumenta via via, diminuisce sempre di più. Più precisamente:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

(cfr. il corso di Analisi Matematica I per maggiori dettagli). La situazione è descritta nella Figura 7.8.

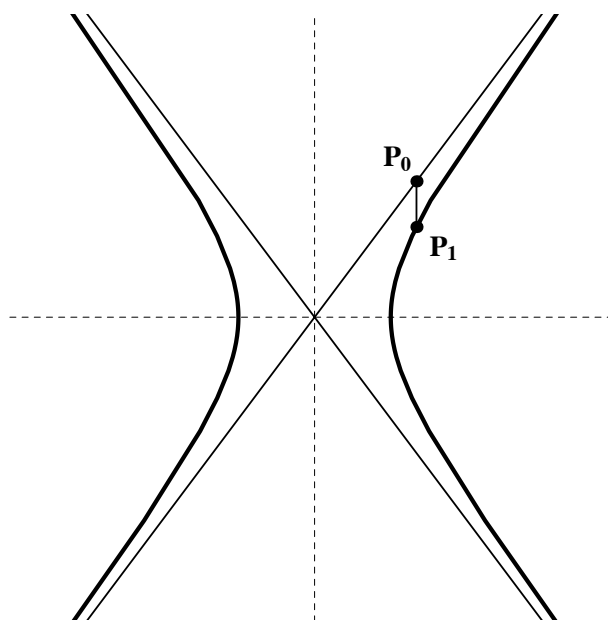


Figura 7.8: Distanza tra P_0 e P_1

7.2.1 Iperbole equilatera

Se nell'equazione (7.6) $a = b$, allora si ottiene:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

i fuochi hanno coordinate $F = (\sqrt{2}a, 0)$ e $F' = (-\sqrt{2}a, 0)$, gli asintoti hanno equazioni $y = \pm x$, ossia coincidono con le bisettrici del I e III quadrante e del II e IV quadrante e l'iperbole prende il nome di *iperbole equilatera*.

La Figura 7.9 illustra alcune iperboli equilateri, ottenute variando il parametro a , avente tutte gli stessi asintoti, ma vertici diversi. Gli asintoti, comuni a tutte le iperboli, rappresentano anche l'iperbole “degenere” di equazione $(x - y)(x + y) = 0$.

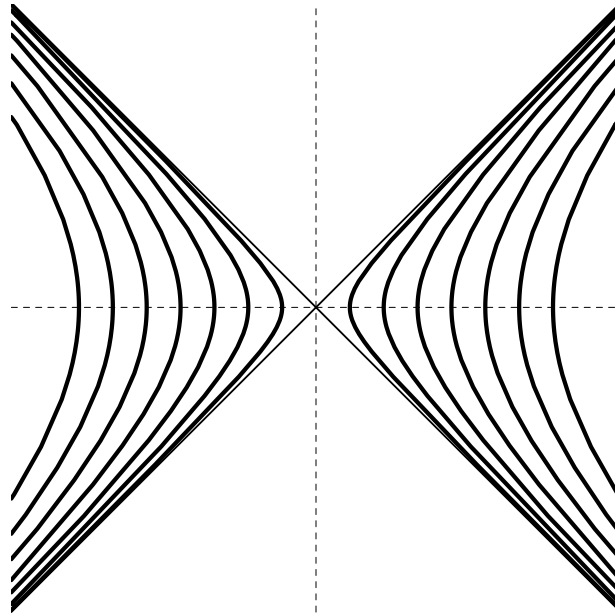


Figura 7.9: Iperboli Equilateri

Esercizio 7.2 Si calcolino i vertici, i fuochi e gli asintoti delle seguenti iperboli:

$$\mathcal{I}_1 : \frac{4}{9}x^2 - 25y^2 = 1,$$

$$\mathcal{I}_2 : 9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\mathcal{I}_3 : 4x^2 - 3y^2 = -5,$$

i cui grafici sono rappresentati nelle Figure 7.10, 7.11 e 7.12.



Figura 7.10: Esercizio 7.2, $\mathcal{I}_1$

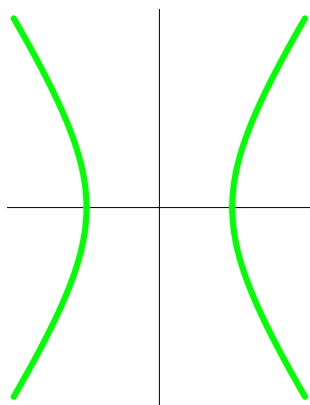
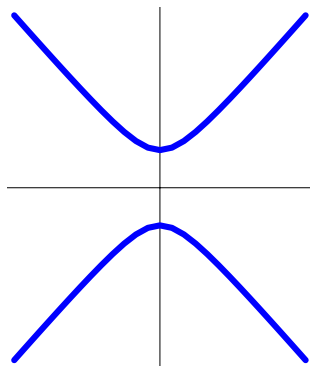


Figura 7.11: Esercizio 7.2, $\mathcal{I}_2$

$\mathcal{I}_1$: i vertici sono:

$$A = \left(\frac{3}{2}, 0\right), \quad A' = \left(-\frac{3}{2}, 0\right),$$

Figura 7.12: Esercizio 7.2, $\mathcal{I}_3$

i fuochi sono:

$$F = \left(\frac{\sqrt{229}}{10}, 0 \right), \quad F' = \left(-\frac{\sqrt{229}}{10}, 0 \right),$$

gli asintoti hanno equazioni:

$$y = \pm \frac{2}{15}x.$$

$\mathcal{I}_2$: i vertici sono: $A = (2, 0)$, $A' = (-2, 0)$; i fuochi sono: $F = (\sqrt{13}, 0)$, $F' = (-\sqrt{13}, 0)$, gli asintoti hanno equazioni:

$$y = \pm \frac{3}{2}x,$$

si osservi che, in questo caso $b > a$, come si può rilevare dal punto di vista grafico.

$\mathcal{I}_3$: l'equazione diventa:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} =;$$

analogamente al caso dell'esercizio 7.1, per trovare la forma canonica è necessario effettuare un cambiamento di riferimento del tipo:

$$\begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases}$$

Nel riferimento di partenza i vertici sono:

$$A = \left(0, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right), \quad A' = \left(0, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$$

i fuochi sono:

$$F = \left(0, \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{12}}\right), \quad F' = \left(0, -\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{12}}\right)$$

e gli asintoti hanno equazioni:

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} y.$$

7.2.2 Iperbole riferita agli asintoti

Si vuole studiare il caso particolare dell'iperbole equilatera e scrivere la sua equazione nel riferimento avente come assi gli asintoti. Si potrà procedere con tecniche opportune che saranno insegnate nel Corso di Geometria e Algebra Lineare I, altrimenti si può usare un approccio più elementare.

Se si immagina che gli asintoti coincidano con gli assi cartesiani, i fuochi dell'iperbole diventano i punti della retta $y = x$ di coordinate $F = (a, a)$, $F' = (-a, -a)$, infatti, per il teorema di Pitagora, la loro distanza dall'origine è $c = \sqrt{2}a$. Si ripetono i calcoli descritti a partire da (7.5) in questo caso, e precisamente (7.5) diventa:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = 2a.$$

Elevando due volte al quadrato si ottiene l'equazione:

$$xy = \frac{a^2}{2}, \tag{7.7}$$

che risponde al problema posto. Si osservi che questa rappresentazione permette di dimostrare più agevolmente il comportamento dell'asintoto (l'asse x per esempio) rispetto alla curva. Infatti se $P_1 = (x, y)$ è un punto della curva e $P_0 = (x, 0)$ è il punto dell'asse x di uguale ascissa, allora è evidente che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a^2}{2x} = 0.$$

Al variare di a in (7.7) si hanno iperboli con rami nel primo e terzo quadrante, i cui asintoti sono gli assi cartesiani, con i vertici che variano sulla bisettrice $y = x$.

La curva:

$$xy = 0$$

rappresenta la conica degenera prodotto degli assi cartesiani, invece la famiglia di curve (ottenute al variare di a)

$$xy = -\frac{a^2}{2}$$

si può ottenere con lo stesso procedimento appena descritto, dopo aver effettuato il cambiamento di riferimento:

$$\begin{cases} x = -Y \\ y = X; \end{cases}$$

di conseguenza, nel riferimento originale, i rami della curva si trovano nel secondo e quarto quadrante e i vertici variano sulla bisettrice $y = -x$. Le situazioni descritte sono illustrate nelle Figure 7.13 e 7.14.

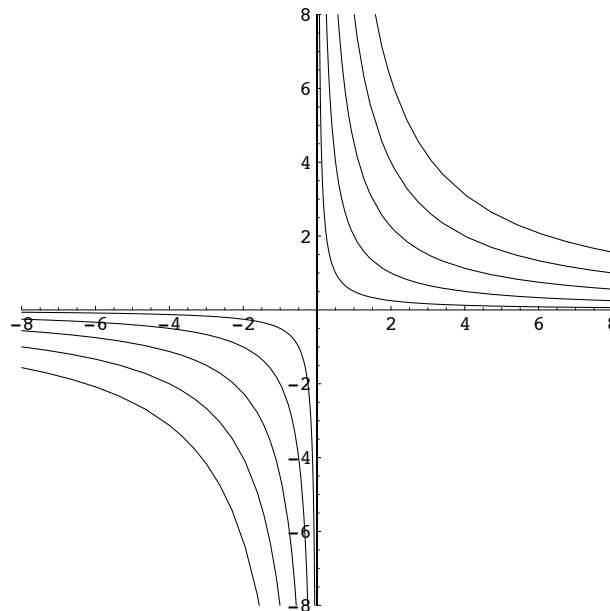


Figura 7.13: Iperboli Equilatera riferite agli Asintoti

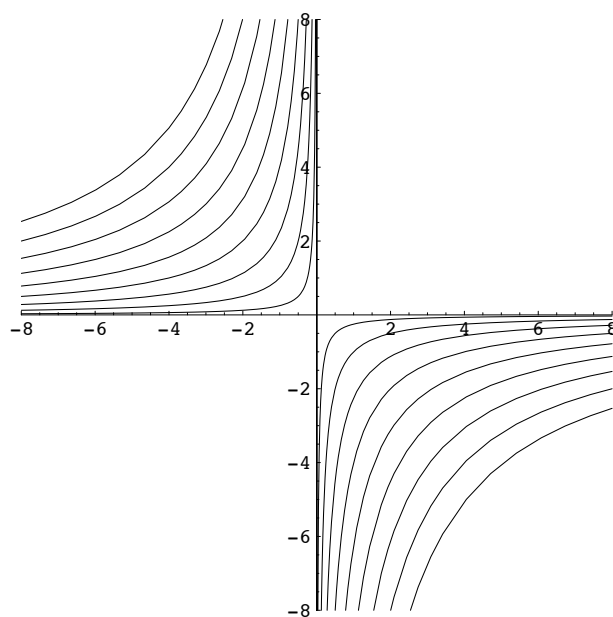


Figura 7.14: Iperboli Equilateri riferite agli Asintoti

Si possono dimostrare i seguenti Teoremi.

Teorema 7.2 *Data un'iperbole di fuochi F ed F' , la tangente in un suo punto P è la bisettrice delle rette PF e PF' .*

La situazione descritta è illustrata nella Figura 7.15.

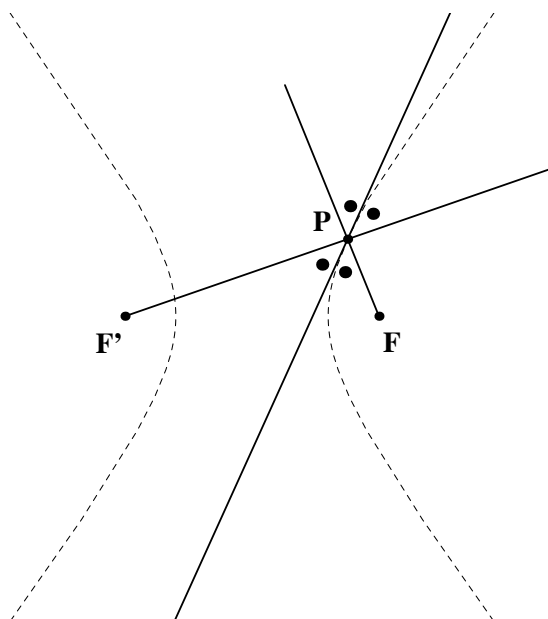


Figura 7.15: Teorema 7.2

Teorema 7.3 *Si consideri una qualsiasi retta che intersechi un ramo dell'iperbole nei punti P_1 e P_2 e gli asintoti nei punti Q_1 e Q_2 , allora i segmenti Q_1P_1 e Q_2P_2 hanno la stessa lunghezza. In particolare, la retta tangente in un punto P all'iperbole incontra gli asintoti nei punti Q_1 e Q_2 di cui P è il punto medio.*

La situazione descritta è illustrata nelle Figure 7.16 e 7.17.

Teorema 7.4 *Per ogni punto P dell'iperbole, tutti i parallelogrammi formati dagli asintoti e dalle parallele ad essi condotte da P hanno la stessa area.*

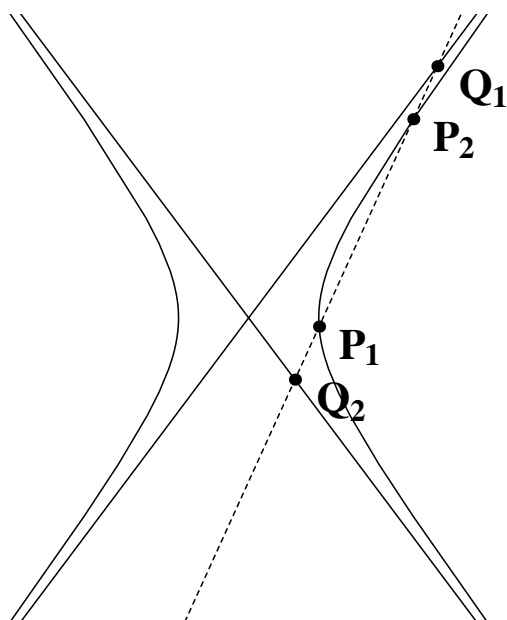


Figura 7.16: Teorema 7.3

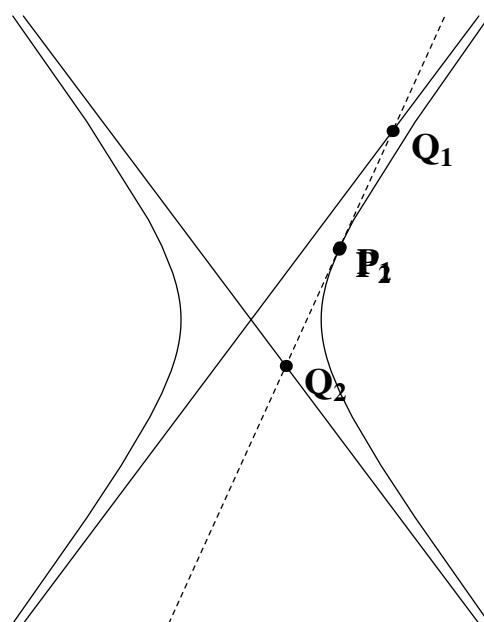


Figura 7.17: Teorema 7.3

La situazione descritta è illustrata nella Figura 7.18.

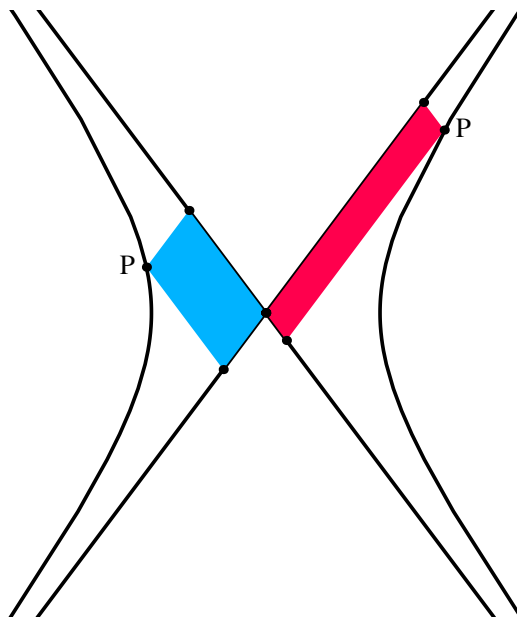


Figura 7.18: Teorema 7.4

7.3 La parabola

Definizione 7.3 *La parabola è il luogo dei punti P equidistanti da una retta f fissata e da un punto F fissato.*

La retta f prende il nome di *direttrice* e il punto F è il *fuoco* della parabola.

