

Capitolo 13

Teoria delle orbite

13.1 Introduzione

Prima di affrontare lo studio dei plasmi come collezioni di particelle cariche tratteremo la fisica delle traiettorie deterministiche di particelle in campi elettromagnetici. Tuttavia in situazioni in cui i campi elettromagnetici esterni siano dominanti, questo modello, chiamato *teoria delle orbite*, permette lo studio di vari problemi di fisica dei plasmi, e in particolare dei plasmi astrofisici, quali l'accelerazione di particelle sopratermiche e l'interazione del vento solare con la magnetosfera terrestre. Successivamente, seguendo il percorso già seguito per i fluidi neutri, passeremo all'analisi delle teorie cinetiche e magnetoidrodinamiche.

La teoria delle orbite parte dall'equazione del moto di una particella di massa m e carica q soggetta alla forza di Lorentz; nel caso non-relativistico e utilizzando il sistema gaussiano per l'elettromagnetismo (secondo la tradizione dell'astrofisica) tale equazione risulta:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (13.1)$$

dove abbiamo trascurato la forza di *reazione di radiazione* che risulta importante solo in alcuni casi specifici astrofisici. I campi elettromagnetici sono considerati fissati da sorgenti esterne.

Come noto dalla fisica elementare, nel caso di campo elettrico nullo, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, e di campo magnetico costante, $\mathbf{B} = \text{cost}$, il moto perpendicolare alla direzione del campo magnetico è un moto circolare uniforme alla cosiddetta *frequenza di girazione* o *frequenza ciclotrone*:

$$\omega_c = \frac{|q|B}{mc} \quad (13.2)$$

e con *raggio di girazione*:

$$r_c = \frac{mu_{\perp}c}{|q|B}. \quad (13.3)$$

Questo risultato si ricava dalla soluzione della (13.1) per \mathbf{u}_\perp :

$$\frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} = \mathbf{u}_\perp \times \boldsymbol{\omega}_c, \quad (13.4)$$

che può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{u}_\perp = \omega_c r_c (\hat{\mathbf{e}}_1 - i\hat{\mathbf{e}}_2) e^{-i\omega_c t} \quad (13.5)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + ir_c (\hat{\mathbf{e}}_1 - i\hat{\mathbf{e}}_2) e^{-i\omega_c t} \quad (13.6)$$

con $\hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_2$ versori degli assi coordinati nel piano normale al campo magnetico. La traiettoria circolare viene percorsa, per un osservatore allineato con il campo e con la testa nella direzione del campo stesso, in verso orario per cariche positive e antiorario per cariche negative. La componente \mathbf{u}_\parallel della velocità parallela al campo magnetico non è invece influenzata dal campo magnetico, e dà origine ad una traslazione del moto circolare a velocità costante, creando una traiettoria elicoidale a passo costante. Ovviamente il lavoro della forza magnetica è nullo:

$$\int \left(\frac{q}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int \left(\frac{q}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{u} dt = 0. \quad (13.7)$$

Nel caso relativistico l'equazione del moto utilizza il momento relativistico $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u}$, per cui si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (13.8)$$

e la frequenza ciclotrone relativistica è:

$$\boldsymbol{\omega}_{c,rel} = \frac{|q|\mathbf{B}}{m\gamma c}. \quad (13.9)$$

In Tabella 13.1 sono riportati i valori dei campi magnetici caratteristici e le corrispondenti frequenze di ciclotrone per elettroni nel caso di plasmii astrofisici e di laboratorio.

Anche quando il moto della carica non avvenga in un campo magnetico uniforme lo studio del moto può sempre essere considerato come composto da due componenti: (1) un moto di girazione intorno al *centro di guida*, cioè il centro istantaneo del moto di girazione, e (2) il moto del centro di guida (che nel caso del campo magnetico uniforme è un moto uniforme lungo l'asse della traiettoria elicoidale). La teoria delle orbite, introdotta da Alfvén nel 1940, si sviluppa nell'ipotesi che le disomogeneità spaziali e temporali dei campi magnetici abbiano scale molto maggiori, rispettivamente, del raggio del moto istantaneo di girazione r_c e del periodo di girazione

$$\tau_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi mc}{|q|B}. \quad (13.10)$$

	B	ω_c
	Gauss	Hz
Ionosfera	0.1	2×10^6
Vento solare	$10^{-6} \div 10^{-5}$	$20 \div 200$
Corona solare	$10^{-5} \div 1$	$200 \div 6 \times 10^6$
Corone stelle magnetiche	10^3	2×10^{10}
Stelle di neutroni	10^{12}	2×10^{19}
Gas interstellare	10^{-6}	2
Gas intergalattico	$\leq 10^{-8}$	$\leq 10^{-2}$
Nuclei galattici	$\geq 10^5$	$\geq 10^{11}$
Plasma termonucleare	10^5	2×10^{12}

Tab. 13.1: Campi magnetici e frequenze di ciclotrone elettroniche di plasmi tipici

