Esercizio 1.

Si consideri la particella di massa m costretta a muoversi in una buca di potenziale infinita di larghezza $2L$:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x \notin [-L, L] \\ 0 & x \in]-L, L[\end{cases} \quad .$$

All'istante iniziale $t_0 = 0$ si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle \right)$$

dove

$$u_1(x) = \langle x|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) , u_2(x) = \langle x|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad .$$

Calcolare dapprima all'istante iniziale $t_0 = 0$ e poi per ogni $t > 0$

1. il valore medio dell'energia;
2. il valore medio della posizione.
3. Rispondere alle stesse domande qualora all'istante iniziale l'**unica** informazione sul sistema sia che esso ha probabilitá $\frac{1}{3}$ di stare nello stato $|1\rangle$ e $\frac{2}{3}$ di stare nello stato $|2\rangle$.

[Formula utile: $\sin\alpha \, \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right) \right)$]

Esercizio 2.

Si consideri il moto **relativo** di due elettroni. Dire quali sono i valori possibili dello spin totale $\vec{S}^2$ (con $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$) e del momento angolare totale $\vec{J}^2$ (con $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$), se la funzione d'onda orbitale é:

1. $\psi(r, \theta, \phi) = const.\, r^2 e^{-r^2/a^2}$
2. $\psi(r, \theta, \phi) = const. r^2 \cos\theta \quad e^{-r^2/a^2}$

dove $\vec{r} = \vec{x}_{(1)} - \vec{x}_{(2)}$ e r, θ, ϕ sono le coordinate polari sferiche di $\vec{r}$.

Esercizio 1.

All'istante iniziale $t_0 = 0$ un oscillatore armonico unidimensionale si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,|0\rangle + i|1\rangle\right)$$

dove abbiamo usato le definizioni

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle \ , a|0\rangle = 0 \ , a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \ .$$

Calcolare dapprima a $t = 0$ e poi per ogni $t > 0$

1. il valore medio dell'energia;
2. il valore medio della posizione.

Rispondere alle stesse domande qualora all'istante iniziale l'**unica** informazione sul sistema sia che esso ha probabilitá $\frac{3}{4}$ di stare nello stato $|0\rangle$ e $\frac{1}{4}$ di stare nello stato $|1\rangle$.

Esercizio 2.

Dire quali fra le seguenti funzioni

1. $\psi(r, \theta, \phi) = f(r)$
2. $\psi(r, \theta, \phi) = f(r) \sin\theta \, e^{i\phi}$
3. $\psi(r, \theta, \phi) = f(r) \sin\theta \cos\theta \, e^{i\phi}$

(dove $\vec{r} = \vec{x}_{(1)} - \vec{x}_{(2)}$, r, θ, ϕ sono le coordinate polari sferiche di $\vec{r}$ e $f(r)$ é qualsiasi funzione tale che $\psi \in L^2$), possono essere funzioni d'onda del moto **relativo** di due bosoni identici di spin zero.

Rispondere alla stessa domanda qualora i bosoni identici abbiamo spin 1 e si trovino nello stato di spin

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle_{(1)} \otimes |1,0\rangle_{(2)} - |1,0\rangle_{(1)} \otimes |1,1\rangle_{(2)}\right)$$