Come nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, per ricavare l'equazione della parabola si sceglie un riferimento cartesiano opportuno. Si può procedere in due modi:

Primo Caso. Si sceglie il riferimento in modo tale che il fuoco abbia coordinate $F = (0, c)$ e la direttrice abbia equazione $y = -c$, pertanto l'origine è un punto appartenente al luogo richiesto. Imponendo che:

$$d(P, F) = d(P, f)$$

si ha:

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = |y + c|,$$

elevando al quadrato si ottiene:

$$y = ax^2, \quad (7.8)$$

dove $a = \frac{1}{4c}$. (7.8) è l'equazione della parabola in forma canonica.

Secondo Caso. Si sceglie il fuoco di coordinate $F = (c, 0)$ e la direttrice di equazione $x = -c$, procedendo come nel caso precedente si perviene a:

$$x = ay^2, \quad (7.9)$$

che è un'altra equazione in forma canonica della parabola.

Analogamente usando valori negativi per il numero c si ottengono le equazioni:

$$y = -ax^2$$

e:

$$x = -ay^2.$$

le varie situazioni geometriche sono rappresentate nelle Figure 7.19, 7.20, 7.21, 7.22.

Come già osservato, tutte le parabole considerate hanno *vertice* nell'origine. È chiaro che, tra tutti i punti della parabola, il vertice è quello avente distanza minore dal fuoco (e dalla direttrice). Per quanto riguarda lo studio del grafico, per esempio, da (7.9), si deduce che la curva è simmetrica rispetto all'asse x , le ascisse dei suoi punti sono sempre numeri positivi e l'ascissa aumenta all'aumentare (in valore assoluto) dell'ordinata.

Per capire l'andamento della curva al variare del parametro a si osservi la Figura 7.23 in cui sono riportati i grafici delle parabole di equazioni $y = \frac{1}{2}x^2$ (quella esterna), $y = x^2$, (quella centrale), $y = 2x^2$ (quella interna).

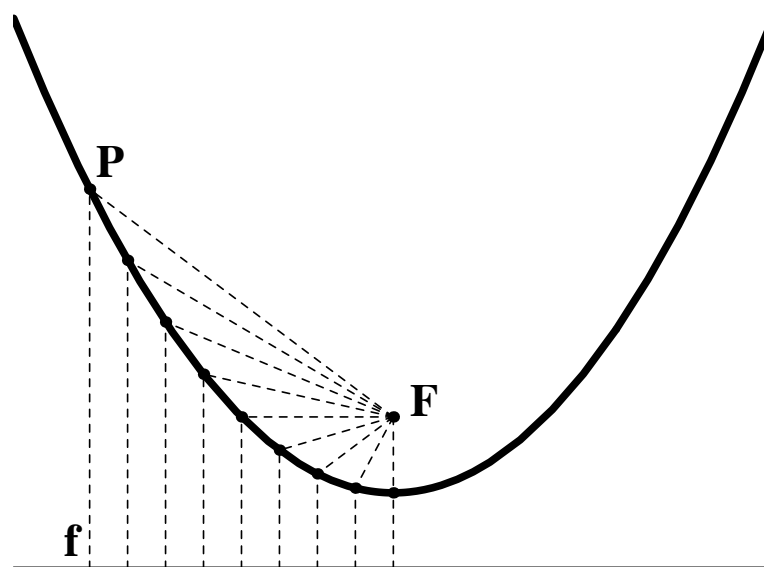


Figura 7.19: Parabola come Luogo di Punti

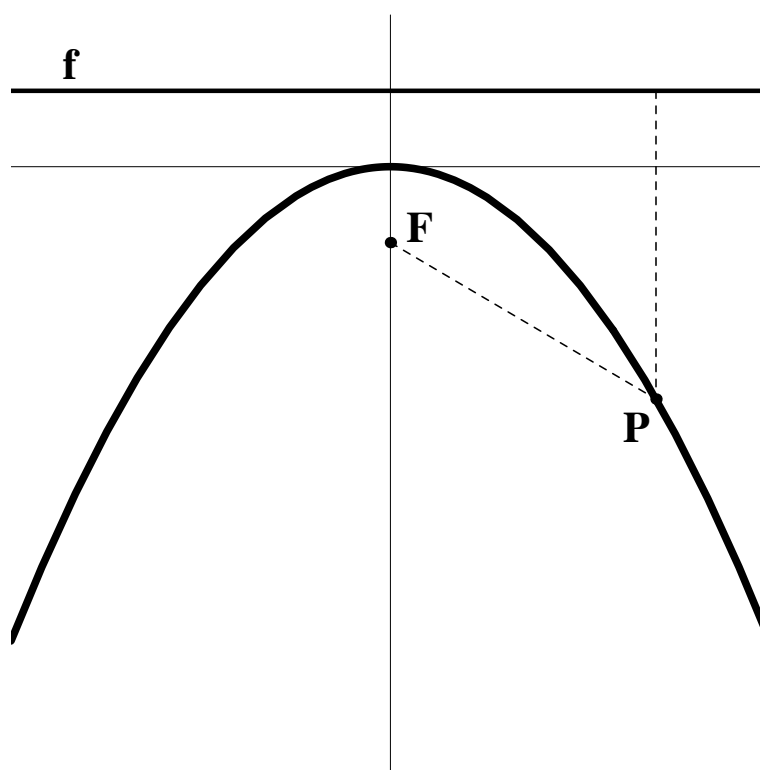


Figura 7.20: Parabola come Luogo di Punti

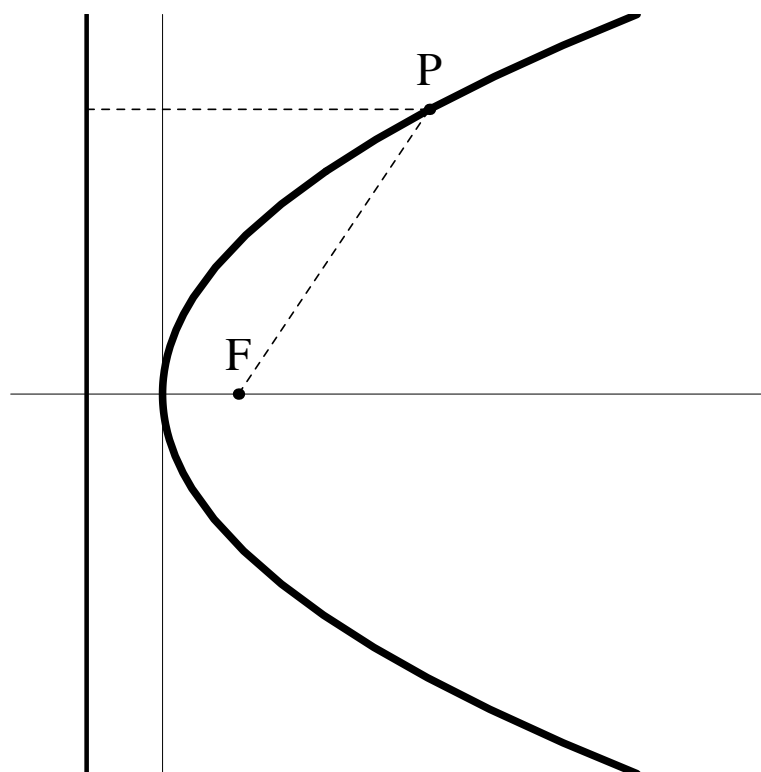


Figura 7.21: Parabola come Luogo di Punti

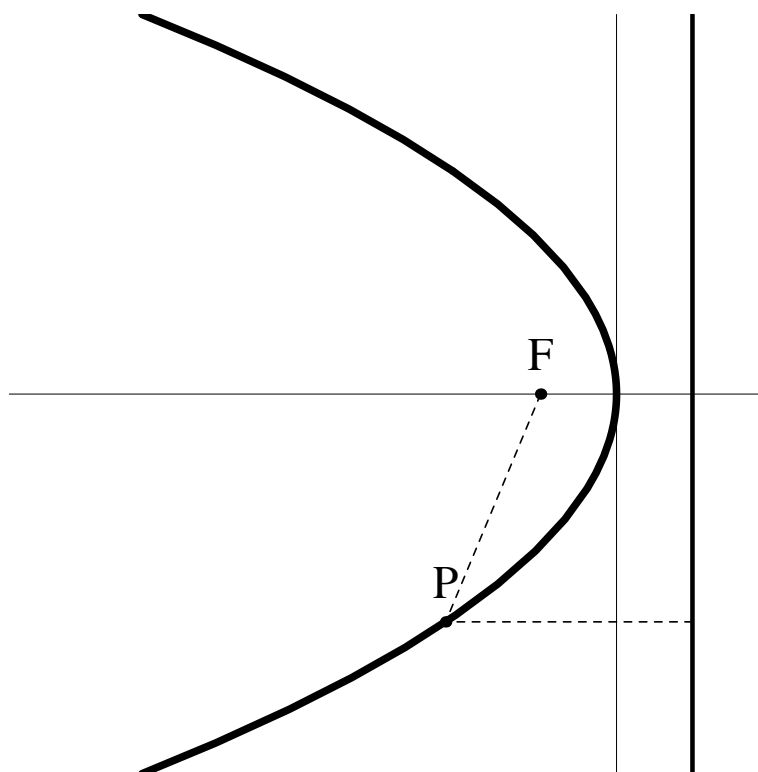


Figura 7.22: Parabola come luogo di punti

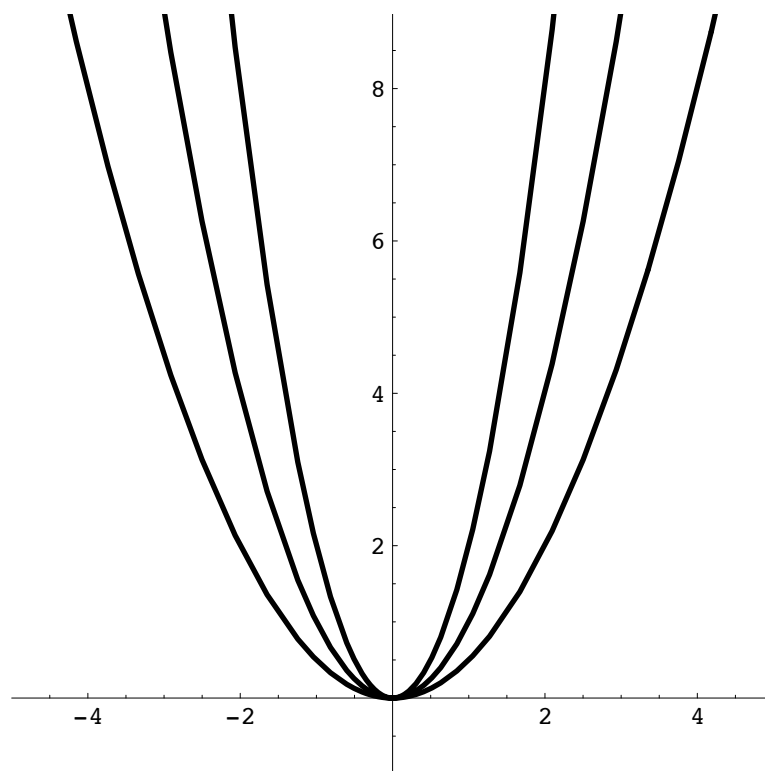


Figura 7.23: $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$

Esercizio 7.3 Determinare il vertice, il fuoco e la direttrice delle parabole:

$$\mathcal{P}_1 : 3x - 2y^2 = 0,$$

$$\mathcal{P}_2 : 2x^2 + 9y = 0,$$

che sono rappresentate nelle Figure 7.24 e 7.25.

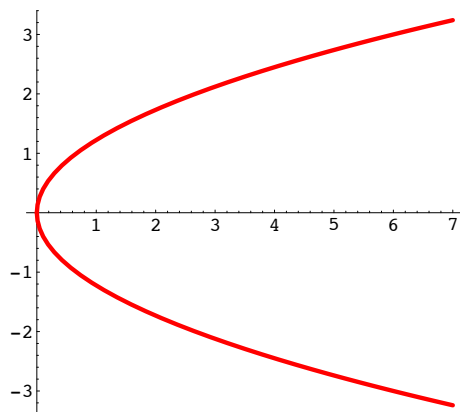


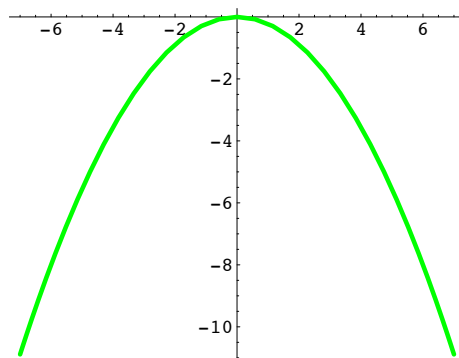
Figura 7.24: Esercizio 7.3, $\mathcal{P}_1$

Soluzione Entrambe le parabole hanno vertice nell'origine, nel caso di $\mathcal{P}_1$ il fuoco è $F = \left(\frac{3}{8}, 0\right)$ e la direttrice ha equazione $x = -\frac{3}{8}$.

Nel caso di $\mathcal{P}_2$ il fuoco è $F = \left(0, -\frac{9}{8}\right)$ e la direttrice ha equazione $y = \frac{9}{8}$.

Si può dimostrare il seguente:

Teorema 7.5 *La retta tangente alla parabola in un suo punto P è la bisettrice dell'angolo formato dalla retta passante per P e per il fuoco e dalla retta per P perpendicolare alla direttrice.*

Figura 7.25: Esercizio 7.3, $\mathcal{P}_2$

La situazione geometrica descritta è illustrata nella Figura 7.26.

Gli esercizi che seguono sono volti a studiare l'equazione di una conica non scritta in forma canonica ma in un riferimento cartesiano traslato rispetto al riferimento di partenza. Se nell'equazione (7.1) dell'ellisse in forma canonica operiamo una traslazione degli assi:

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta, \end{cases}$$

(cfr. Capitolo 4), l'equazione diventa:

$$\frac{(X + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(Y + \beta)^2}{b^2} = 1. \quad (7.10)$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene un'equazione del tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad (7.11)$$

che, rispetto alla più generale equazione di secondo grado nelle indeterminate x e y , manca del termine in xy .

Proprio per questo, se abbiamo l'equazione della conica nella forma (7.11), con il metodo del completamento dei quadrati è facile risalire alla forma (7.10), e, quindi, all'equazione iniziale che meglio consente di studiare la conica. Analogo discorso vale per l'iperbole

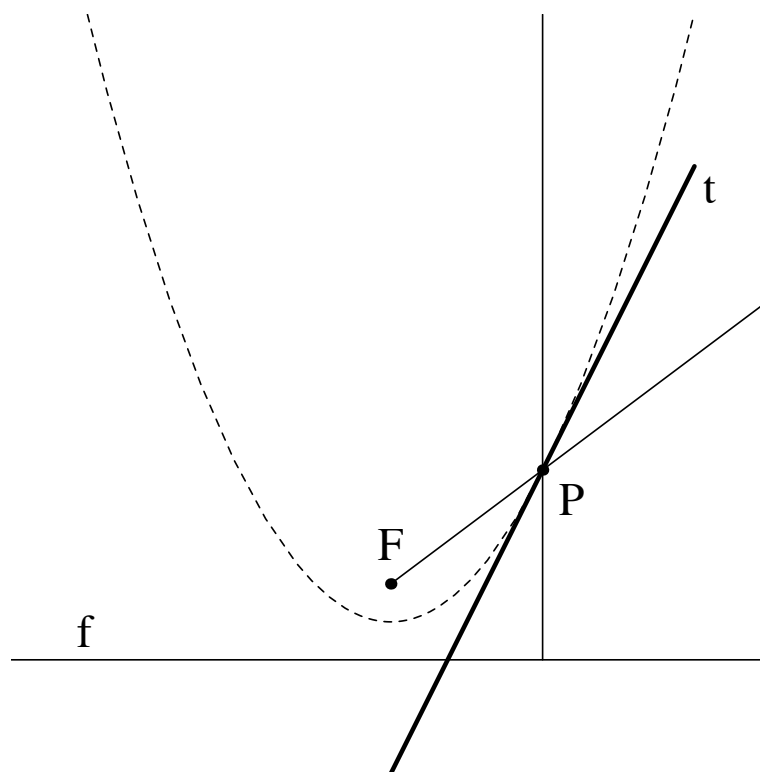


Figura 7.26: Teorema 7.5

e la parabola. Nel Corso di Geometria e Algebra Lineare I si studieranno le equazioni di secondo grado complete in x, y , di cui, quelle appena descritte, sono un caso particolare.