In tal modo nel moto di girazione i campi possono essere considerati costanti, l'effetto delle loro variazioni intervenendo soltanto sul moto del centro di guida. Non esistono soluzioni generali per il moto del centro di guida, ma è possibile definire alcuni tipi fondamentali caratteristici. Ad esempio in Fig. 13.1 sono riportate le traiettorie di particelle in un campo magnetico di dipolo: le linee tratteggiate sono le traiettorie calcolate da Störmer (1950) integrando numericamente le equazioni complete (13.1), le linee continue rappresentano il moto del centro di guida calcolate da Alfvén. Si ricava una perfetta consistenza del metodo della teoria delle orbite. Il vantaggio sta ovviamente nella maggior semplicità della teoria delle orbite; oggi l'uso dei calcolatori numerici ad alte prestazioni ne riduce ovviamente l'importanza. Tuttavia è utile presentare i principi della teoria in quanto permette di acquisire una maggior comprensione dei moti delle particelle cariche in campi elettromagnetici che non è così intuitiva come per la forza gravitazionale.

13.2 Moti di deriva

Consideriamo il moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme \mathbf{B} in presenza di una forza \mathbf{F} perpendicolare al campo stesso. Successivamente indicheremo i casi in cui tale situazione si verifica.

L'equazione del moto è:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{q}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (13.11)$$

con \mathbf{F} costante e perpendicolare a \mathbf{B} . In assenza del campo magnetico il moto sarebbe uniformemente accelerato nella direzione di \mathbf{F} , ma la presenza della girazione intorno alla direzione del campo magnetico modifica sostanzialmente il moto, come illustrato in Fig. 13.2, che ora andiamo a ricavare.

Poichè non esiste forza nella direzione del campo magnetico, il moto della

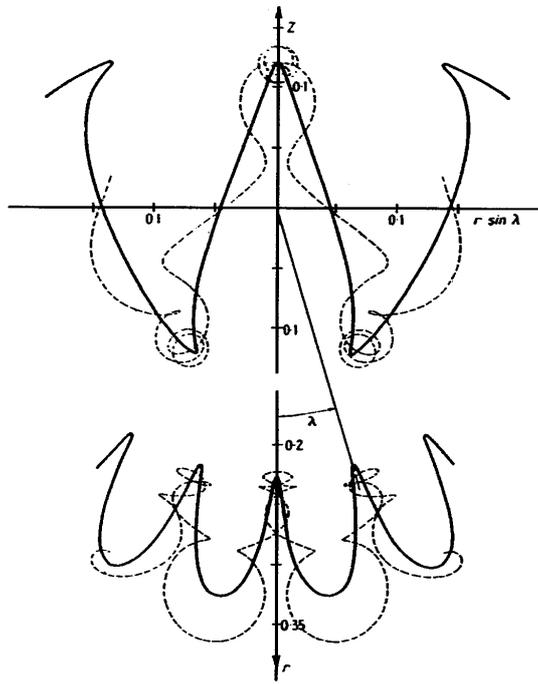


Fig. 13.1: Moto di una particella carica in un campo di dipolo magnetico; linea continua: moto del centro di guida calcolato da Alfvén; linea tratteggiata: moto calcolato in modo diretto da Störmer.

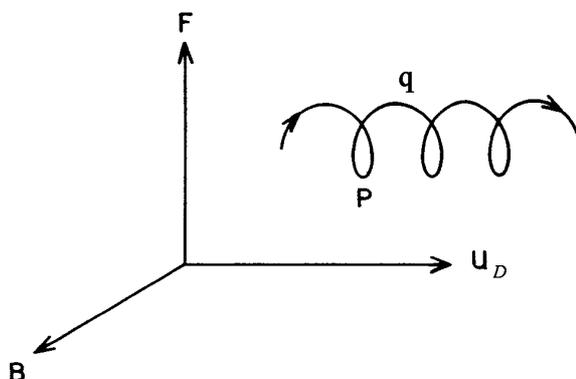


Fig. 13.2: Traiettoria di una particella carica positivamente soggetta ad un campo magnetico e ad una forza perpendicolare

carica nella direzione parallela a \mathbf{B} sarà uniforme:

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \text{costante} . \quad (13.12)$$

Per calcolare il moto perpendicolare eseguiamo una trasformazione di riferimento al sistema che si muove rispetto a quello di laboratorio con velocità costante \mathbf{u}_D :

$$\mathbf{u}_D = \frac{c \mathbf{F} \times \mathbf{B}}{q B^2} . \quad (13.13)$$

Poniamo dunque:

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u}'_{\perp} + \mathbf{u}_D$$

e l'equazione del moto perpendicolare diventa (tenendo conto che $(\mathbf{F} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2 \mathbf{F}$):

$$m \frac{d\mathbf{u}'_{\perp}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{q}{c} (\mathbf{u}'_{\perp} + \mathbf{u}_D) \times \mathbf{B} = \frac{q}{c} \mathbf{u}'_{\perp} \times \mathbf{B} \quad (13.14)$$

che mostra come il moto in questo sistema sia una semplice girazione. Pertanto la velocità \mathbf{u}_D risulta essere esattamente il moto del centro di guida nell'accezione data nel precedente paragrafo. Il moto perpendicolare della carica è dunque composta da un moto circolare uniforme e da un *moto di deriva* (in inglese *drift*) pure a velocità uniforme nella direzione perpendicolare sia al campo magnetico sia alla forza costante. La traiettoria perpendicolare sarà dunque una cicloide. Il verso della deriva dipende dal segno della carica e quindi, se la forza \mathbf{F} non dipende a sua volta dal segno della carica, la deriva avviene in versi opposti per cariche positive e negative.

