

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si consideri una particella di massa m nella buca di potenziale di profondità infinita con $V(x) = 0$ per $|x| < a$ e $V(x) = \infty$ per $|x| > a$. La funzione d'onda normalizzata per $t = 0$ è

$$\psi(x) = A x (|x| - a), \quad |x| < a, \quad (1)$$

con $A = \sqrt{15/a^5}$, mentre ovviamente si annulla per $|x| > a$.

- Si spieghi, usando solo argomenti dimensionali, perché la costante di normalizzazione A è proporzionale a $a^{-5/2}$.
- Lo stato descritto da $\psi(x)$ è un autostato dell'operatore parità? In tal caso, qual è l'autovalore?
- Si calcoli il valor medio dell'energia E .
- Quali sono i possibili risultati di una misura di energia sullo stato descritto dalla funzione d'onda $\psi(x)$, e con quale probabilità possono essere ottenuti?
- Si scriva la funzione d'onda al tempo t .
- Dopo quanto tempo il sistema ritorna per la prima volta nello stesso stato fisico in cui si trovava al tempo $t = 0$?

Notare che è possibile rispondere alla domanda f. anche senza aver completato i calcoli relativi alla domanda d.

1.2 Problema N. 2

Un atomo di idrogeno si trova in uno stato $|\psi\rangle$ per il quale sono note le seguenti informazioni.

- Misurando L_z si trova con certezza $L_z = 0$.
- Misurando l'energia si trova con certezza un valore E tale che $-6 \text{ eV} < E < -3 \text{ eV}$.
- Misurando L_x si trova che lo scarto quadratico medio $(\Delta L_x)_\psi = \hbar$.

E' inteso che le misure sono effettuate su un gran numero di sistemi identici tutti nello stato $|\psi\rangle$.

Si determini

- Il valor medio $\langle L_x \rangle_\psi$.
- I possibili risultati di una misura di L^2 con le rispettive probabilità.
- Se la parità dello stato sia definita e in tal caso quale sia.
- Lo scarto quadratico medio $(\Delta L_y)_\psi$.

2 Formule Utili

- Autofunzioni normalizzate dell'hamiltoniana della buca di altezza infinita e relativi autovalori.

$$\begin{aligned}\psi_{2n}(x) &= \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) , \\ \psi_{2n+1}(x) &= \sqrt{\frac{1}{a}} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\right) ,\end{aligned}\tag{2}$$

con

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} n^2 .\tag{3}$$

- Integrali utili

$$\begin{aligned}\int dz z^2 \sin z &= (2 - z^2) \cos z + 2z \sin z , \\ \int dz z \sin z &= \sin z - z \cos z .\end{aligned}\tag{4}$$

- Energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno.

$$E_1 = -13,6 \text{ eV} .\tag{5}$$

- Operatori di innalzamento e abbassamento.

$$\begin{aligned}L_\pm &= L_x \pm iL_y , \\ L_\pm |lm\rangle &= \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle .\end{aligned}\tag{6}$$