Esempio 7.1 Data la conica: $x^2 + 4x + 2y^2 + 4y - 2 = 0$, completando i quadrati, si ha:

$$(x^2 + 4x + 4 - 4) + 2(y^2 + 2y + 1 - 1) - 2 = 0,$$

$$(x + 2)^2 + 2(y + 1)^2 - 4 - 2 - 2 = 0,$$

$$(x + 2)^2 + 2(y + 1)^2 = 8,$$

e, quindi:

$$\frac{(x + 2)^2}{8} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1.$$

Pertanto con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 1, \end{cases}$$

si ottiene:

$$\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{4} = 1,$$

che è l'equazione di un'ellisse. La situazione geometrica è rappresentata nella Figura 7.27.

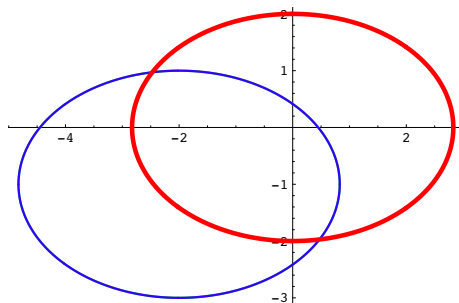


Figura 7.27: Esempio 7.1

Esempio 7.2 Data la conica: $x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$, completando i quadrati, si ha:

$$(x^2 + 6x + 9 - 9) - 2(y^2 + 4y + 4 - 4) - 5 = 0,$$

$$(x + 3)^2 - 2(y + 2)^2 - 9 + 8 - 5 = 0,$$

$$(x + 3)^2 - 2(y + 2)^2 = 6,$$

e, quindi:

$$\frac{(x + 3)^2}{6} - \frac{(y + 2)^2}{3} = 1.$$

Pertanto con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 3 \\ Y = y + 2, \end{cases}$$

si ottiene:

$$\frac{X^2}{6} - \frac{Y^2}{3} = 1,$$

che è l'equazione di un'iperbole. La situazione geometrica è rappresentata nella Figura 7.28.

Esempio 7.3 Data la conica: $2y^2 - 8y + 5x - 9 = 0$, completando i quadrati, si ha:

$$2(y^2 - 4y + 4 - 4) + 5x - 9 = 0,$$

$$2(y - 2)^2 + 5\left(x - \frac{17}{5}\right) = 0,$$

Pertanto con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x - \frac{17}{5} \\ Y = y - 2, \end{cases}$$

si ottiene:

$$2Y^2 + 5X = 0$$

che è l'equazione di una parabola. La situazione geometrica è rappresentata nella Figura 7.29.

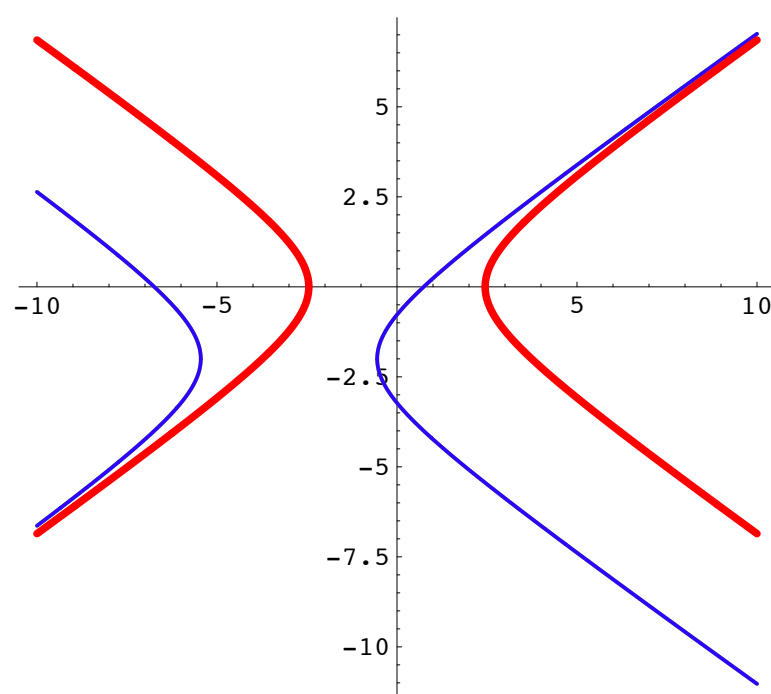


Figura 7.28: Esempio 7.2

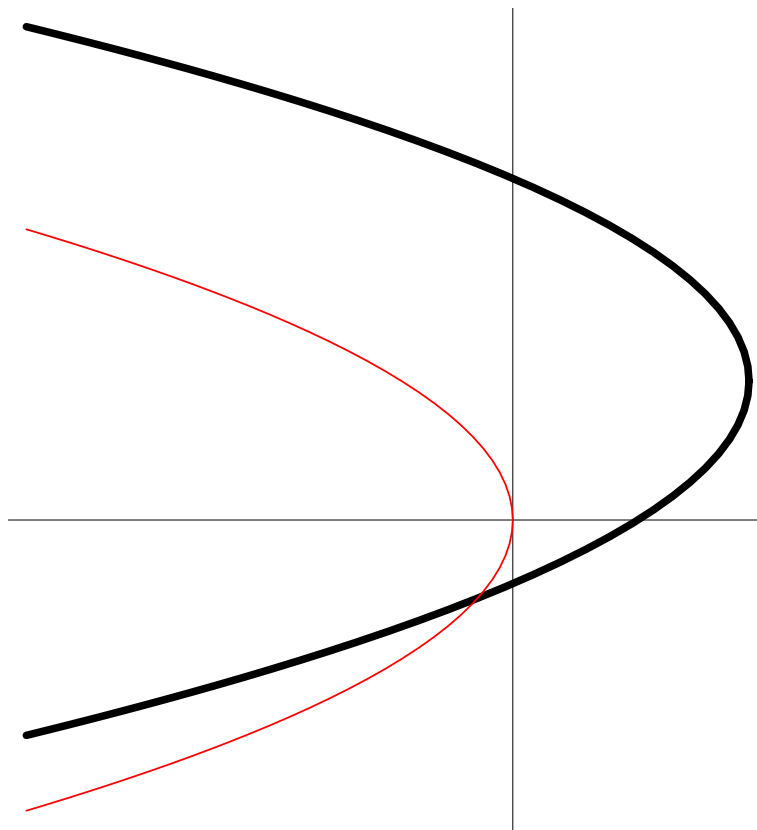


Figura 7.29: Esempio 7.3

Capitolo 8

Le Coniche: luoghi geometrici di punti

La definizione che segue giustifica la denominazione “conica” assegnata alle curve introdotte nel precedente capitolo.

Definizione 8.1 *Si dicono coniche tutte le curve piane che si possono ottenere intersecando un cono circolare retto con un piano.*

Per cono circolare retto si intende il luogo delle rette dello spazio che si appoggiano su di una circonferenza e passano tutte per il vertice, punto appartenente alla retta perpendicolare al piano della circonferenza nel suo centro.

È chiaro che, secondo la definizione proposta, il termine conica comprende: la circonferenza, l'ellisse, l'iperbole e la parabola, come illustrato nelle figure che seguono. Inoltre, se il piano secante il cono passa per il vertice, allora si ottengono anche coppie di rette incidenti e coppie di rette coincidenti; anche queste sono coniche e saranno dette **coniche degeneri**. Se il piano secante passa per il vertice (e, per esempio, è perpendicolare all'asse del cono) allora interseca il cono solo nel vertice, che risulta anche essere una particolare conica degenera (vista come l'unico punto di intersezione di due rette a coefficienti complessi).

Con questo metodo non si può visualizzare la conica degenera formata da due rette parallele. Per ottenerla è necessario usare metodi di Geometria Proiettiva, in questo ambito anche le rette parallele si incontrano in punti particolari, “all'infinito”, detti **punti impropri**.

Scopo di questo capitolo è quello di cercare un luogo geometrico di punti nel piano che comprenda tutte le coniche.

Definizione 8.2 *Una conica è il luogo dei punti del piano per cui si mantiene costante il rapporto tra la distanza di tali punti da un punto fissato e da una retta fissata.*

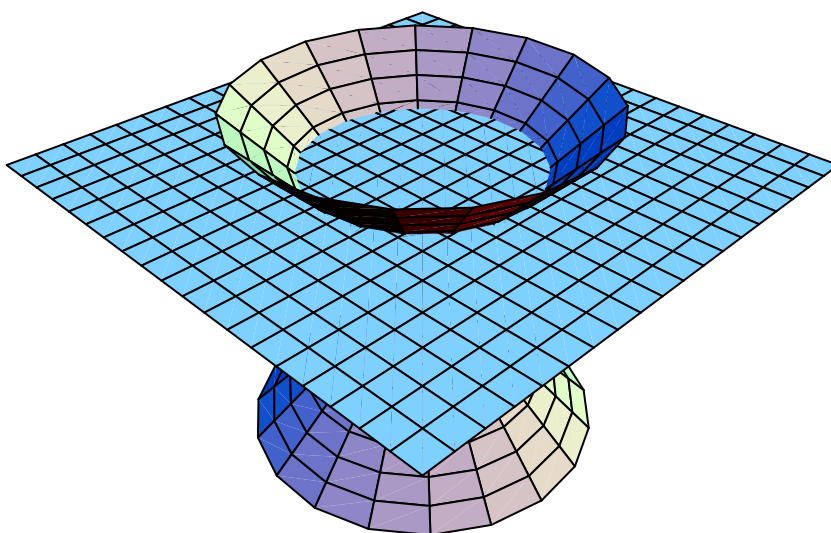


Figura 8.1: La Circonferenza

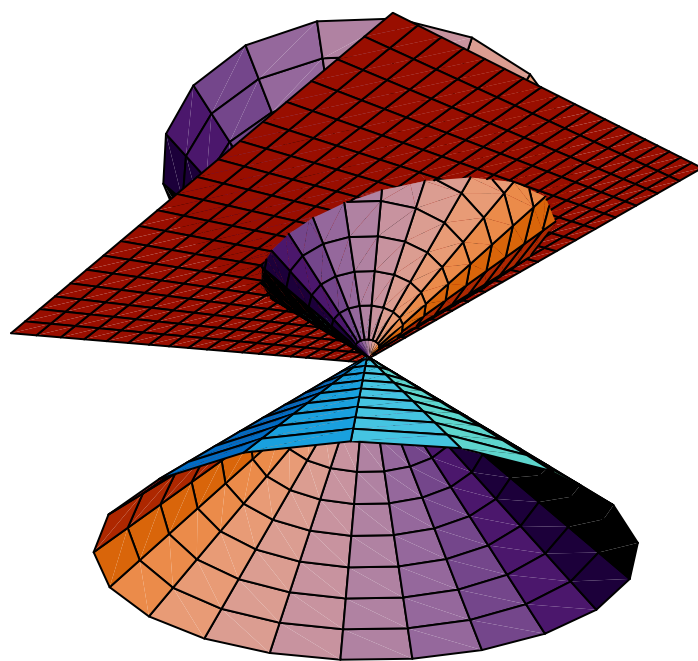


Figura 8.2: L'Ellisse

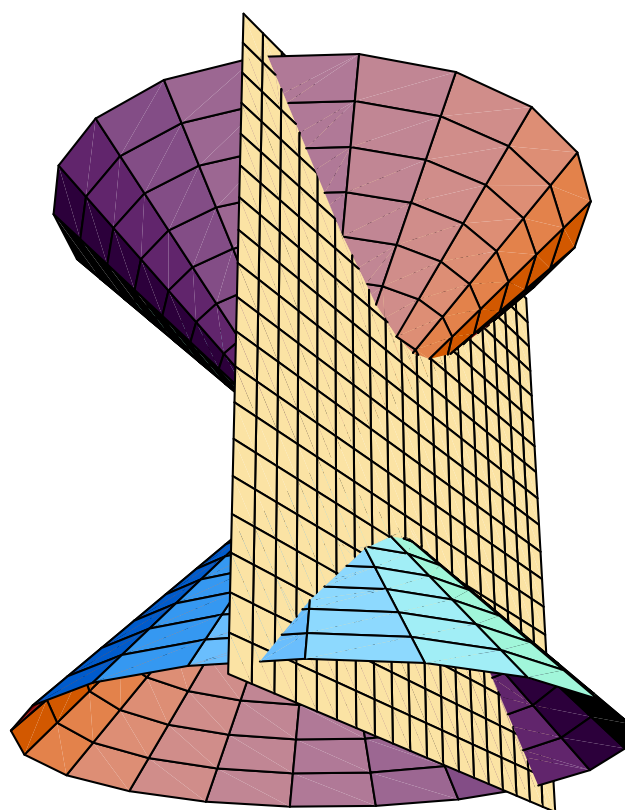


Figura 8.3: L'Iperbole

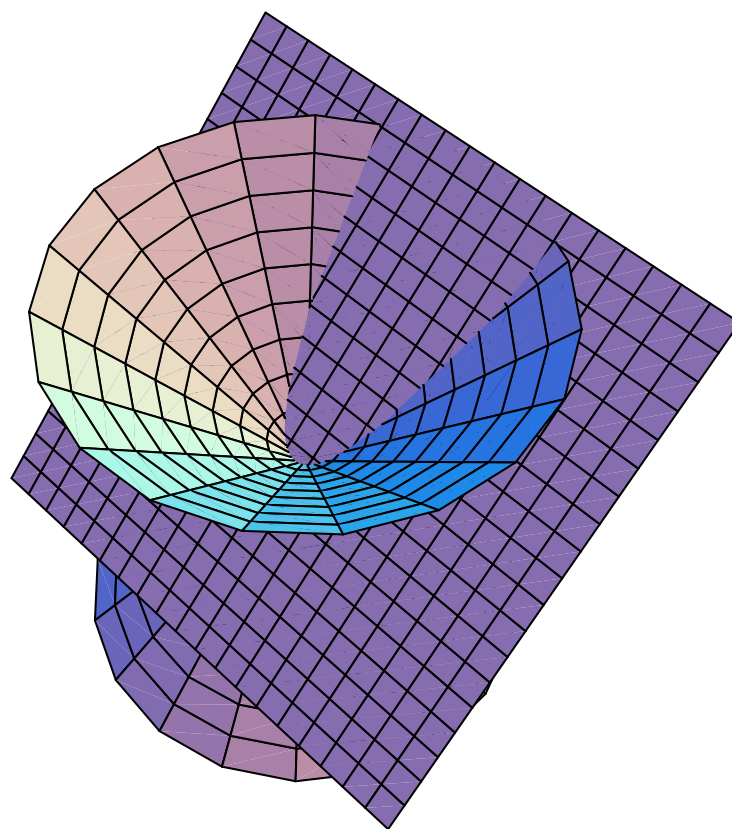


Figura 8.4: La Parabola

Detti P il punto generico della conica, F il punto assegnato, f la retta assegnata ed e la costante, la definizione precedente equivale a:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, f)} = e. \quad (8.1)$$

Il punto F prende il nome di **fuoco**, la retta f è la **direttrice** e la costante e è l'**eccentricità**. È chiaro dalla definizione che $e > 0$.

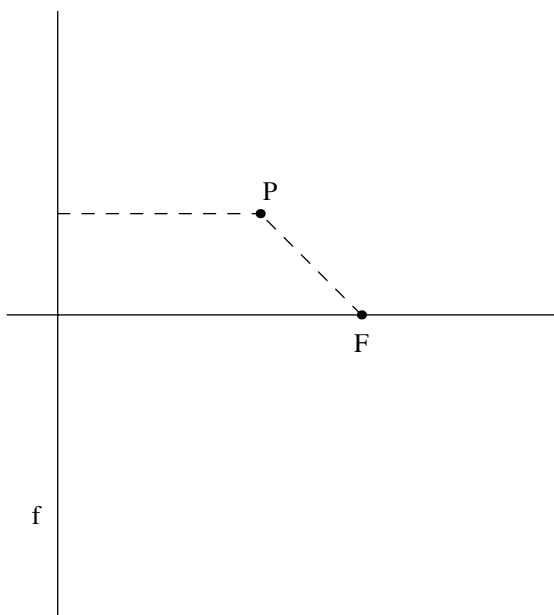


Figura 8.5: Fuoco e Direttrice

Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y)$, poniamo: $P = (x, y)$, $F = (x_0, y_0)$ e $f : ax + by + c = 0$, per cui la (8.1) diventa:

$$\frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = e,$$

elevando al quadrato, si ottiene:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = e^2 \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}. \quad (8.2)$$

Si distinguono i due casi seguenti:

Primo Caso. Il fuoco appartiene alla direttrice: $F \in f$.