13.2.1 Deriva elettrica

Se la forza è dovuta ad un campo elettrico $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, la velocità di deriva è:

$$\mathbf{u}_{D,el} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (13.15)$$

Il verso della deriva non dipende dunque dal segno della carica. Questo caso si applica, ad esempio al moto di una carica in un campo elettromagnetico con vettori elettrico e magnetico perpendicolari come in un'onda piana.

L'interpretazione della deriva elettrica è immediata. Consideriamo ad esempio una carica positiva che compia una girazione oraria (Fig. 13.2). Assumiamo che inizialmente il moto avvenga concordemente con la forza, che quindi accelererà la carica aumentandone il raggio di girazione. Quando la girazione invertirà il moto da parallelo alla forza ad antiparallelo, la forza rallenterà la carica e ne diminuirà il raggio di girazione restringendo la curvatura della traiettoria. Alla successiva inversione da antiparallela a parallela la curvatura si allargherà e in totale si avrà un sistematico spostamento verso destra nella figura seguendo una cicloide percorsa in verso orario. Qualora la carica sia negativa, la girazione è antioraria, ma la forza elettrica agisce in modo contrario al caso precedente, frenando il moto nella direzione della forza e accelerandolo in quella contraria. Anche in tal caso la deriva sarà sempre verso destra, ma seguendo una cicloide a verso antiorario.

Si può facilmente ricavare che l'espressione della velocità di deriva elettrica ora ottenuta vale anche nel limite relativistico (Jackson, *Classical Electrodynamics*, 1962, pg. 412).

13.2.2 Deriva di gradiente

Consideriamo la situazione di Fig. 13.3 in cui il campo magnetico $\mathbf{B} = B_z(y)\hat{\mathbf{z}}$ abbia un gradiente nella direzione dell'asse y . Nell'ipotesi della teoria delle orbite di piccoli gradienti si può porre:

$$B_z(y) \approx B_0 + \frac{dB_z}{dy}y \quad (13.16)$$

e quindi la forza di Lorentz istantanea nella direzione y è:

$$F_y = -\frac{q}{c}u_x \left[B_0 + \frac{dB_z}{dy}y \right] \quad (13.17)$$

mentre F_x è semplicemente quella che causa la girazione all'ordine zero. Poiché nelle nostre ipotesi il moto dominante è quello circolare, possiamo mediare queste forze sul periodo di girazione, trascurando il moto del centro di guida. Ovviamente la media della componente $\langle F_x \rangle \propto \langle qu_y B_0 \rangle = 0$ perché $\langle u_y \rangle = 0$. Analogamente in $\langle F_y \rangle$ la media del termine $\propto qu_x B_0$ è nulla perché $\langle u_x \rangle = 0$. Invece $\langle u_x y \rangle = \pm (1/2) u_{\perp} r_c$, dove il segno dipende dal verso di percorrenza

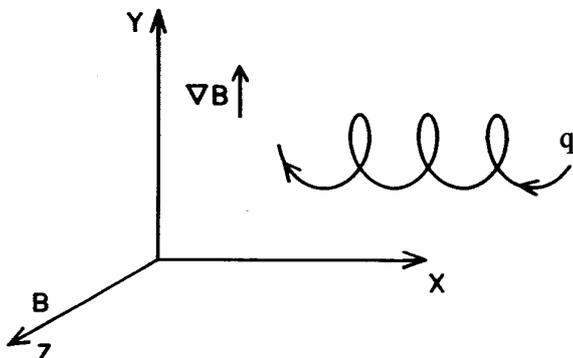


Fig. 13.3: Traiettoria di una carica positiva in un campo magnetico non-uniforme

dell'orbita di girazione (orario per cariche positive). Pertanto, in forma vettoriale:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \mp \frac{q}{2c} u_{\perp} r_c \nabla B \quad (13.18)$$

e sostituendo questa forza mediata nella (13.13) si ottiene l'espressione per la deriva causata dal gradiente del campo:

$$\mathbf{u}_{D,grad} = \pm \frac{1}{2} u_{\perp} r_c \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}. \quad (13.19)$$

Si noti che il verso della deriva di gradiente dipende dal segno della carica, per cui può generare una corrente in un plasma ionizzato muovendo elettroni e ioni positivi in versi opposti.

