Prova scritta di Meccanica Quantistica II

Lunedì 29 marzo 2004

Compito n^o 2

1.- Si consideri un insieme di sistemi descritti dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2I} + \omega L_z$$

di cui si sa che, all'istante $t = 0$, la probabilità di trovare un sistema nello stato

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle + |1, 0\rangle)$$

è $2/3$, mentre quella di trovarlo nello stato

$$|\psi_2\rangle = |1, 1\rangle$$

è $1/3$. (N.B. Si è usata la notazione standard $|l, m\rangle$ per gli autostati di $\mathbf{L}^2$ ed L_z).

a) Si calcoli il valor medio dell'osservabile L_x al tempo $t = 0$.

b) Si determini come tale valor medio varia col tempo.

N.B. Per sveltire i calcoli si ricordi che nella base in cui L_z è diagonale, a fissato $l = 1$, gli elementi di matrice dell'operatore L_x sono

$$(L_x)_{mn} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1}).$$

2.- Data l'hamiltoniana

$$H_0 = H_1 + H_2,$$

dove

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_i^2 = (a_i^\dagger a_i + 1/2)\hbar\omega, \qquad i = 1, 2$$

(si tratta di un oscillatore armonico isotropo bidimensionale),

i) determinarne lo spettro.

ii) Data la "perturbazione"

$$H' = \epsilon\left(\frac{p_1 p_2}{m} - kx_1 x_2\right) = \epsilon\hbar\omega(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2),$$

calcolare al primo ordine perturbativo non banale le correzioni da essa indotte sul livello fondamentale di H_0.

iii) *Facoltativo*

Diagonalizzare esattamente l'hamiltoniana $H = H_0 + H'$, introducendo le variabili (canoniche) $X = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ e $x = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ e i loro momenti canonicamente coniugati.

N.B. Una possibile definizione degli operatori di distruzione è

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p_i - im\omega x_i).$$