Secondo Caso. Il fuoco non appartiene alla direttrice: $F \notin f$.

In ciascuno dei precedenti casi si esamineranno i sottocasi:

a) $e = 1$;

b) $e > 1$;

c) $e < 1$;

Primo Caso. Si sceglie un sistema di riferimento opportuno, ponendo l'origine coincidente con F e la direttrice f con l'asse y , pertanto il fuoco avrà coordinate $F = (0, 0)$ ed f equazione: $x = 0$.

La (8.2) diventa:

$$x^2 + y^2 = e^2 x^2,$$

ossia:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = 0. \quad (8.3)$$

Iniziamo lo studio dei sottocasi previsti:

a) $e = 1$. Allora (8.3) diventa: $y^2 = 0$, si tratta dell'asse x contato due volte; è una conica degenera e, in un riferimento qualsiasi, consiste nell'equazione di una retta generica elevata al quadrato, per esempio: $(2x - y + 5)^2 = 0$.

b) $e > 1$. Allora $1 - e^2 < 0$, pertanto la (8.3) è una differenza di quadrati che può essere espressa come:

$$(y + \sqrt{e^2 - 1} x)(y - \sqrt{e^2 - 1} x) = 0. \quad (8.4)$$

Si tratta, quindi, del prodotto di due rette incidenti e, di nuovo, di una conica degenera.

c) $e < 1$. In questo caso si ha: $1 - e^2 > 0$, pertanto la (8.3) rappresenta la somma di due quadrati, ossia un unico punto reale, in questo caso l'origine. Si tratta, di nuovo, di una conica degenera, interpretata come prodotto di due rette immaginarie incidenti in un punto reale (è il vertice del cono di cui abbiamo parlato in precedenza).

Riassumendo: se $F \in f$ allora si ottengono solo coniche degeneri del tipo: due rette coincidenti, due rette incidenti.

N.B. Si osservi, di nuovo, che, per ottenere il caso della conica degenerata formata da due rette parallele, è necessario usare metodi di Geometria Proiettiva, in questo ambiente si deve porre la direttrice coincidente con la retta impropria, ossia la retta che unisce i punti impropri.

Secondo Caso. $F \notin f$: scegliamo un riferimento opportuno, ponendo F sull'asse x e f ortogonale a x . Siano $(c, 0)$ le coordinate di F e $x = h$ l'equazione di f , con $c \neq h$. L'equazione (8.1) diventa:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2(c - e^2h)x + c^2 - e^2h^2 = 0. \quad (8.5)$$

Iniziamo con la discussione dei vari casi previsti:

a) $e = 1$. Dalla (8.5) si ha:

$$y^2 - 2(c - h)x + c^2 - h^2 = 0. \quad (8.6)$$

Scegliamo l'origine del sistema di riferimento in modo che $c + h = 0$, ossia O coincide con il punto medio tra il fuoco F e il punto di incontro della direttrice con l'asse x . Allora da (8.6) si ha:

$$y^2 = 4cx,$$

e, ponendo $a = \frac{1}{4c}$ si perviene alla nota forma canonica della parabola:

$$x = ay^2.$$

b) e c) $e \neq 1$. Cerchiamo le intersezioni della curva di equazione (8.5) con l'asse x , ossia, ponendo $y = 0$, da (8.5) si ha:

$$(1 - e^2)x^2 - 2(c - e^2h)x + c^2 - e^2h^2 = 0; \quad (8.7)$$

indicati con $A_1 = (x_1, 0)$ e $A_2 = (x_2, 0)$ i due punti cercati, dall'equazione precedente segue che:

$$x_1 + x_2 = 2 \frac{c - e^2h}{1 - e^2}.$$

(Si controlli per esercizio che l'equazione (8.7) ammette sempre due soluzioni reali e distinte).

Poniamo l'origine del riferimento nel punto medio tra A_1 e A_2 , ossia, poniamo: $c - e^2 h = 0$, da cui:

$$h = \frac{c}{e^2}. \quad (8.8)$$

Sia $a = x_1$, quindi $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$. Il prodotto delle soluzioni dell'equazione (8.7) è:

$$x_1 x_2 = -a^2 = \frac{c^2 - e^2 h^2}{1 - e^2}$$

e, tenendo conto di (8.8), si perviene alla formula:

$$e = \frac{c}{a}. \quad (8.9)$$

Sostituendo i risultati ottenuti in (8.5) si ottiene:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (8.10)$$

Possiamo distinguere i due ultimi casi:

b) $e > 1$. Allora: $e = \frac{c}{a} > 1$, ossia $c > a$, possiamo porre: $b^2 = c^2 - a^2$, quindi l'equazione (8.10) diventa:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ossia l'equazione dell'iperbole in forma canonica.

c) $e < 1$. Allora: $e = \frac{c}{a} < 1$, ossia $c < a$, possiamo porre: $b^2 = a^2 - c^2$, quindi l'equazione (8.10) diventa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ossia l'equazione dell'ellisse in forma canonica.

In entrambi i casi si ottengono (per simmetria) due direttrici e due fuochi, per esempio la direttrice relativa al fuoco $F = (c, 0)$ ha equazione $x = h = \frac{a^2}{c}$. Nel caso dell'ellisse, $h > a$, le due direttrici sono esterne alla figura, nel caso dell'iperbole $h < a$, le due direttrici sono posizionate tra l'asse y e i vertici.

Si osservi che per $c = 0$ e, quindi, $e = 0$, si ottiene la circonferenza che risulta esclusa da questo luogo di punti in quanto $e = 0$ implica $P = F$. In conclusione, anche il luogo considerato non comprende tutte le coniche, essendo escluse la circonferenza e la coppia di rette parallele. Come si vedrà nel corso di Geometria e Algebra Lineare I, le coniche saranno **tutte** rappresentate da una generica equazione di secondo grado in x, y .

Capitolo 9

Richiami di Teoria degli Insiemi – Esercizi

9.1 Esercizi

[1] Determinare gli elementi dei seguenti insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 8\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } 4 \leq x \leq 17\}.$$

[2] Rappresentare in modi diversi l'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 7 inclusi.

[3] Verificare se i seguenti insiemi coincidono:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x = -2\},$$
$$B = \{2, 1\},$$
$$C = \{1, 2, 2, 1\}.$$

[4] Determinare tutti i sottoinsiemi di

$$A = \{1, 2, 3\},$$
$$B = \{\{1, 2\}, 3\}.$$

[5] Verificare che $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, si ha:

$$2^n = 1 + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}.$$

[6] Verificare che la somma dei primi n numeri naturali é $\frac{n(n+1)}{2}$.

[7] Verificare che la somma dei primi n numeri dispari é n^2 .

[8] Verificare che la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali é $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

[9] Dimostrare che se $\#X = n$ allora $\#\mathcal{P}(X) = 2^n$.

[10] Dati

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, \forall k \in \mathbb{N}\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k, \forall k \in \mathbb{N}\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{N} \mid x > 30\}, \end{aligned}$$

determinare $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ e $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

[11] Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'insieme

$$A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\},$$

determinare $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

[12] Dati

$$\begin{aligned} I &= \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k, k \in \mathbb{N}\}, \\ A_n &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}, \end{aligned}$$

determinare $\bigcup_{n \in I} A_n$ e $\bigcap_{n \in I} A_n$.

[13] Dati tre insiemi A, B, C , dimostrare che

$$\begin{aligned} (A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C), \\ (A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C), \\ C \times (A \cap B) &= (C \times A) \cap (C \times B), \\ C \times (A \cup B) &= (C \times A) \cup (C \times B). \end{aligned}$$

9.2 Soluzioni

[1] $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 7, 11, 13, 17\}$.

[2] $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 7\}$.

[3] $A = \{1, 2\} = B = C.$

[4] $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}.$

[5] $P(1) := 2^1 = 1 + 2^0; P(k) := 2^k = 1 + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1};$

$P(k+1) := 2^{k+1} = P(k) + 2^k = 2^k + 2^k.$

[6] $P(n) := 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1) := 1 = \frac{1(1+1)}{2}, P(k) := 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$

$P(k+1) := P(k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$

[7] $P(n) := 1 + 3 + \dots + (2(n-1) + 1) = n^2, n > 1;$

$P(1) := 1, P(2) := 1 + 3 = 4 = 2^2, P(k) := 1 + \dots + (2(k-1) + 1) = k^2;$

$P(k+1) := P(k) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$

[8] $P(n) := 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

$P(1) := 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}, P(k) := 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6};$

$P(k+1) := P(k) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} =$
 $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$

[9] Se $\#X = 0, X = \emptyset, \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$, allora $\#\mathcal{P}(X) = 1.$

Se $\#X = k$ allora $\#\mathcal{P}(X) = 2^k.$

Se $\#X = k+1$ e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$, allora $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) \cup$
ogni elemento di $\mathcal{P}(\{x_1, x_2, \dots, x_k\})$ a cui si aggiunge l'elemento x_{k+1} , quindi
 $\#\mathcal{P}(X) = 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$

$$\textbf{[10]} \quad (A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\} \cup \{x = 3k, k > 10\}$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C = \{x \in \mathbb{N}/x = 6k, \forall k \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{N}/x > 30\}.$$

$$\textbf{[11]} \quad \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset, \quad \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}.$$

$$\textbf{[12]} \quad \cap_{n \in I} A_n = \{0\}, \quad \cup_{n \in I} A_n = \mathbb{N}.$$

[13] Ogni uguaglianza necessita di due verifiche, per esempio, per la prima si deve controllare che:

i) se $(x, y) \in (A \cap B) \times C$ allora $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$;

ii) se $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$ allora $(x, y) \in (A \cap B) \times C$.

Per i) si ha: se $(x, y) \in (A \cap B) \times C$ allora $x \in A \cap B$, $y \in C$, cioè $x \in A$ e $x \in B$, $y \in C$, quindi $(x, y) \in A \times C$ e $(x, y) \in B \times C$, da cui la tesi.

Capitolo 10

Equazioni e Sistemi Lineari – Esercizi

10.1 Esercizi

Discutere e risolvere, al variare degli eventuali parametri reali, i seguenti sistemi lineari:

$$[1] \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$[2] \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$[3] \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ 4x_1 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 9x_4 = 18. \end{cases}$$

$$[4] \quad \begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x + y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0. \end{cases}$$

$$[5] \quad \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + bz = 3 \\ y + cz = 2. \end{cases}$$

$$[6] \quad \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ x - y + z = k. \end{cases}$$

$$[7] \quad \begin{cases} ax - y + z = 2 \\ x - ay + z = 3 - a^2 \\ x - y + az = a + 1. \end{cases}$$

$$[8] \quad \begin{cases} x + y + z = a \\ x - ay - z = 1 \\ 2x + y + az = a + 1. \end{cases}$$

$$[9] \quad \begin{cases} x + y + \lambda z = 2\lambda - 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$[10] \quad \begin{cases} 2x + az = 1 \\ 3x + ay - 2z = 2 \\ ax + 2z = 1. \end{cases}$$

$$[11] \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = h. \end{cases}$$

$$[12] \quad \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = h. \end{cases}$$

$$[13] \quad \begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y + 2z = b \\ -3x - 3y + az = 1. \end{cases}$$

$$[14] \quad \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ 4x - y + az = b. \end{cases}$$

$$[15] \quad \begin{cases} (3-k)x - y - z = a \\ 2x - (4-k)y - 2z = b \\ 3x - 3y - (5-k)z = c. \end{cases}$$

$$[16] \quad \begin{cases} (2-k)x - ky + (1-k)z = 1 - 2k \\ (4-2k)x - 3ky + (1-2k)z = 1 - k \\ (2-k)x - 2ky + kz = -5k. \end{cases}$$

$$[17] \quad \begin{cases} (h+1)x - hy + (2h+1)z = 3 + 2h \\ (h+1)x - hy + 2hz = 1 + 3h \\ (-h-1)x - (2h+1)z = -3(h+1). \end{cases}$$

$$[18] \quad \begin{cases} (m-1)x + y + mz = 0 \\ m(1-m)x + (1-m)y - 2m^2z = 2 \\ (m-1)x + 2y - 2z = m + 3. \end{cases}$$

$$[19] \quad \begin{cases} (k+1)x + (k+1)y + 2z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ (1-k)x + (k-1)z = 0. \end{cases}$$

$$[20] \quad \begin{cases} kx - 2(k+1)y + z = 4 - 2k \\ (k+1)y + z = k + 3 \\ 2kx - 5(k+1)y + 2z = 8 - 9k. \end{cases}$$

$$[21] \quad \begin{cases} kx + 2y + 2kz = 1 \\ kx + (3-k)y + 3kz = 1 \\ kx + (k+1)y + 2kz = 2. \end{cases}$$

$$[22] \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$[23] \quad \begin{cases} x - y + z - t = a^2 \\ 2x + y + 5z + 4t = a \\ x + 2z + t = 2. \end{cases}$$

$$[24] \quad \begin{cases} 2x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a. \end{cases}$$

$$[25] \quad \begin{cases} x + z + 2t = 2 \\ -x - y + z + t = a^2 \\ 4x + y + 2z + 5t = a. \end{cases}$$

$$[26] \quad \begin{cases} 2x - y + 3z + t = 0 \\ 4x + y - 2z - t = 0 \\ 2x + 5y + az - 5t = 0. \end{cases}$$

$$[27] \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ -x_1 + (\lambda - 2)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0. \end{cases}$$

$$[28] \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + (2\lambda + 1)y - (\lambda + 1)z = 2\lambda + 1 \\ x + \lambda y - z = \lambda - 1. \end{cases}$$

$$[29] \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + \lambda y = 0. \end{cases}$$

$$[30] \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

$$[31] \quad \begin{cases} x + y + hz = 2h \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - hy + 4z = -2. \end{cases}$$

$$[32] \quad \begin{cases} hx + y + hz = -1 \\ 2x - y + 2z = -h - 1 \\ 3x + 3y + (h + 2)z = -h - 2. \end{cases}$$

$$[33] \quad \begin{cases} x - ay + z = a \\ ax - 2y + 3z = -1 \\ 3x - 2y + az = 5a. \end{cases}$$

$$[34] \quad \begin{cases} 2x + ay = 1 \\ x + y - z = -2 \\ ax - y + z = 2. \end{cases}$$

$$[35] \quad \begin{cases} x + y + (h - 1)z = 2h - 2 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x + (-h + 1)y + (h - 1)^2z = -2. \end{cases}$$

[36] Verificare che per $a = -1$ il seguente sistema lineare è incompatibile:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + z = 1 \\ x + 4y + az = 0. \end{cases}$$

[37] Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ e determinare esplicitamente le soluzioni (quando è possibile):

$$\begin{cases} -hx + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k. \end{cases}$$

[38] Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ e determinare esplicitamente le soluzioni (quando è possibile):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (2 - h)x_2 + (2 + h)x_3 = 2 \\ x_1 + (2 + 3h)x_2 - 2hx_3 = k. \end{cases}$$

[39] Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ (2 - h)x_1 + (2 + h)x_2 - x_3 = 0 \\ (2 + 3h)x_1 - 2hx_2 - x_3 = k, \quad h, k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

- i) determinare tutte le soluzioni nel caso di $h = k = 0$;
- ii) discutere l'esistenza delle soluzioni e determinarle (quando è possibile) al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

[40] Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 - kx_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R},$$

i) determinare tutte le soluzioni nel caso di $k = -1$.

ii) Discutere l'esistenza delle soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

10.2 Soluzioni

[1] $x_1 = -\lambda + \frac{1}{3}, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = -\frac{2}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

[2] Il sistema è incompatibile.