13.2.3 Deriva di curvatura

Quando il campo magnetico sia costante in modulo ma le linee di forza abbiano un raggio di curvatura costante R_c , come illustrato in Fig. 13.4, si può valutare che le cariche che si muovono lungo il campo a velocità costante subiscono una forza centrifuga media:

$$\mathbf{F}_c = -m u_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (13.20)$$

dove si è indicato con \mathbf{R}_c il vettore del raggio di curvatura rivolto verso il centro di curvatura. Pertanto, sostituendo nella (13.4), l'espressione per la velocità di deriva di curvatura:

$$\mathbf{u}_{D,curv} = -\frac{c m u_{\parallel}^2}{q B^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2}. \quad (13.21)$$

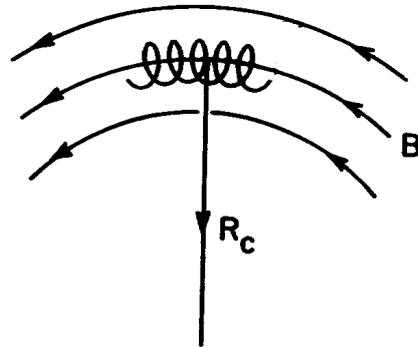
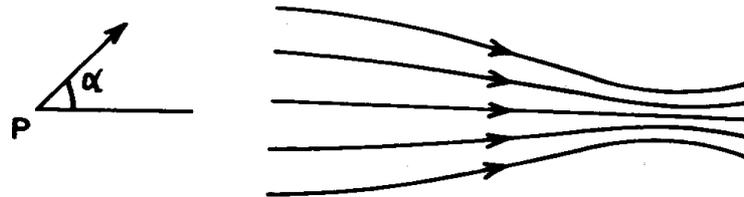


Fig. 13.4: Traiettoria di una carica in un campo magnetico a curvatura costante

Fig. 13.5: Configurazione a specchio magnetico (*magnetic mirror*)

Anche questa deriva produce una corrente in un plasma ionizzato, in quanto dipende dal segno della carica. In figura la velocità di deriva è nella direzione perpendicolare al disegno.

13.3 Specchi (*mirrors*) magnetici

Studiamo, sempre nel limite della teoria delle orbite, il moto di cariche elettriche in una configurazione magnetica a simmetria assiale in cui l'intensità del campo magnetico varia lentamente lungo l'asse di simmetria, con scala del gradiente molto grande rispetto al raggio di girazione. La rappresentazione in termini di linee di flusso magnetico è riportata in Fig. 13.5. È naturale utilizzare coordinate cilindriche con l'asse z lungo l'asse di simmetria.

La componente dominante del campo è B_z , ma esiste pure una componente

B_r che determina l'intensificazione del campo nella regione ove le linee di flusso si addensano. La condizione di solenoidalità del campo magnetico permette di ricavare il valore di B_r :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (13.22)$$

per cui, trascurando la variazione in r di $\partial B_z / \partial z$ nelle vicinanze dell'asse, si ricava:

$$rB_r = - \int_0^r r' \frac{\partial B_z}{\partial z} dr' = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

e infine

$$B_r = -\frac{1}{2} r \frac{\partial B_z}{\partial z} . \quad (13.23)$$

Un carica generica compirebbe, in assenza della componente B_r , un moto elicoidale lungo l'asse. Nel caso presente invece subisce l'effetto di una componente z della forza di Lorentz:

$$F_z = -\frac{q}{c} u_\theta B_r \quad (13.24)$$

dove $u_\theta = \mp u_\perp$ rappresenta il moto di girazione azimutale, positivo per cariche negative e negativo per cariche positive. Pertanto:

$$F_z = \mp \frac{q}{2c} u_\perp r_c \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (13.25)$$

dove abbiamo definito il *momento magnetico* associato con il campo indotto dalla girazione della carica che trasporta una corrente $-q\omega_c/2\pi$:

$$\mu = \pm \frac{q}{2c} u_\perp r_c = \pm \frac{\omega_c}{2\pi} q \cdot \pi r_c^2 \cdot \frac{1}{c} \quad (13.26)$$

(Jackson, op. cit., pg. 145). Il momento magnetico può anche essere scritto nella forma:

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m u_\perp^2}{B} . \quad (13.27)$$

In conclusione il moto della carica in z è determinato dall'equazione del moto:

$$m \frac{du_\parallel}{dt} = F_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (13.28)$$

che permette di ricavare l'integrale primo:

$$m u_\parallel \frac{du_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u_\parallel^2 \right) = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} u_\parallel = -\mu \frac{dB}{dt} . \quad (13.29)$$

in quanto

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) B = u_\parallel \frac{\partial B_z}{\partial z} .$$

Poichè l'energia cinetica totale della carica non può cambiare in un campo magnetico statico perché il lavoro della forza magnetica è sempre nullo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u_\parallel^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u_\perp^2 \right) = 0 \quad (13.30)$$

dovrà essere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m u_{\perp}^2 \right) = \mu \frac{dB}{dt} \quad (13.31)$$

e per la definizione di momento magnetico (13.27):

$$\frac{d}{dt} (\mu B) = \mu \frac{dB}{dt}$$

ossia:

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (13.32)$$

che stabilisce che il momento magnetico del moto di girazione si conserva nel moto del centro di guida. Quantità, come il momento magnetico della girazione, che sono costanti per variazioni lente dei parametri del problema sono detti *invarianti adiabatici*.

Pertanto quando la carica si muova in una regione di induzione magnetica crescente, parimenti per la (13.27) deve crescere la sua energia cinetica nel moto trasverso, evidentemente a spese della sua energia cinetica nel moto longitudinale. Se l'induzione magnetica diventa sufficientemente grande da trasferire tutta l'energia cinetica longitudinale in trasversa, la carica non può procedere oltre quel punto, in quanto la sua velocità longitudinale si è annullata. La sola possibilità è quindi che la particella venga riflessa, e quindi il punto ove ciò avviene diventa uno *specchio (mirror) magnetico*.

Il punto di specchio dipende dall'angolo di iniezione α della carica nel campo lontano dal punto di compressione, laddove il campo è solo lungo z , e dal fattore di compressione. Ad esempio se la carica ha soltanto velocità longitudinale, $\alpha = 0$, il suo momento magnetico sarà nullo e non potrà mai essere riflessa. Invece, in generale con:

$$u_{\parallel 0} = u_0 \cos \alpha \quad u_{\perp 0} = u_0 \sin \alpha \quad (13.33)$$

la costanza del momento magnetico prescrive che la riflessione avviene dove la velocità è divenuta tutta trasversa:

$$\frac{u_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{u_0^2}{B_m} \quad (13.34)$$

avendo indicato con B_m il valore del campo magnetico a cui avviene la riflessione. Ciò fissa il valore dell'angolo di iniezione minimo al di sotto del quale non è possibile la riflessione magnetica delle cariche per un dato rapporto di intensificazione del campo B_0/B_{\max} :

$$\frac{u_{\perp 0}^2}{u_0^2} = \sin^2 \alpha_{\min} = \frac{B_0}{B_{\max}} ; \quad (13.35)$$

tale angolo minimo definisce un cono detto *cono di perdita*, in quanto tutte le particelle che entrano con tale angolo di iniezione non sono riflesse, ma possono attraversare la compressione del campo.

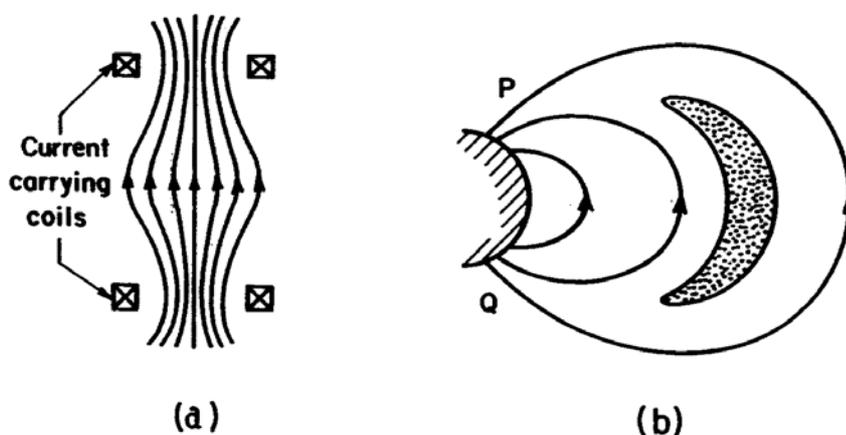


Fig. 13.6: (a) Configurazione a bottiglia magnetica; (b) Fascia di particelle cariche intrappolate in un campo magnetico dipolare.

13.4 Bottiglie magnetiche cosmiche, le fasce di Van Allen

Con riferimento al precedente paragrafo, si consideri un campo magnetico a simmetria assiale in cui siano presenti due compressioni, per semplicità aventi lo stesso rapporto di intensificazione. Cariche, che vengano iniettate nelle regioni di campo meno intenso tra le compressioni e che abbiano angoli di iniezione al di fuori del cono di perdita, risultano intrappolate tra due punti di specchio e si muovono avanti indietro tra di essi. In laboratorio una simile configurazione è chiamata *bottiglia magnetica* e viene usata per confinare particelle in una data regione di spazio con forze magnetiche.

In Fig. 13.6 è rappresentata una configurazione magnetica non a simmetria assiale, ma di tipo dipolare. Le linee di flusso si addensano verso i poli magnetici e quindi possiamo pensare alle regioni polari come a due punti di specchio che danno origine ad una bottiglia magnetica ricurva. Pertanto le cariche iniettate in questo campo, al di fuori del cono di perdita, sono intrappolate tra le due regioni polari e si muovono avanti e indietro lungo le linee di flusso magnetico. Naturalmente in questo caso sono presenti effetti di deriva di curvatura e di gradiente, che tuttavia agiscono ambedue nella direzione azimutale. Il centro di guida pertanto, oltre a rimbalzare tra i punti di specchio, si muove anche azimutalmente intorno all'asse del dipolo. Cariche di segno opposto hanno moti azimutali contrari e danno quindi origine ad una corrente di deriva intorno al dipolo.

Questa configurazione è all'origine delle cosiddette *fasce di Van Allen*, scoperte intorno alla Terra nel 1958 dalle prime sonde spaziali Explorer e Sputnik,

e costituenti la magnetosfera chiusa del nostro pianeta. Nelle fasce si trovano elettroni con energie tra 40 keV e 1 MeV e protoni con energie tra 100 keV e 1 BeV, che hanno punti di specchio a latitudini intorno ai 70° e si estendono tra 1.5 e 5 volte il raggio terrestre; le particelle di più bassa energia sono intrappolate nelle regioni più esterne, quelle di alta energia arrivano al bordo superiore della ionosfera, intorno a qualche centinaio di km. I flussi di particelle variano tra 10^4 e 10^7 particelle $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$.