[3] $x_1 = \frac{3}{4}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2, \quad x_2 = -9 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{7}{2}\lambda_2, \quad x_3 = \lambda_1, \quad x_4 = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

[4] $x = \lambda_1 - 2\lambda_2, \quad y = \lambda_1, \quad z = 0, \quad t = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

[5] Se $a \neq b - c$: $x = -1, y = 2, z = 0$;

se $a = b - c$: $x = -1 + (2c - b)\lambda, y = 2 - c\lambda, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$

[6] Se $k \neq 1$: non esistono soluzioni;

se $k = 1$: $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{11}{3}, z = -\frac{10}{3}.$

[7] Se $a \notin \{-2, 1\}$: $x = 1, y = a, z = 2$;

se $a = -2$: $x = -1 + t, y = -t, z = t, t \in \mathbb{R}$;

se $a = 1$: $x = 2 + \lambda - \mu, y = \lambda, z = \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

[8] Se $a \notin \{0, 1\}$: $x = a, y = 1, z = -1$;

se $a = 0$: $x = 1 + t, y = -1 - 2t, z = t, t \in \mathbb{R}$;

se $a = 1$: $x = 1, y = -t, z = t, t \in \mathbb{R}.$

[9] Se $\lambda \notin \{1, -2\}$: $x = -\frac{2}{\lambda+2}$, $y = \frac{\lambda}{\lambda+2}$, $z = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}$;

se $\lambda = -2$: non esistono soluzioni;

se $\lambda = 1$: $x = -h - k + 1$, $y = h$, $z = k$, $h, k \in \mathbb{R}$.

[10] Se $a \notin \{-2, 0, 2\}$: $x = \frac{1}{2+a}$, $y = \frac{2a+3}{a(2+a)}$, $z = \frac{1}{2+a}$;

se $a = 0$, $a = -2$: il sistema è incompatibile;

se $a = 2$: $x = \frac{1}{2} - t$, $y = \frac{1}{4} + \frac{5}{2}t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

[11] Se $k \notin \{-3, 2\}$, $\forall h \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -3$, $h = -3$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = -3$, $h \neq -3$: non esistono soluzioni;

se $k = 2$, $h = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = 2$, $h \neq 2$: non esistono soluzioni.

[12] Se $k \notin \{1, -2\}$, $\forall h \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -2$, $h = -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = -2$, $h \neq -2$: non esistono soluzioni;

se $k = 1$, $h = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;

se $k = 1$, $h \neq 1$: non esistono soluzioni.

[13] Se $a \neq -3$, $\forall b \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $a = -3$, $b = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $a = -3$, $b \neq 2$: non esistono soluzioni.

[14] Se $a \neq -2$, $\forall b \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $a = -2$, $b = 5$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $a = -2$, $b \neq 5$: non esistono soluzioni.

[15] Se $k \notin \{2, 8\}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $k = 2$, $b = 2a$ e $c = 3a$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;

se $k = 2$, $b \neq 2a$, o $c \neq 3a$: non esistono soluzioni;

se $k = 8$, $a + b + c = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = 8$, $a + b + c \neq 0$: non esistono soluzioni.

[16] Se $k \notin \{0, 2\}$: esiste una sola soluzione;

se $k = 0$: $x = 0$, $y = t$, $z = 1$, $t \in \mathbb{R}$;

se $k = 2$: non esistono soluzioni.

[17] Se $h \notin \{-1, 0\}$: esiste una sola soluzione;

se $h = -1$: non esistono soluzioni;

se $h = 0$: $x = 1$, $y = t$, $z = 2$, $t \in \mathbb{R}$.

[18] Se $m \notin \{-1, 1, 2\}$: esiste una sola soluzione;

se $m = -1$, $m = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $m = 2$: non esistono soluzioni.

[19] Se $k \notin \{-2, 1\}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -2$, $k = 1$: non esistono soluzioni.

[20] Se $k \notin \{-1, 0\}$: esiste una sola soluzione;

se $k = -1$, $k = 0$: non esistono soluzioni.

[21] Se $k \notin \{0, 1\}$: esiste una sola soluzione;

se $k = 0$, $k = 1$: non esistono soluzioni.

[22] Se $a \notin \{1, 2\}$: esiste una sola soluzione;

se $a = 1$: non esistono soluzioni;

se $a = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[23] Se $a \notin \{-3, 2\}$: non esistono soluzioni;

se $a \in \{-3, 2\}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[24] Se $a \notin \{1, 2\}$: esiste una sola soluzione;

se $a = 1$: non esistono soluzioni;

se $a = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[25] Se $a \notin \{-3, 2\}$: non esistono soluzioni;

se $a \in \{-3, 2\}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[26] Se $a \neq -13$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un parametro;

se $a = -13$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[27] Se $\lambda \neq 0$: esiste solo la soluzione nulla;

se $\lambda = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[28] Se $\lambda \notin \{0, 1\}$: esiste una sola soluzione;

se $\lambda = 0$: non esistono soluzioni;

se $\lambda = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[29] Se $\lambda \neq -\frac{4}{5}$: $x = y = z = 0$;

se $\lambda = -\frac{4}{5}$: $x = -\frac{1}{4}t$, $y = -\frac{5}{4}t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

[30] $x = -3t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

[31] Se $h \notin \{-2, 2\}$: $x = \frac{5h}{2-h}$, $y = 0$, $z = \frac{-1-2h}{2-h}$;

se $h = -2$: $x = -\frac{5}{2} - t$, $y = t$, $z = \frac{3}{4}$, $t \in \mathbb{R}$;

se $h = 2$: il sistema è incompatibile.

[32] Se $h \notin \{-2, 1\}$: $x = 3$, $y = -1 + h$, $z = -4$;

se $h = -2$: $x = t$, $y = -t$, $z = \frac{1-3t}{2}$, $t \in \mathbb{R}$;

se $h = 1$: $x = -1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

[33] Se $a \notin \{-4, 1, 3\}$: esiste una sola soluzione;

se $a = -4$: non esistono soluzioni;

se $a = 1$: $x = 3 + t, y = 2(1 + t), z = t, \quad t \in \mathbb{R}$;

se $a = 3$: non esistono soluzioni.

[34] Se $a \notin \{-1, 0\}$: $x = 0, y = \frac{1}{a}, z = \frac{1 + 2a}{a}$;

se $a = -1$: $x = \frac{1 + t}{2}, y = t, z = \frac{1}{2}(5 + 3t), \quad t \in \mathbb{R}$;

se $a = 0$: il sistema è incompatibile.

[35] Se $h \notin \{-1, 3\}$: $x = -\frac{2(-1 - h + h^2)}{-3 + h}, y = -1 + 2h, z = \frac{-1 + 2h}{-3 + h}$;

se $h = -1$: $x = \frac{1}{2}(-5 - 2t), y = t, z = \frac{3}{4}, \quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = 3$: il sistema è incompatibile.

[36] Sostituendo ad a il valore indicato si perviene alla tesi.

[37] Se $h \neq 0, \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $h = 0, k \neq -4$: non esistono soluzioni;

se $h = 0, k = -4$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[38] Se $h \notin \{-2, 0\}, \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $h = k = -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $h = -2, k \neq -2$: non esistono soluzioni;

se $h = k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $h = 0, k \neq 0$: non esistono soluzioni.

[39] Se $h \notin \{-10, 0\}, \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;

se $h = -10, k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $h = -10, k \neq 0$: non esistono soluzioni;

se $h = 0, k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $h = 0, k \neq 0$: non esistono soluzioni.

[40] Se $k \neq -1$: $x_1 = \frac{1}{2}(-1 + k)$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}(-1 + k)$;

se $k = -1$: $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = -1$, $t \in \mathbb{R}$.

Capitolo 11

Geometria analitica nel piano – Esercizi

11.1 Esercizi

Tutti gli esercizi di questo capitolo sono assegnati nel piano ordinario, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, x, y)$.

[1] Dati i punti $A = (2, -1)$ e $B = (4, -3)$,

1. scrivere l'equazione del fascio di circonferenze passanti per A e B .
2. Determinare la circonferenza del fascio avente centro sulla retta s passante per A parallela all'asse y .

[2] Date le rette $r : y = 1$ ed $s : x + y - 5 = 0$, determinare:

1. la circonferenza tangente alla retta r nel suo punto $P = (2, 1)$ ed avente centro su s ;
2. il punto Q simmetrico di P rispetto ad s ;
3. la distanza di P da s ;
4. l'equazione della parabola di fuoco P e direttrice s .

[3] Determinare l'area del triangolo ABC , con $A = (1, 1)$, $B = (4, 2)$, $C = (2, 3)$.

[4] Scrivere l'equazione della circonferenza tangente nell'origine alla retta $r : 2x + 3y = 0$ e avente il centro sulla retta $s : x + 2y - 2 = 0$.

[5] Dati i punti $O = (0, 0)$, $A = (3, 0)$ e $B = (2, 3)$, determinare le coordinate del punto d'incontro delle altezze (ortocentro) del triangolo OAB .

[6] Determinare l'equazione della circonferenza tangente alle due rette $r : y = 0$, $s : y = 5$ e con centro sulla retta $t : 3x - 7y + 7 = 0$.

[7] Dati i punti $O = (0, 0)$, $A = (4, 0)$ e $B = (2, 4)$, determinare le coordinate del punto d'incontro degli assi (circocentro) del triangolo OAB .

[8] Scrivere l'equazione della circonferenza passante per l'origine, per il punto $A = (-1, 1)$ e che stacca sulla retta $r : x + y - 2 = 0$ una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

[9] Determinare le coordinate del vertice D del parallelogramma $ABCD$ con $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$ e $C = (5, 4)$.

[10] Determinare le equazioni delle circonferenze passanti per l'origine, per il punto $A = (1, 0)$ e tangenti alla retta $r : x - 2y + 1 = 0$.

[11] Dato il triangolo $\mathcal{T}$ di vertici $A = (4, 5)$, $B = (1, 2)$, $C = (-1, 3)$,

1. determinarne l'area ed il perimetro.
2. Determinare il vertice V di un triangolo isoscele avente la stessa area di $\mathcal{T}$ e la stessa base AB .
3. Osservare che il triangolo $\mathcal{T}$ è ottusangolo in B e determinare l'equazione della circonferenza circoscritta a $\mathcal{T}$.
4. Determinare l'equazione della parabola di fuoco il punto A e direttrice BC .

[12] Dati i punti $P_1 = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ e $P_2 = \left(3, \frac{5}{4}\right)$,

1. determinare l'area e il perimetro del quadrato $\mathcal{Q}$ avente come diagonale P_1P_2 .
2. Determinare l'equazione della circonferenza circoscritta a $\mathcal{Q}$.
3. Determinare l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ di fuochi P_1 e P_2 e semiasse maggiore di lunghezza pari al lato del quadrato $\mathcal{Q}$. (Non occorre sviluppare i calcoli).
4. Dire se gli altri due vertici di $\mathcal{Q}$ sono contenuti in $\mathcal{E}$, giustificando la risposta.

[13] Determinare: vertici, fuochi, direttrici ed eventuali asintoti delle seguenti coniche:

1. $4x^2 + 6y^2 = 18$;

2. $3x^2 + 2y^2 = 12$;

3. $7x^2 - 5y^2 = 7$;

4. $3x^2 + 8y^2 = 24$;

5. $x^2 - 5y = 0$;

6. $2y^2 - 8x^2 = 12$.

[14] Trovare le equazioni delle seguenti coniche aventi ciascuna:

1. fuoco $F = (-2, -1)$, direttrice: $x = 1$, eccentricità: $e = \frac{1}{2}$;

2. fuoco $F = (-4, 3)$, direttrice: $x = -2$, eccentricità: $e = \frac{3}{2}$;

3. fuoco $F = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, direttrice: $x = 1$, eccentricità: $e = 1$.

[15] Ridurre a forma canonica le seguenti coniche, studiarle e scrivere esplicitamente il cambiamento di riferimento usato:

1. $2x^2 - y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

2. $3x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$.

3. $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$.

5. $x^2 - y^2 = 0$.

6. $x^2 + y^2 = 0$.

7. $x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.

8. $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

9. $4(x^2 + y^2) - 3x + 4 = 0$.

10. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 7 = 0$.

11. $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$.

12. $x^2 - 4y^2 - 4x + 8y - 1 = 0$.

[16] Classificare le seguenti coniche e scriverle in forma canonica; trovare inoltre: semiassi, eccentricità, centro, vertici, fuochi, assi, direttrice ed eventuali asintoti:

1. $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 2 = 0$;

2. $x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$;

3. $2y^2 - 8y + 5x - 9 = 0$;

4. $2x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 2 = 0$;

5. $x^2 - 2y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$.

[17] Si consideri il fascio di coniche:

$$(x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1) + t(x^2 + y^2 - 2x - 2y) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Per quali valori di t si ottengono coniche degeneri?
2. Verificare che tutte le coniche non degeneri del fascio hanno lo stesso centro.
3. Ridurre a forma canonica la conica del fascio passante per il punto $P = (0, 1)$.

[18] Dato il fascio di coniche $\mathcal{F}$:

$$\lambda(3x^2 + 4y^2 + 2x + 1) + \mu(2x^2 + 2y^2 + 8y + 1) = 0,$$

1. dire per quali valori dei parametri λ e μ , $\mathcal{F}$ contiene: ellissi, iperboli, parabole, una circonferenza;
2. scrivere le equazioni delle parabole del fascio;
3. trovare la conica di $\mathcal{F}$ passante per l'origine e determinarne centro, vertici ed i fuochi.

[19] Dato il fascio di coniche:

$$\lambda(x^2 - y - 1) + \mu(y^2 - 6x - y - 1) = 0,$$

1. individuare la conica che si ottiene per $\lambda = 3, \mu = -1$ e scriverne le equazioni degli assi e delle direttrici;
2. esistono dei valori di λ e μ per i quali si ha una circonferenza? Se sì, se ne determinino il centro e il raggio;
3. verificare che il fascio contiene un'iperbole equilatera della quale si trovino i fuochi e l'eccentricità.

[20] Dato il fascio di coniche:

$$\lambda(y^2 - 2y - 4x + 5) + \mu(y^2 - 2y + 2x) = 0,$$

1. verificare che il fascio contiene solo parabole aventi il fuoco sulla retta $y = 1$;
2. scrivere l'equazione della parabola passante per il punto $(0, 3)$ e trovarne il vertice;
3. scrivere le equazioni delle parabole che sono tangenti alla retta $x - y = 0$.

[21] Trovare l'equazione del luogo dei punti del piano tali che il rapporto delle loro distanze dai due punti $A = (-1, 2), B = (3, -1)$ sia uguale a 3.

[22] Trovare il luogo dei punti del piano aventi rapporto costante tra le distanze da due punti distinti.

[23] Date le circonferenze $\sigma_1 : x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$, $\sigma_2 : x^2 + y^2 - 4x + 4$, trovare la circonferenza del fascio $\lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2 = 0$ corrispondente a $\lambda = 1, \mu = -2$.

[24] Dato il fascio di circonferenze $(x - 3)^2 + y^2 + k(x - 1) = 0$, determinare il centro e il raggio della circonferenza che si ottiene per $k = -2$.

[25] Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse x , sapendo che passano per il punto di coordinate $(3, 3)$ e che hanno il centro sulla retta di equazione:
 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 4 = 0$.

[26] Scrivere l'equazione della circonferenza tangente nell'origine alla retta $2x + 3y = 0$ e avente il centro sulla retta $x + 2y - 2 = 0$.

[27] Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse x e passanti per i punti di coordinate: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

[28] Determinare le intersezioni della circonferenza di centro $C = (3, 0)$ e raggio 3 con la circonferenza di centro $C' = (0, 3)$ e passante per il punto $A = (-3, 3)$.

[29] Scrivere l'equazione della circonferenza passante per il punto $(0, 2)$ e tangente nell'origine alla retta $2x + y = 0$.

[30] Determinare i vertici del triangolo isoscele che ha per base il segmento intercettato dalla circonferenza: $7x^2 + 7y^2 - 19x + 11y - 6 = 0$ sulla retta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ed ha il vertice nella retta parallela alla base e passante per il punto $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$.

[31] Nel fascio di circonferenze: $x^2 + y^2 - 2kx + (1 - k)y + 2 = 0$, determinare l'equazione dell'asse radicale, le coordinate dei punti base e l'equazione della retta dei centri. Dai risultati ottenuti che cosa si può dedurre? Determinare, infine, per quali valori di k si hanno circonferenze non degeneri.

[32] Nel fascio di circonferenze individuato dalle due circonferenze di equazione: $x^2 + y^2 - 5x - y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 + y - 36 = 0$, determinare la circonferenza γ_1 avente il centro C sull'asse x . Indicato con A uno dei punti base del fascio, detto D il punto di intersezione della tangente a γ_1 in A con la retta dei centri, scrivere l'equazione della circonferenza γ_2 passante per C, A, D e verificare che γ_2 appartiene al fascio dato.