Le fasce sono formate dalla cattura di particelle cariche del vento solare che penetrano nella magnetosfera, ma anche da cariche energetiche evaporate dalla ionosfera terrestre; intense fasce di elettroni sono state osservate formarsi a seguito delle esplosioni nucleari in atmosfera. Le fasce variano irregolarmente in relazione all'attività solare; le particelle delle fasce si scaricano nei punti di specchio delle regioni polari per interazioni con le particelle dell'atmosfera terrestre, e sono responsabili dell'attività geomagnetica e delle aurore. I moti di deriva generano la cosiddetta corrente ad anello che scorre lungo le fasce in direzione azimutale.

13.5 Accelerazione di particelle in astrofisica

I voli di palloni di Hess del 1912 mostrarono che la Terra è esposta a radiazioni ionizzanti provenienti dal di fuori dell'atmosfera, e quindi di origine extraterrestre. Quelli che furono chiamati *raggi cosmici* non sono in effetti raggi, bensì particelle cariche di alta energia, principalmente elettroni, protoni e nuclei leggeri. Lo spettro energetico dei raggi cosmici si estende dai 10^3 ai 10^{21} eV; tra i 10^9 e i 10^{18} eV lo spettro segue una regolare legge di potenza (Fig. 13.7):

$$N(E)dE \propto E^{-2.66}dE . \quad (13.36)$$

L'origine dei raggi cosmici è un problema ancora non risolto, sebbene oggi vi sia un consenso generale che esistano due componenti, una di origine galattica con particelle di energia fino a circa 10^{19} eV ed un'altra di origine extragalattica che raggiunge i 10^{21} eV. Un'indicazione che raggi cosmici siano prodotti anche in altre galassie è data dall'osservazione di radiazione sincrotrone, specialmente nelle radiogalassie estese, in cui elettroni relativistici debbono essere efficientemente prodotti in modo continuo sull'intera vita della sorgente. Nei nuclei delle galassie attive, quasars, blazars, ecc., la radiazione X e gamma richiedono inoltre la produzione di ioni di alta energia. Parte di queste particelle possono sfuggire dagli oggetti e riempire lo spazio intergalattico. La presenza diffusa di particelle di alta energia appare indicare che meccanismi di accelerazione debbono essere comuni e di tipo universale in molte sorgenti astrofisiche. Un utile testo di riferimento per l'approfondimento del problema astrofisico è stato pubblicato da Longair (*High-Energy Astrophysics*, 1994).

Nel presente contesto è utile illustrare uno dei principali meccanismi per l'accelerazione dei raggi cosmici proposto nel 1949 da Fermi e che si basa proprio sul principio delle bottiglie magnetiche. Fermi considerò, sulla base dei dati osservativi sul mezzo interstellare, che questo fosse composto di nuvole

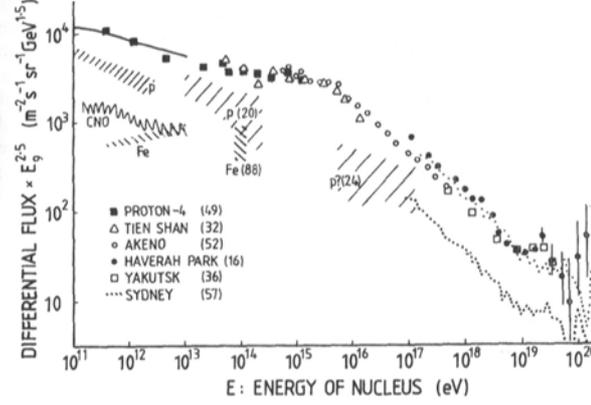


Fig. 13.7: Spettro dei raggi cosmici primari

magnetizzate che si muovono in modo caotico, connesse tra loro da un campo magnetico medio diffuso e di bassa induzione. Particelle elettricamente cariche, elettroni e ioni, seguono traiettorie composte da moti di girazione e derive del centro di guida; in particolare possono essere intrappolate nel campo debole tra due nuvole magnetizzate, dove invece il campo medio è più intenso e che quindi possono costituire una bottiglia magnetica cosmica (Fig. 13.8). Tuttavia le particelle possono essere diffuse al di fuori della bottiglia non appena, come ora calcoleremo, acquistano energia; quindi lo schema generale dell'interazione sarà quello di una distribuzione isotropa di particelle che subiscono riflessioni a specchio con una distribuzione isotropa di nuvola magnetizzate. Precisamente nelle riflessioni va tenuta presente la presenza della velocità propria \mathbf{U} della nuvola, che può essere concorde o discorde con la velocità \mathbf{u} della carica di massa m lungo il campo.