11.2 Soluzioni

[1]

1. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 + t(x + y - 1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$
2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0.$

[2]

1. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$;
2. $Q = (4, 3)$;
3. $|d(P, s)| = \sqrt{2}$;
4. $(x + y - 5)^2 = 2[(x - 2)^2 + (y - 1)^2]$.

[3] $\mathcal{A} = \frac{5}{2}.$

[4] $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{16}.$

[5] Ortocentro: $H = \left(2, \frac{2}{3}\right).$

[6] $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$

[7] Circocentro: $H = \left(2, \frac{3}{2}\right).$

[8] $\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{8}\right)^2 = \frac{65}{32}.$

[9] $D = (4, 3).$

[10] $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - (-3 \pm \sqrt{10}))^2 = \frac{1}{4} + (-3 \pm \sqrt{10})^2.$

[12]

1. $p = 3\sqrt{2} + \sqrt{29} + \sqrt{5}, \quad \mathcal{A} = \frac{9}{2};$
2. $V = (4, 2);$
3. $\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{29}{6}\right)^2 = \frac{145}{18};$
4. $5[(x - 4)^2 + (y - 5)^2] = (x + 2y - 5)^2.$

[12]

1. $\mathcal{A} = \frac{5}{2}, \quad p = 2\sqrt{10}.$
2. $(x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{4};$
3. $\mathcal{E} : \sqrt{(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$
4. Sì, infatti i due vertici del quadrato verificano la definizione di ellisse come luogo geometrico.

- [13]** 1. $\left(\pm \frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, \pm\sqrt{3}); F = \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right);$ direttrici: $x = \pm 3\sqrt{\frac{3}{2}};$
2. $(\pm 2, 0), (0, \pm\sqrt{6}); F = (0, \pm\sqrt{2});$ direttrici: $y = \pm 3\sqrt{2};$
3. $(\pm 1, 0); F = \left(\pm 2\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right);$ direttrici: $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}};$ asintoti: $x = \pm \sqrt{\frac{5}{7}}y;$
4. $(\pm 2\sqrt{2}, 0), (0, \pm\sqrt{3}); F = (\pm\sqrt{5}, 0);$ direttrici: $x = \pm \frac{8}{\sqrt{5}};$
5. $V = (0, 0); F = \left(0, \frac{5}{4}\right);$ direttrice: $y = -\frac{5}{4};$
6. $(0, \pm\sqrt{6}); F = \left(0, \pm\sqrt{\frac{15}{2}}\right);$ direttrici: $y = \pm 2\sqrt{\frac{6}{5}};$ asintoti: $y = \pm 2x.$

[14] 1. $3x^2 + 4y^2 + 18x + 8y + 19 = 0$;

2. $5x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 64 = 0$;

3. $16y^2 + 24y + 16x - 3 = 0$.

[15] 1. $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{2} = 1$; $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1. \end{cases}$.

2. $\frac{3}{2}X^2 + \frac{Y^2}{2} = 1$; $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y. \end{cases}$.

3. Non si tratta di una conica reale.

4. È la circonferenza di centro $C = (1, -2)$ e raggio $\sqrt{7}$.

5. È la conica degenerata data dal prodotto delle rette $x - y = 0$ e $x + y = 0$.

6. L'unico punto reale di tale conica è l'origine $O = (0, 0)$.

7. $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{2} = 1$; $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1. \end{cases}$.

8. Si tratta della circonferenza di centro $O = (0, 0)$ e raggio 1.

9. Non è una circonferenza reale.

10. $X^2 + 4Y^2 = 1$; $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 1. \end{cases}$.

11. $4X^2 + Y^2 = 1$; $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2. \end{cases}$.

12. $4X^2 - Y^2 = 1$; $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2. \end{cases}$.

[16] 1. La conica è un'ellisse; $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; centro: $(-2, -1)$; vertici: $(-2 \pm 2\sqrt{2}, -1)$, $(-2, -1 \pm 2)$; fuochi: $F_1 = (-4, -1)$, $F_2 = (0, -1)$; assi: $x + 2 = 0$, $y + 1 = 0$; direttrici: $x + 6 = 0$, $x - 2 = 0$.

2. La conica è un'iperbole; $a = \sqrt{6}, b = \sqrt{3}, e = \sqrt{\frac{3}{2}}$; centro: $(-3, -2)$; vertici: $(-3 \pm \sqrt{6}, -2)$; fuochi: $F_1 = (-6, -2), F_2 = (0, -2)$; assi: $x + 3 = 0, y + 2 = 0$; direttrici: $x + 5 = 0, x + 1 = 0$; asintoti: $x + 3 = \pm \sqrt{2}(y + 2)$.

3. La conica è una parabola; vertice: $V = \left(\frac{17}{5}, 2\right)$; fuoco: $F = \left(\frac{111}{40}, 2\right)$; asse: $y - 2 = 0$; direttrice: $x = \frac{161}{40}$.

4. La conica è un'ellisse; $a = 2\sqrt{2}, b = 2, e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; centro: $(-1, 2)$, vertici: $(-1 \pm 2\sqrt{2}, 2), (-1, 2 \pm 2)$; fuochi: $F_1 = (-3, 2), F_2 = (1, 2)$; assi: $x + 1 = 0, y - 2 = 0$; direttrici: $x + 5 = 0, x - 3 = 0$.

5. La conica è un'iperbole; $a = 2, b = \sqrt{2}, e = \frac{\sqrt{6}}{2}$; centro: $(-2, -1)$; vertici: $(-2 \pm 2, -1)$; fuochi: $F_1 = (-2 - \sqrt{6}, -1), F_2 = (-2 + \sqrt{6}, -1)$; assi: $x + 2 = 0, y + 1 = 0$; direttrici: $x = -2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$; asintoti: $y + 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x + 2)$.

[17]

1. $t = 1, t = -1, t = \frac{1}{2}$.

2. $C = (1, 1)$.

3. $X^2 + \frac{Y^2}{3} = 1$.

[18]

1. ellissi: $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu > 0 \\ 4\lambda + 2\mu > 0, \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu < 0 \\ 4\lambda + 2\mu < 0; \end{cases}$

iperboli: $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu > 0 \\ 4\lambda + 2\mu < 0, \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu < 0 \\ 4\lambda + 2\mu > 0; \end{cases}$

parabole: $3\lambda + 2\mu = 0$, oppure $2\lambda + \mu = 0$;

circonferenza: $\lambda = 0$.

2. $\lambda = 2, \mu = -3, 2y^2 + 4x - 24y - 1 = 0;$

$\lambda = 1, \mu = -2, x^2 - 2x + 16y + 1 = 0;$

3. $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y = 0$; centro: $(-1, 2)$; vertici: $(-1 \pm 3, 2), \left(-1, 2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\right);$

$F_1 = \left(-1 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 2\right), F_2 = \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 2\right).$

[19]

1. $3x^2 - y^2 + 6x - 2y - 2 = 0$; assi: $x + 1 = 0, y + 1 = 0$; direttrici: $x = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$

2. Sì, $\lambda = 1, \mu = 1, C = (3, 1), r = 2\sqrt{3};$

3. iperbole equilatera per $\lambda = 1, \mu = -1 : x^2 - y^2 + 6x = 0, F_1 = (-3 - 3\sqrt{2}, 0), F_2 = (-3 + 3\sqrt{2}, 0); e = \sqrt{2}.$

[20]

2. $5y^2 - 10y + 28x - 15 = 0; V = \left(\frac{5}{7}, 1\right);$

3. $y^2 - 2y + 2x = 0; 9y^2 - 18y - 12x + 25 = 0.$

[21] $8x^2 + 8y^2 - 56x + 22y + 85 = 0.$

[22] Siano $C = (a, b)$ e $C' = (a', b')$ i due punti distinti e k il rapporto tra $d(P, C)$ e $d(P, C')$, con $P = (x, y)$ punto generico del piano. Il luogo richiesto è: $(x - a)^2 + (y - b)^2 - k^2[(x - a')^2 + (y - b')^2] = 0$ e rappresenta un fascio di circonferenze.

[23] $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 1 = 0.$

[24] $C = (4, 0), r = \sqrt{5}.$

[25] $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 36 = 0 = 0, x^2 + y^2 + 18x - 51y + 81 = 0.$

[26] $2x^2 + 2y^2 - 2x - 3y = 0$.

[27] Coordinate del centro: $x = \frac{3 \pm 2\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{7 \pm 2\sqrt{5}}{2}$.

[28] $(0, 0)$, $(3, 3)$.

[29] $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

[30] Vertici: $(1, 1)$, $(3, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{17}{6}\right)$.

[31] $2x + y = 0$; non vi sono punti base; $y = \frac{1}{2}(x - 1)$; $k < -1$, $k > \frac{7}{5}$.

[32] $2x^2 + 2y^2 - 5x - 44 = 0$; $A = (4, 4)$; $D = \left(\frac{20}{3}, \frac{13}{6}\right)$.

Capitolo 12

Cenni Elementari di Logica

In questo capitolo, essenzialmente tratto da testi di liceo, sono discussi i principali concetti, molto elementari, di logica matematica, quali la spiegazione di alcuni simboli già usati in precedenza, come l'implicazione, la bi-implicazione, i quantificatori, e l'elenco di alcune tecniche di dimostrazione. Gli argomenti trattati sono di importanza fondamentale per un approccio corretto allo studio della matematica; si invitano, pertanto, gli Studenti a leggere con attenzione il testo e a svolgere gli esercizi proposti.

12.1 L'implicazione

Si vuole capire il significato del simbolo " $\Rightarrow$ ".

Esempio 12.1 Esaminiamo il seguente enunciato: *se ABC è un triangolo isoscele in A , allora gli angoli $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BCA}$ sono uguali*. Si afferma che: se è vero che ABC è isoscele in A allora è vero che gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCA}$ sono uguali. In altre parole, quando la **proposizione** P : ABC è un triangolo isoscele è vera allora è anche vera la proposizione Q : *gli angoli $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BCA}$ sono uguali*. Si dice che P **implica** Q e si scrive $P \Rightarrow Q$.

Definizione 12.1 In generale diciamo che la proposizione P implica la proposizione Q se, allorchè P è vera, anche Q è vera, o, analogamente, Q è una conseguenza di P .

L'implicazione può avere diverse formulazioni:

1. se P allora Q ;
2. P è una **condizione sufficiente** per Q , vale a dire è sufficiente che P sia vera perchè Q lo sia;
3. Q è condizione necessaria per P , ossia bisogna che Q sia vera perchè P lo sia.

12.1.1 Il Controesempio

Per confutare una proposizione è sufficiente produrre un **controesempio**, ossia un solo esempio che, pur verificando le ipotesi, non verifica la tesi.

Esempio 12.2 Si pensa che $n^2 + n + 1$ sia un numero primo, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ponendo $n = 1$ si ottiene 3: sembra vero, ponendo $n = 2$ si ottiene 7: è ancora vero, anche per $n = 3$ si ottiene 13, ma per $n = 4$ si ha 21 che non è un numero primo. La proposizione introdotta è falsa, perché non è vera per $n = 4$, che ne costituisce un controesempio.

Quindi, se si vuole affermare che un'implicazione è falsa è sufficiente produrre un controesempio.

Esempio 12.3 Si vuole provare o confutare la proposizione: *se a, b, c sono tre numeri interi consecutivi, allora la loro somma è un multiplo di 6*. La proposizione è falsa perché $0 + 1 + 2 = 3$ che non è un multiplo di 6, e ne costituisce un controesempio.

La formulazione corretta da dimostrare è: *se a, b, c sono tre numeri interi consecutivi, allora la loro somma è divisibile per 6*, la sua dimostrazione è lasciata per esercizio.

12.1.2 Esercizi

Nei sette esercizi seguenti dire se la proposizione P implica la proposizione Q , in caso contrario esibire un controesempio.

[1] P : ABC è un triangolo isoscele in A ; Q : la mediana di BC è asse di simmetria del triangolo ABC .

[2] P : x è un numero reale positivo o nullo; Q : x è un numero reale tale che $x^2 \geq x$.

[3] P : x è un numero reale appartenente all'intervallo aperto $(0, 1)$; Q : x è un numero reale tale che
 $0 < 2x + 3 < 5$.

[4] P : Le lancette dell'orologio formano un angolo retto; Q : sono le 3.

[5] P : $x^3 = x$; Q : $x = -1$.

[6] $P: 6 < x < 8; Q: x = 7$.

[7] $P: xy = 0; Q: x = 0 \text{ e } y = 0$.

[8] Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di diametro AB , sia M un punto diverso da A e da B . Scrivere una condizione sufficiente affinché M stia su $\mathcal{C}$.

12.1.3 Implicazioni nascoste

Qualche volta l'implicazione è implicita nell'enunciato del teorema e non si presenta con la dicitura classica: *se allora*. Per esempio si può dire: *due numeri reali a e b che hanno lo stesso valore assoluto sono uguali ed opposti* piuttosto che dire: *se due numeri reali a e b hanno lo stesso valore assoluto allora sono uguali ed opposti*.

12.1.4 Esercizi

[9] Trovare altri esempi di implicazioni nascoste.

12.1.5 Implicazioni reciproche

Supponiamo che una proposizione P implichi una proposizione Q , per esempio: *se l'intero n è divisibile per 6 allora n è divisibile per 3*. Possiamo chiederci se il reciproco di tale affermazione sia ancora vero, ossia se Q implichi P . Il reciproco dell'affermazione precedente: *se un intero n è divisibile per 3, allora è divisibile per 6* è palesemente falso, perchè, per esempio 15 è divisibile per 3 ma non per 6.

L'implicazione: $Q \Rightarrow P$ è detta **implicazione reciproca** di $P \Rightarrow Q$.

12.1.6 Esercizi

[10] Negli esercizi da [1] a [7] dire se vale l'implicazione reciproca: Q implica P .

Nei seguenti esercizi enunciare esplicitamente l'implicazione reciproca di quella affermata e dire se sia vera o falsa.

[11] Se n è un intero divisibile per 5 e per 15, allora n è divisibile per 15.

[12] a e b sono due numeri reali strettamente positivi, allora il loro prodotto è un numero reale strettamente positivo.

12.2 L'Equivalenza

Definizione 12.2 Si dice che due proposizioni P e Q sono **equivalenti** e si scrive $P \Leftrightarrow Q$ se P implica Q e Q implica P .

Esempio 12.4 La proposizione: a e b sono numeri reali positivi tali che $a \leq b$ è equivalente alla proposizione: a e b sono numeri reali positivi tali che $a^2 \leq b^2$.

Osservazione 12.1 Dire che la proposizione P equivale alla proposizione Q coincide con la scrittura $P \Leftrightarrow Q$ e alla lettura P se e solo se Q , o anche P è condizione necessaria e sufficiente per Q .

12.2.1 Esercizi

Nei seguenti esercizi si dica se le proposizioni P e Q sono equivalenti:

[13] P : a e b sono dei numeri reali non nulli tali che $a \geq b$. Q : a e b sono dei numeri reali tali che $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

[14] P : x^2 è un numero reale tale che $0 \leq x^2 \leq 1$. Q : x è un numero reale tale che $0 \leq x \leq 1$.

[15] L'enunciato seguente è vero o falso: *condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo è che abbia tre angoli retti?*

[16] Trovare una proposizione equivalente alla seguente: a e b sono due numeri reali tali che $\sqrt{a} \leq b$.

12.3 I Quantificatori

Nei capitoli precedenti abbiamo già introdotto la definizione e qualche esempio dell'uso dei due quantificatori: $\forall$ **per ogni** e $\exists$ **esiste**. $\forall$ è detto il **quantificatore universale**

invece $\exists$ è il **quantificatore esistenziale**. In questo paragrafo presentiamo alcuni esempi per chiarire meglio il loro uso.

Esempio 12.5 La proposizione: *per ogni numero reale appartenente all'intervallo $[0, 1]$ si ha: $x^2 \leq x$* si scrive in formule:

$$x^2 \leq x, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Esempio 12.6 Consideriamo l'affermazione: *dati due punti A e B del piano esiste un punto M del piano tale che la distanza da A a M è pari alla distanza da B a M* . Si potrebbe sostituire la frase *esiste un punto M* con il simbolo $\exists M$, volendo con questa notazione affermare che esiste almeno un punto M per cui vale l'affermazione (infatti ne esistono addirittura infiniti, tutti quelli dell'asse del segmento AB). Se si aggiunge l'ipotesi che M debba appartenere alla retta AB allora esso è unico, anche se, nella frase si continua a scrivere $\exists M$. In altre parole, il simbolo $\exists$ è usato indifferentemente sia per indicare l'esistenza di un solo elemento sia per indicare l'esistenza di più di un elemento. Se c'è l'assoluta sicurezza di indicare un solo elemento si può usare il simbolo $\exists!$, ma con grande attenzione!