Poichè le energie dei raggi cosmici sono molto elevate è in realtà necessario sviluppare il calcolo nel limite relativistico. Consideriamo dunque una singola collisione tra una particella di energia E e momento \mathbf{p} e una nuvola che si muove con velocità \mathbf{U} , nell'ipotesi che la nuvola magnetizzata abbia massa infinita, per cui il sistema della nuvola coincide con il riferimento del centro di massa (Fig. 13.9). L'energia della particella in tale riferimento e la componente del suo momento parallela alla direzione della velocità U della nuvola saranno pertanto:

$$E' = \gamma(E + Up \cos \theta) \quad (13.37)$$

$$p'_x = p' \cos \theta = \gamma \left(p \cos \theta + \frac{UE}{c^2} \right) \quad (13.38)$$

con $\gamma = (1 - U^2/c^2)^{-1/2}$ e θ angolo tra le direzioni di \mathbf{p} dopo la riflessione ed \mathbf{U} . Nella collisione l'energia nel centro di massa si conserva $E'_{dopo} = E'_{prima}$,

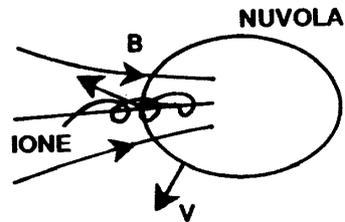


Fig. 13.8: Schema dell'interazione tra cariche e nuvole magnetizzate nel meccanismo di Fermi

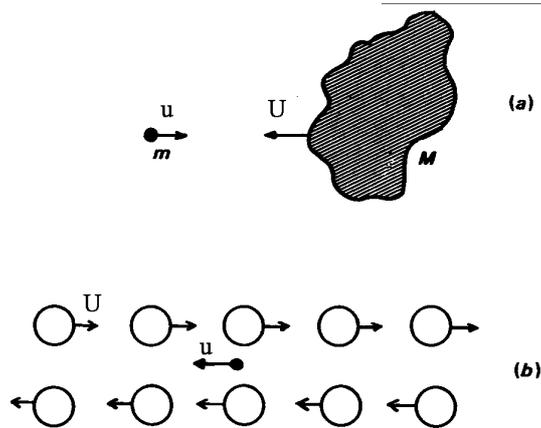


Fig. 13.9: (a) Collisione tra una particella di massa m e una nuvola di massa $M \gg m$. (b) Illustrazione schematica del diverso numero di nuvole incontrate di opposta e concorde velocità.

mentre il suo momento è invertito $p'_{x,dopo} = -p'_{x,prima}$, per cui trasformando al sistema dell'osservatore si ottiene:

$$E'' = \gamma(E' + Up'_x) = \gamma^2 E \left[1 + \frac{2Uu \cos \theta}{c^2} + \left(\frac{U}{c}\right)^2 \right] \quad (13.39)$$

e quindi la variazione di energia calcolata fino a termini $O(U^2/c^2)$ è:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E'' - E}{E} = \gamma^2 \left[\frac{2Uu \cos \theta}{c^2} + 2 \left(\frac{U}{c}\right)^2 \right]. \quad (13.40)$$

Il primo termine in parentesi è quello più importante perchè $u \gg U$, ma naturalmente va considerato l'effetto dell'angolo di incidenza θ . Per $\theta = 0$ (collisione *head-on*) si ha un guadagno di energia, per $\theta = \pi$ (collisione *overtaking*) una perdita.

Dobbiamo ora eseguire una media sui possibili angoli θ di collisione assumendo che le velocità delle nuvole siano distribuite in modo casuale. D'altra parte va tenuto presente che per effetto geometrico esiste una maggior probabilità di collisioni con nuvole che si muovono contro le particelle rispetto a quella con nuvole che fuggono di fronte alle particelle. Precisamente per una particella con $u \approx c$ la probabilità di collisione ad angolo θ è $\propto \gamma [1 + (U/c) \cos \theta]$, mentre la probabilità che l'angolo di collisione sia θ è $\propto \sin \theta d\theta$. Eseguendo quindi la media della (13.40) sugli angoli tra 0 e π :

$$\left\langle \frac{2U \cos \theta}{c} \right\rangle = \left(\frac{2U}{c}\right) \frac{\int_{-1}^{+1} x [1 + (U/c)x] dx}{\int_{-1}^{+1} [1 + (U/c)x] dx} = \frac{2}{3} \left(\frac{U}{c}\right)^2. \quad (13.41)$$

Pertanto il guadagno medio di energia per collisione (dopo un numero statisticamente significativo di collisioni e con $u \approx c$) è:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{U}{c}\right)^2 \quad (13.42)$$

che illustra il famoso risultato di Fermi che l'aumento medio di energia è del second'ordine rispetto a (U/c) . Passiamo ora ad una valutazione della variazione media temporale dell'energia. Per questo occorre definire la distanza media tra le nuvole magnetizzate L e quindi $L/(u \cos \phi)$ diventa il tempo medio fra collisioni dove ϕ è l'angolo di incidenza rispetto al campo magnetico. Anche in tal caso occorre mediare rispetto all'angolo ϕ per cui il tempo medio diventa $L/2u \approx L/2c$. Pertanto il tasso di crescita dell'energia risulta:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4c}{3L} \left(\frac{U}{c}\right)^2 E = \alpha E. \quad (13.43)$$

Ricaviamo ora lo spettro tipico che si ottiene attraverso il processo di accelerazione di Fermi. Si può ricavare in modo euristico l'equazione evolutiva dello

spettro di particelle. Si supponga che al tempo t le particelle nell'intervallo di energia tra E e $E + \Delta E$ siano $F(E)\Delta E$; sulla base della (13.43) al tempo $t + \Delta t$ saranno state rimpiazzate da quelle che avevano al tempo t energia tra E' e $E' + \Delta E'$ dove

$$\begin{aligned} E' &= E - \alpha E \Delta t \\ E' + \Delta E' &= (E + \Delta E) - \alpha (E + \Delta E) \Delta t . \end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor per piccoli ΔE si ottiene:

$$\Delta E' = \Delta E - \frac{d(\alpha E)}{dE} \Delta E \Delta t .$$

Pertanto la variazione di $F(E)\Delta E$ nell'intervallo di tempo Δt è:

$$\Delta F(E)\Delta E = F(E - \alpha E \Delta t, t)\Delta E' - F(E, t)\Delta E$$

e sviluppando ancora per piccoli $\alpha E \Delta t$:

$$\Delta F(E)\Delta E = -\frac{dF(E)}{dE} \alpha E \Delta E \Delta t - F(E) \frac{d(\alpha E)}{dE} \Delta E \Delta t$$

ossia:

$$\frac{\partial F(E, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E} [\alpha E F(E, t)] . \quad (13.44)$$

Se le particelle rimangono confinate nella regione delle nuvole (la Galassia nel caso specifico) per un tempo tipico τ dopo il quale vengono perdute perchè aumentando la loro energia possono sfuggire dai punti a specchio, occorre aggiungere un termine di perdita:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E} (\alpha E F) - \frac{F}{\tau} , \quad (13.45)$$

la cui soluzione in condizioni stazionarie, $\partial F / \partial t \equiv 0$, è:

$$F = \text{costante} \times E^{-1/(\alpha\tau)-1} . \quad (13.46)$$

Questa relazione mostra che il meccanismo statistico di riflessione da parte di nuvole magnetizzate nel mezzo interstellare può generare spettri di potenza; questo è il più significativo risultato del modello proposto da Fermi.

Vanno menzionati tuttavia alcuni punti di incertezza, pur tenendo conto della semplicità del modello.

1. α e τ debbono essere indipendenti dall'energia per produrre una legge di potenza; soprattutto una costanza di τ sembra difficile da giustificare, anche se ciò può avere effetto solo sulla parte di alta energia dello spettro.
2. Per spiegare gli indici spettrali osservati occorre che $\alpha\tau \sim 1$ in tutti i casi, richiesta non ovvia tenendo conto della varietà di situazioni e parametri

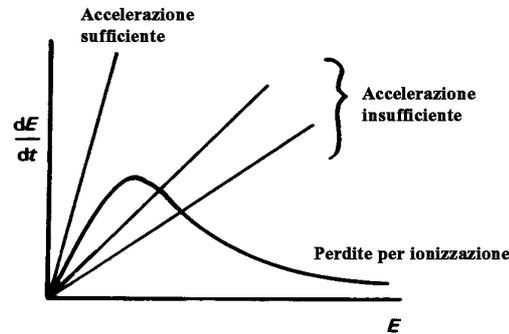


Fig. 13.10: Confronto tra tassi di accelerazione e perdite nel meccanismo di Fermi

fisici. Nel caso dei raggi cosmici nella Galassia è stato proposto che, essendo paragonabili le densità di energia nei raggi cosmici e nella dinamica delle nuvole (equipartizione), la velocità delle nuvole si aggiusti in modo da produrre $\alpha\tau \sim 1$; d'altra parte i valori stimati osservativamente per le due quantità non sembrano soddisfare questa richiesta del modello.

3. Il processo di collisione dev'essere effettivamente molto soffice e lento per evitare che i nuclei dei raggi cosmici si frantumino.
4. Una difficoltà comune a tutti i processi di tipo stocastico è la loro intrinseca anisotropia. La collisione tra particella energetica e nuvola fornisce energia parallela al campo magnetico, per cui la riflessione risulta sempre più difficile man mano che procede l'accelerazione. Per mantenere il processo serve dunque un ulteriore processo che ridistribuisca l'energia isotropicamente, come ad esempio le collisioni con onde turbolente isotrope.
5. Il processo di accelerazione compete anche con le perdite energetiche che precedentemente son state trascurate. In effetti esiste un'energia di soglia al di sotto della quale le particelle perdono radiativamente più rapidamente di quanto guadagnano. Pertanto non si può pensare che il meccanismo di Fermi sia sufficiente: può essere in grado di accelerare particelle che già abbiano superato l'energia di soglia, per cui è richiesto un meccanismo di pre-accellerazione (Fig. 13.10).

Il processo di Fermi è comunque piuttosto lento, essendo il tipico guadagno di energia proporzionale a $(U/c)^2$ con la velocità media delle nuvole del gas interstellare $U \approx 15 \text{ km s}^{-1}$ molto piccola rispetto alla velocità della luce. Una possibilità per rendere il processo più efficiente è quella di costruire situazioni in cui tutte le collisioni siano head-on. Ciò può ad esempio avvenire nei fronti

delle onde d'urto ove irregolarità magnetiche su ambedue i lati del fronte possano funzionare da centri di riflessione che intrappolano particelle. Le particelle possono muoversi avanti e indietro attraverso il fronte e ad ogni passaggio subiscono collisioni head-on. In tal caso si mostra che il tasso di accelerazione dE/dt diventa proporzionale alla prima potenza del rapporto U/c , e si parla quindi di *processo di Fermi del prim'ordine*, mentre quello stocastico precedente viene indicato come *processo di Fermi del second'ordine*.