12.3.1 Esercizi

Nelle proposizioni seguenti inserire i quantificatori opportuni in modo tale che la proposizione sia vera e sia la più generale possibile.

[17] $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

[18] $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

[19] $(x+1)^2 = x^2 + 1$.

[20] Usare i quantificatori per scrivere in formule la proposizione: *il prodotto di due numeri reali non è sempre uguale alla loro somma*.

12.3.2 Uso simultaneo dei quantificatori

La proposizione: $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, |a+b| \leq |a| + |b|$ contiene due quantificatori $\forall$ di cui si può scambiare l'ordine senza alterare il significato della proposizione: $\forall b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$, $|a+b| \leq |a|+|b|$. Si potrebbe anche usare un solo quantificatore: $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a+b| \leq |a|+|b|$, oppure meglio: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a+b| \leq |a|+|b|$. Non sempre, se si è in presenza di più quantificatori, specialmente se di tipo diverso, si può procedere in questo modo.

Ricordiamo la definizione di elemento neutro per il prodotto in $\mathbb{Q}$ data nel Capitolo 2:

$$\exists 1 \in \mathbb{Q} \mid 1a = a1 = a \quad \forall a \in \mathbb{Q},$$

in altri termini esiste un solo numero che è l'elemento neutro, rispetto al prodotto, per tutti i numeri $a \in \mathbb{Q}$. Se scambiamo l'ordine dei quantificatori si legge:

$$\forall a \in \mathbb{Q}, \exists 1 \in \mathbb{Q} \mid 1a = a1 = a;$$

abbiamo così affermato che per ogni numero $a \in \mathbb{Q}$ esiste un numero che è l'elemento neutro rispetto al prodotto, dicendo quindi che a priori esistono infiniti elementi neutri, uno per ogni numero $a \in \mathbb{Q}$.

12.3.3 Esercizi

[21] Si scriva la definizione di inverso di un numero razionale rispetto al prodotto e si provi a scambiare l'ordine dei quantificatori, spiegando perchè così si ottiene una proposizione errata.

[22] Decidere se la seguente proposizione è vera o falsa: $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} \mid n \leq x \leq n+1$. Scambiare l'ordine dei quantificatori e decidere se la nuova proposizione ottenuta è vera o falsa.

12.4 Negazione di una proposizione

A partire da una proposizione P si può scrivere un'altra proposizione *non* P che è la negazione di P .

Esempio 12.7 La negazione della proposizione: *la lavagna della classe è nera* è: *la lavagna della classe non è nera*. La negazione della proposizione: *il triangolo ABC è isoscele* è: *il triangolo ABC non è isoscele*.

12.4.1 Caso della proposizione P e Q

Esaminiamo la proposizione P : *il numero intero n è un multiplo di 3 e di 5*. Negare P significa affermare che n non possiede l'insieme delle proprietà che P gli attribuisce, ossia che n non è multiplo di 3 **oppure** che n non è multiplo di 5, in altri termini un numero intero multiplo di 3 ma non di 5 verifica *non P* . Si osservi, inoltre, che P è la congiunzione di due proposizioni P_1 : *n è un numero intero multiplo di 3* e di P_2 : *n è un intero multiplo di 5*. Si vede, quindi, che *non $(P_1 \text{ e } P_2)$* è *non P_1 o non P_2* .

12.4.2 Caso della proposizione P o Q

Esaminiamo la proposizione: P : *il numero x è uguale a 2 o a 3*. P è del tipo P_1 o P_2 , in altri termini il numero x che si sta considerando può essere 2 oppure 3. Negare P significa negare che x possa essere sia 2 sia 3, quindi *non P* è del tipo *non P_1 e non P_2* .

12.4.3 Esercizi

Negare le proposizioni seguenti:

[23] Il quadrilatero $ABCD$ è un quadrato e le sue diagonali sono perpendicolari.

[24] L'intero n è divisibile per 3 e per 8.

[25] La funzione da considerarsi deve essere pari o dispari.

12.4.4 Negazione di una proposizione universale

Esaminiamo la proposizione: *tutti gli allievi di questa classe hanno ottenuto almeno 18 nell'esame di Geometria e Algebra Lineare I*. La sua negazione è necessariamente: *esiste almeno un allievo di questa classe che non ha ottenuto la sufficienza nell'esame di Geometria e Algebra Lineare I*.

Si deduce che se una proposizione P si enuncia mediante il quantificatore universale $\forall$ nel modo seguente: $\forall x$ appartenente ad un insieme E x possiede una proprietà, allora la sua negazione *non P* deve essere: $\exists x \in E$ che **non** possiede questa proprietà.

12.4.5 Esercizi

Enunciare le seguenti proposizioni facendo uso del quantificatore universale e scrivere le loro negazioni:

[26] f è una funzione pari su $\mathbb{R}$.

[27] f è una funzione dispari su $\mathbb{R}$.

[28] f è una funzione positiva su $\mathbb{R}$.

[29] f è una funzione crescente su $\mathbb{R}$.

[30] Ogni numero intero è la somma di due quadrati di numeri interi.

12.4.6 Negazione di una proposizione esistenziale

Si consideri per esempio la proposizione P : *esiste un numero intero n tale che n^2 abbia come ultima cifra 3*, la sua negazione è necessariamente: *un tale intero non esiste*, ossia: *ogni numero intero elevato al quadrato non avrà mai 3 come ultima cifra*.

Si deduce la proposizione P di tipo esistenziale, enunciata come: $\exists x$ *appartenente ad un insieme E che possiede una determinata proprietà* ha come negazione *non P* del tipo $\forall x \in E$ x **non** possiede questa proprietà.

12.4.7 Esercizi

Enunciare le seguenti proposizioni facendo uso degli opportuni quantificatori, scriverne la negazione e dire se la proposizione di partenza e la sua negazione sono vere o false.

[31] Esiste almeno un numero reale x tale che $x^2 + x = 0$.

[32] Per ogni numero reale x esiste un numero reale y tale che $3x + 2y - 6 = 0$.

12.4.8 Contrapposizione di una implicazione

Si consideri questo esempio: la proposizione P : *ABC è un triangolo rettangolo in A* implica la proposizione Q : *il triangolo ABC è tale che $d(BC)^2 = d(AB)^2 + d(AC)^2$* . (d indica la distanza tra i punti). La negazione della formulazione precedente è: *non Q: il triangolo ABC è tale che $d(BC)^2 \neq d(AB)^2 + d(AC)^2$* implica *non P: il triangolo ABC non è rettangolo in A*.

In generale, la negazione della formulazione: $P \Rightarrow Q$ è: $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$.

Si presti particolare attenzione a non cadere nella trappola di negare $P \Rightarrow Q$ scrivendo $\text{non } P \Rightarrow \text{non } Q$.

12.4.9 Esercizi

Per ciascuna delle seguenti implicazioni scrivere esplicitamente la contrapposizione:

[33] L'oggetto è un cubo $\Rightarrow$ l'oggetto ha 6 facce.

[34] $x = 29 \Rightarrow x > 10$.

[35] $ABCD$ è un rettangolo $\Rightarrow ABCD$ è un parallelogramma.

[36] Se un triangolo ha tre angoli uguali allora ha tre lati uguali.

12.5 La Dimostrazione

In questo paragrafo sono elencate brevemente le principali tecniche di dimostrazione, alcune delle quali sono già state usate nei capitoli precedenti.

12.5.1 Dimostrare un'implicazione

Si tratta del tipo di problema più frequente in matematica: a partire da un insieme H di ipotesi (Hp) si tratta di dimostrare una proposizione C detta tesi (Ts).

A titolo di esempio procediamo con la dimostrazione del seguente Teorema:

Dati due numeri reali x, y tali che $0 < x < 2$ e $0 < y < 2$ allora $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1$.

Prima di iniziare la dimostrazione vera e propria si **devono** individuare le ipotesi e la tesi e scriverle accuratamente. Nel nostro caso si ha:

Hp: $x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < 2, 0 < y < 2$. Ts: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1$.

Solo a questo punto si procede con la dimostrazione. Per esempio nel nostro caso si ha:

Dimostrazione: La funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Dalle ipotesi segue: $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}$, sommando membro a membro si ha la tesi.

In realtà, anche se l'esempio riportato è molto semplice, abbiamo proceduto alla dimostrazione per **implicazioni successive** costruendo un organigramma del tipo: $H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \dots \Rightarrow C$ dove ogni proposizione C_i si deduce dalle proposizioni precedenti o da parte di esse.

Nel nostro caso C_1 è stata: la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$, C_2 è stata: $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ e così via.

12.5.2 Dimostrazione per trasformazione della tesi

Al posto di dimostrare che H implica C si sostituisce C con una proposizione C_n che si deve dimostrare essere equivalente a C magari mediante un procedimento di equivalenze successive. L'organigramma risulta essere: $H \Rightarrow C_n \Leftrightarrow C_{n-1} \dots \Leftrightarrow C_1 \Leftrightarrow C$.

Esempio 12.8 Dimostrare che $2\sqrt{xy} \leq x + y, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Si osserva subito che dall'ipotesi $H : \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ indica l'insieme dei numeri reali positivi o nulli) non si possono dire grandi cose, se nonchè $\sqrt{xy}$ esiste. Si sostituisce la tesi: $C : 2\sqrt{xy} \leq x + y$ con una proposizione equivalente: $C_1 : 4xy \leq (x + y)^2$ (N.B. $C_1 \Leftrightarrow C$ in quanto $x, y \in \mathbb{R}^+$). A questo punto dimostrare C equivale a dimostrare C_1 che equivale a dimostrare: $C_2 : 4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy$, ossia equivale a dimostrare $C_3 : 0 \leq (x - y)^2$. Ma C_3 è banalmente vera, quindi C è vera.

Si rilegga attentamente la dimostrazione appena presentata e si osservi che l'ipotesi $x \geq 0, y \geq 0$ è stata essenziale solo per dimostrare che $C \Leftrightarrow C_1$, anche se C_3 è vera per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, ma non per questo la tesi è vera $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

12.5.3 Esercizi

[37] Siano a, b, c numeri reali positivi, dimostrare che $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} \geq \frac{a}{a+c}$.

[38] Siano a, b, c numeri reali positivi e $a \leq b + c$. Dimostrare che $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.

[39] Sia $\mathcal{C}$ un cerchio di centro O e di diametro AB . Sia M un punto di $\mathcal{C}$ $M \neq A$ e $M \neq B$ e R un punto di AB , $R \neq A$ e $R \neq B$. Si tracci la perpendicolare in R ad AB e si indichino con P e Q i punti di intersezione di tale retta con AM e BM rispettivamente. Sia I il punto di intersezione di BP e AQ . Si dimostri che I appartiene a $\mathcal{C}$.

12.5.4 Un errore da evitare

Si presti una particolare attenzione a non commettere l'errore di condurre una dimostrazione *partendo dalla tesi*. Proponiamo un esempio di tale errore, quindi un esempio **sbagliato**.

Si vuole dimostrare che l'equazione: $x^2 - 5x + \pi = 0$ ha due radici positive. Si suppone **errore!** che le radici siano positive, il loro prodotto è positivo (infatti è π) dunque esse devono essere positive. Fine della dimostrazione.

Questo ragionamento non prova nulla, solo che se due radici sono positive allora sono positive, visto che lo è il loro prodotto! Si provi a formulare in modo corretto la dimostrazione.

Schematizzando: volendo dimostrare che da H segue C , l'errore indicato si schematizza come:

$$H \Rightarrow C_n \Leftarrow \dots \Leftarrow C_1 \Leftarrow C.$$

12.5.5 Dimostrare che P e Q sono equivalenti

Un modo per dimostrare che $P \Leftrightarrow Q$ è di provare due fatti: $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, ci si riconduce, quindi a dimostrare due implicazioni successive come descritto nel Paragrafo 12.5.1.

Osservazione 12.2 Quando si dimostra che due proposizioni sono equivalenti non ci si sta occupando di dimostrare che esse sono vere, ma se una è vera allora anche l'altra è vera, oppure se una è falsa anche l'altra è falsa.

Esempio 12.9 Dimostrare che la proposizione P : n è un numero intero pari è equivalente a Q : n^2 è un numero intero pari.

Iniziamo con il dimostrare: $P \Rightarrow Q$.

Supponendo n pari, allora $n = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$. Segue: $n^2 = 4p^2$, quindi n^2 è pari.

Per dimostrare che $Q \Rightarrow P$ si può procedere per assurdo (cfr. Paragrafo 12.5.6).

In alternativa, per dimostrare che $P \Leftrightarrow Q$ si può procedere per equivalenze successive, ossia per dimostrare $P \Leftrightarrow Q$ si può dimostrare che $P \Leftrightarrow P_1$, poi $P_1 \Leftrightarrow P_2$ e così via fino a provare che $P_n \Leftrightarrow Q$, dove $P_1, P_2, \dots, P_n$ sono proposizioni che man mano vengono ad essere determinate in modo equivalente tra di loro. Il seguente esempio vuole illustrare un caso molto facile di questo procedimento.

Esempio 12.10 Dati i punti A, B del piano e il punto medio O del segmento AB si dimostri che definire la simmetria f rispetto al punto O equivale a definire la funzione f che associa ad ogni punto M del piano il punto M' che si ottiene come quarto vertice del parallelogramma di lati AM e MB e diagonale AB .

Dopo aver fatto il disegno si deve osservare che M e M' sono gli estremi della seconda diagonale del parallelogramma $AMBM'$, quindi dimostrare la tesi equivale a dimostrare che f è la funzione che associa a M il suo simmetrico rispetto ad O , da cui segue subito la soluzione dell'esercizio.

In generale si utilizza il metodo per equivalenze successive quando le equivalenze intermedie sono ben conosciute, per esempio perchè sono state dimostrate in precedenza sotto forma di teorema, oppure sono già state studiate sotto forma di regole, quindi non necessitano di dimostrazione. In caso di dubbio su una qualsiasi di una delle equivalenze che si devono usare si deve procedere con il primo metodo.

12.5.6 Ragionamento per assurdo

Per dimostrare un'implicazione del tipo: H implica C si può procedere mediante il **ragionamento per assurdo** che consiste nell'assumere l'ipotesi H e la negazione della tesi: $\text{non } C$. Partendo da tali ipotesi si deve pervenire ad una contraddizione. Si ricorda che è stato già introdotto questo metodo di dimostrazione nel Capitolo 2 per provare che $\sqrt{2}$

non è un numero razionale. Per meglio chiarire la procedura enunciativa riportiamo un altro esempio.

Esempio 12.11 Sia $n \in \mathbb{N}$, dimostrare che se n^2 è un numero intero pari allora n è pari. Procediamo per assurdo assumendo come ipotesi che n^2 sia un numero naturale pari e che esista almeno un numero n non pari (negazione della tesi). Allora un tale n dispari si può scrivere come $n = 2p + 1$ con $p \in \mathbb{N}$, quindi $n^2 = 4p^2 + 2p + 1$, ossia n^2 è dispari, in contrasto con l'ipotesi.

Osservazione 12.3 A partire dall'esempio appena descritto, si osservi che, procedendo per assurdo, si è in realtà provato che *non* C implica *non* H , ossia che H implica C , in altre parole si è dimostrato la contrapposizione (cfr. Paragrafo 12.4.8).

12.5.7 Esercizi

[40] Dimostrare che dati p, q numeri interi dispari, allora $p^2 + q^2$ non è divisibile per 4.

[41] Quattro persone: A, B, C, D devono dividere tra di loro la somma di 1.000\$. Si dimostri che almeno una persona riceve almeno 250\$.

[42] Dimostrare che due numeri naturali consecutivi sono primi tra loro.

12.5.8 Ragionamento per un numero finito di passi

Per dimostrare che una proposizione è vera per tutti gli elementi di un insieme E , si può dimostrare che è vera per tutti i sottoinsiemi (non vuoti) che formano una partizione di E (cfr. Paragrafo 1.2.5). Sarà utile usare questo metodo nel caso particolare in cui E è un insieme finito, allora è sufficiente provare la tesi per ciascuno degli elementi di E . Gli esempi che seguono illustrano questo procedimento.

Attenzione al caso in cui si deve dimostrare che una proprietà è vera per insiemi che contengono infiniti elementi e che non possono essere suddivisi in un numero finito di sottoinsiemi, in questi casi non si può usare la tecnica qui indicata.

Esempio 12.12 Dimostrare che il quadrato di un numero intero non può avere come ultima cifra il numero 3.

Per fare ciò si può procedere pensando che le possibili ultime cifre di un numero n sono 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ossia si hanno solo 10 possibilità. In altri termini, il numero n

avrà una delle 10 forme seguenti $n = 10k, n = 10k + 1, n = 10k + 2, n = 10k + 3, n = 10k + 4, n = 10k + 5, n = 10k + 6, n = 10k + 7, n = 10k + 8, n = 10k + 9, k \in \mathbb{Z}$, elevando ciascuna espressione al quadrato si osserva che non si può mai avere 3 nell'ultima cifra.

Esempio 12.13 Rappresentare graficamente l'insieme E dei punti $M = (x, y)$ del piano tali che $|x| + |y| = 1$.

In generale si procede dividendo l'insieme E nei quattro sottoinsiemi:

1. il sottoinsieme di E dei punti $M = (x, y)$ tali che $x \geq 0, y \geq 0$;
2. il sottoinsieme di E dei punti $M = (x, y)$ tali che $x > 0, y < 0$;
3. il sottoinsieme di E dei punti $M = (x, y)$ tali che $x < 0, y > 0$;
4. il sottoinsieme di E dei punti $M = (x, y)$ tali che $x < 0, y < 0$.

12.6 Esercizi

[43] Dimostrare per un numero finito di passi che 97 è un numero primo.

12.6.1 Dimostrare un'uguaglianza

Per dimostrare un'uguaglianza $A = B$ tra numeri, tra funzioni, tra insiemi si dispone di diversi metodi a seconda del tipo di uguaglianza da dimostrare.

Si ricorda che nel primo capitolo si è già indicato il metodo per dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi $A = B$ provando le due inclusioni $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, inoltre si è già osservato che per dimostrare $A \subseteq B$ è necessario dimostrare che ogni elemento di A appartiene anche a B .

Nel caso dell'uguaglianza $A = B$ tra due identità si può trasformare la scrittura di A , mediante passaggi algebrici autorizzati, fino ad ottenere B , cercando di giustificare rigorosamente ogni passaggio effettuato con proprietà **precedentemente** dimostrate. Per esempio per provare che $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ si scrive: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$. Analogamente si può partire da B e ottenere A .

Un altro metodo per provare che $A = B$ consiste nel dimostrare che $A = C$ e $B = C$. Per esempio per dimostrare che:

$$(1 - \sin \alpha) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha} = \sec \alpha + \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}$$

si può dimostrare che sia il primo membro sia il secondo membro sono uguali a $\tan \alpha$.

Da non dimenticare che dimostrare che $A = B$, nel caso di A e B funzioni, equivale a dimostrare $A - B = 0$.

12.7 Problemi di Determinazione di Insiemi

Contrariamente ai problemi citati nei paragrafi precedenti, a volte il risultato a cui si vuole pervenire non é noto, come nel caso della determinazione di luoghi geometrici e del calcolo delle soluzioni di una equazione di un sistema lineare. Poichè abbiamo già trattato nei capitoli precedenti esempi di questo tipo non riteniamo necessario indicare i metodi per la loro determinazione in questo contesto, anche se la loro trattazione costituisce un paragrafo importante del Problema di Determinazione di Insiemi.

12.8 Problemi di esistenza

Per esempio si considerino i due problemi seguenti:

Esempio 12.14 Scelto un riferimento cartesiano nel piano, esiste una parabola che passi per i punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (2, 3)$ e $D = (3, 5)$?

Esempio 12.15 Esiste un polinomio di terzo grado che assuma il valore 1 in 0, il valore 2 in 1 e la sua derivata prima assuma il valore 5 in 0?

Se non si è in grado di rispondere direttamente a questo tipo di domande si può procedere in due modi.

1. Si suppone l'esistenza di un oggetto che possieda la proprietà richiesta, poi a partire da quest'ipotesi si deducono altre condizioni che ne permettono l'identificazione. Ad esempio, per l'Esercizio 12.14 si inizia supponendo che la curva di equazione $y = ax^2 + bx + c$ passi per i punti dati, allora si ricavano le relazioni che intercorrono tra i coefficienti a, b, c e si procede alla loro determinazione (usando altre tecniche di calcolo che devono essere note).
2. Si procede per equivalenze, ossia: dire che esiste un oggetto che verifica le condizioni richieste equivale a dire che Nel caso dell'Esercizio 12.14 si può affermare che l'esistenza della parabola richiesta equivale all'esistenza di tre numeri reali a, b, c tali che ecc. e si prosegue per equivalenze successive.

12.8.1 Esercizi

[44] Completare l'Esempio 12.14

[45] Completare l'Esempio 12.15

12.9 Soluzioni degli Esercizi

[1] $P \Rightarrow Q$.

[2] Da P non segue Q , infatti $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$.

[3] $P \Rightarrow Q$.

[4] Falso, per esempio quando sono le 9 le lancette formano un angolo retto.

[5] Falso perchè anche $x = 0$ verifica P .

[6] Falso, a meno che si aggiunga l'ipotesi $x \in \mathbb{N}$.

[7] P non implica Q infatti se $x = 0$ e $y = 5$ allora $xy = 0$.

[8] $d(A, M)^2 + d(B, M)^2 = d(A, B)^2$, d indica la distanza tra i due punti considerati.

[9] Per esempio:

1. due numeri primi hanno solo due divisori.
2. Due triangoli uguali hanno angoli uguali.
3. Due triangoli simili hanno angoli uguali.
4. Il quadrato di un numero negativo è positivo.

5. Un triangolo con lati di lunghezza $x^2 + 1, x^2 - 1, 2x$ è retto.

6. Non esistono numeri reali tali che $x^2 = -4$.

[10]

1. $Q \Rightarrow P$.

2. $Q \Rightarrow P$.

3. $Q \Rightarrow P$.

4. $Q \Rightarrow P$.

5. $Q \Rightarrow P$.

6. $Q \Rightarrow P$.

7. $Q \Rightarrow P$.

[11] Se n è un numero intero divisibile per 15 allora è divisibile per 5 e per 15, vero.

[12] Se $ab > 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ allora $a > 0, b > 0$, falso per esempio $(-2)(-3) = 6$.

[13] $P \Leftrightarrow Q$.

[14] P non equivale a Q , infatti se vale P x può anche essere $-1 \leq x \leq 0$.

[15] Vero.

[16] $|a| \leq b^2$.

[17] $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\mathbb{R}^+$ indica l'insieme dei numeri reali positivi o nulli.

[18] $\exists a, b \in \mathbb{R}^+ \mid \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

[19] $\exists! x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 = x^2 + 1$.

[20] $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \mid ab = a + b$.

[21] La corretta definizione di inverso rispetto al prodotto in $\mathbb{Q}$ è: $\forall a \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q} \mid ax = xa = 1$ (ciascun elemento ha il proprio inverso); scambiando l'ordine dei quantificatori si legge: $\exists x \in \mathbb{Q}, \forall a \in \mathbb{Q} \mid ax = xa = 1$ e si sbaglia perchè si afferma che esiste un solo inverso per ogni elemento di $\mathbb{Q}$.

[22] La proposizione così enunciata è falsa perchè afferma che $\mathbb{R}$ è tutto contenuto in $[n, n + 1], n \in \mathbb{Z}$. Scambiando i quantificatori si ha: $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \leq n + 1$ che è vero.

[23] Il quadrilatero $ABCD$ non è un quadrato, oppure le diagonali di $ABCD$ non sono perpendicolari, (il rombo è un esempio di questa proposizione: non è un quadrato ma ha le diagonali perpendicolari).

[24] L'intero n non è divisibile per 3 oppure l'intero n non è divisibile per 8.

[25] La funzione da considerare non deve essere nè pari nè dispari.

[26] $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$; la negazione è $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq f(-x)$.

[27] $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$; la negazione è $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq -f(x)$.

[28] $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$; la negazione è: $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0$.

[29] $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x_2$ segue $f(x_1) \leq f(x_2)$; la negazione è $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x_2$ per cui $f(x_1) > f(x_2)$.

[30] $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists a, b \in \mathbb{Z} \mid n = a^2 + b^2$; la negazione è $\exists n \in \mathbb{Z} \mid n \neq a^2 + b^2, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

[31] $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0$: è vero $x = 0, x = -1$. La sua negazione $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \neq 0$: falso.

[32] $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid 3x + 2y - 6 = 0$, è vero: si tratta proprio di un altro modo di scrivere le soluzioni di un'equazione di primo grado a due variabili (come spiegato nel Capitolo 3), ossia: $x = t, y = -\frac{3}{2}t + 3, \forall t \in \mathbb{R}$. La negazione della proposizione è: $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, 3x + 2y - 6 = 0$: falso.

[33] L'oggetto non ha 6 facce quindi non può essere un cubo.

[34] Se $x \leq 10$ allora $x \neq 29$.

[35] Se $ABCD$ non è un parallelogramma allora $ABCD$ non può essere un rettangolo.

[36] Se un triangolo non ha tre lati uguali allora non ha tre angoli uguali.

[37] Si trasformi successivamente la disuguaglianza da dimostrare fino ad ottenere: $abc = a^2b + ab^2 + cb^2 \geq 0$ che è vera essendo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

[38] Si trasformi successivamente la disuguaglianza da dimostrare fino ad ottenere: $a \leq b + c + 2bc + abc$ che è vera per le ipotesi formulate.

[39] Trasformare la tesi nell'affermazione: dimostrare che BI e AQ sono perpendicolari, dunque BI è un'altezza del triangolo ABQ .

[40] Si supponga per assurdo che esista $k \in \mathbb{Z}$ tale che $p^2 + q^2 = 4k$ e che p e q siano dispari.

[41] Si supponga per assurdo che nessuno tra A, B, C, D riceva 250\$ o di più di 250\$.

[42] Si supponga per assurdo che $p = ka$ e $p + 1 = kb$.

[43] 97 è un numero primo: non è necessario provare che tutti i numeri da 2 a 96 non sono divisori, è sufficiente provare che tutti i numeri minori di $\sqrt{97}$ non sono divisori, tra cui si escludono già tutti i numeri pari, 3 e 9 per i ben noti criteri di divisibilità.

[44] Non esistono parabole che verificano le condizioni richieste.

[45] $(-b - 4)x^3 + bx^2 + 5x + 1, \forall b \in \mathbb{R}.$

Precorso di Geometria

Esercizi: Insiemi e funzioni

12 settembre 2013

Nei seguenti problemi $A, B, C, \dots$ denotano sottoinsiemi arbitrari di un insieme X fissato.

Esercizio 1. Esprimere per elencazione i seguenti insiemi:

- a) le note musicali;
- b) le vocali della parola “ungulato”
- c) i fattori primi di 60.

Esercizio 2. Esprimere i seguenti insiemi mediante una loro proprietà caratterizzante:

- a) $\{1, 8, 15, 22, 29, 36, \dots\}$;
- b) $\{s, f, i, a, c\}$;
- c) $[-1, 1)$.

Esercizio 3. Siano $X = \mathbb{R}, A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 0\}, B = \{1, -1, 2\}$ e $C = \{1, \{2, 3\}\}$.

- a) Determinare l'insieme delle parti di B e l'insieme delle parti di C .
- b) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

$$\begin{aligned} \{1\} \not\subseteq A, \quad 1 \in C, \quad \{1\} \in A, \quad 2 \in C, \quad 1 \subseteq A, \quad 3 \in C, \\ 1 \in A, \quad \{1\} \in C, \quad A \subseteq B, \quad \{2, 3\} \in C, \quad B \subseteq A, \quad \{2\} \in C. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Siano $X = \mathbb{N}, A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 10\}$. Calcolare:

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad \mathcal{C}_X(A), \quad \mathcal{C}_X(B).$$

Esercizio 5. Siano $X = \mathbb{R}, Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ e $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 21\}$. Determinare $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y \cup Z), \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y), \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Z)$, e verificare che $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y \cup Z) = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Y) \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Z)$.

Esercizio 6. Dimostrare le seguenti identità di insiemi:

- a) $A \cap (B \cup C) \subseteq A \cap B$;
- b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- d) $\mathcal{C}_X(A \cup B) = \mathcal{C}_X(A) \cap \mathcal{C}_X(B)$;
- e) $\mathcal{C}_X(A \cap B) = \mathcal{C}_X(A) \cup \mathcal{C}_X(B)$.

Esercizio 7. Provare che le seguenti affermazioni sono false esibendo dei controesempi espliciti:

- a) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$;
- b) $(B \cup A) \cap C = B \cup (A \cap C)$;
- c) $A \setminus \mathcal{C}_X(B) = \mathcal{C}_X(\mathcal{C}_X(A) \setminus B)$.

Esercizio 8. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq n + 1\}$. Calcolare

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Esercizio 9. Siano $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{1, 2\}$. Scrivere mediante elencazione $A \times B$, $A \times A$, $(A \times A) \cap (A \times B)$, $A \times (A \cap B)$, $(A \times A) \cup (A \times B)$, $A \times (A \cup B)$, $\mathcal{P}(B \times B)$ e $\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B)$.

Precorso di Geometria

Esercizi: Funzioni e relazioni

12 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < 10\}$. Scrivere come sottoinsieme di $X \times X$ mediante elencazione le seguenti relazioni su X ; per ognuna di esse dire se è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva.

- a) $x\rho y : x$ è il successivo di y ;
- b) $x\rho y : x$ divide y ;
- c) $x\rho y : xy < 10$.

Esercizio 2. Per ognuna delle seguenti relazioni su $\mathbb{R}$, dire se si tratta di una relazione di equivalenza e, in caso affermativo, determinare le classi di equivalenza:

- a) $x\rho y : xy \leq 0$;
- b) $x\rho y : xy \geq 0$

Esercizio 3. Trovare un esempio di relazione su $\mathbb{N}$ che sia

- a) riflessiva ma non simmetrica né transitiva;
- b) simmetrica ma non riflessiva né transitiva;
- c) transitiva ma non riflessiva né simmetrica

Esercizio 4. Sia $f(n) = n^2 - 5n + 2$. Dire per quali coppie seguenti di insiemi A, B , f definisce una funzione $f : A \rightarrow B$:

- a) $A = B = \mathbb{N}$;
- b) $A = \mathbb{N}; B = \mathbb{Z}$;
- c) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\}; B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da $f(n) = 2n^2 - 3n + 5$. Determinare $f(0), f^{-1}(5), f^{-1}(0)$. Si tratta di una funzione suriettiva? Si tratta di una funzione iniettiva?

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione data da $f((n, m)) = \min\{m, n\}$.

- a) Determinare l'immagine dei sottoinsiemi $\mathbb{N} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{N}$.
- b) Determinare gli insiemi controimmagine $f^{-1}(n)$ per $n = 4$ e poi per un n generico.
- c) Dire se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione data da $f((n, m)) = m^2 + n$.

- a) Determinare $im(f)$ e l'immagine dei sottoinsiemi $\mathbb{Z} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{Z}$.
- b) Determinare gli insiemi controimmagine $f^{-1}(4)$ e $f^{-1}(K)$, dove K è l'insieme dei numeri interi strettamente negativi.
- c) Dire se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 8. Siano X, Y e Z insiemi e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ delle funzioni. Si determini la composizione $g \circ f : X \rightarrow Z$ in ciascuno dei casi seguenti:

- a) $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = (x - 1)^2$.
- b) $X = Z = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.
- c) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$ e $g(x) =$ il più piccolo numero pari $\geq x$.

Esercizio 9. Provare che la funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\varphi((x, y)) = (x + y, x - y)$ è biiettiva e determinare la sua inversa.

Esercizio 10. Trovare un esempio di insieme A e di funzione $f : A \rightarrow A$ tali che $f \circ f = f$ (che non sia id_A).

Esercizio 11. In ognuno dei casi seguenti, dire se $*$ è un'operazione (binaria interna) su X . In caso affermativo, dire se è commutativa, associativa, se esiste l'elemento neutro, e (nel caso l'elemento neutro esista) se ogni elemento ha un inverso.

- a) $X = \mathbb{N}$, $x * y = x^2 y$;
- b) $X = \mathbb{N}$, $x * y = x^2 - y$;
- c) $X = \mathbb{R}^2$, $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$;
- d) $X = \mathbb{R}^2$, $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$.