

Capitolo 8

Instabilità

8.1 Onde e instabilità, analisi perturbativa

Abbiamo già utilizzato il concetto di analisi perturbativa nel paragrafo 6.2 per derivare la relazione di dispersione delle onde acustiche (6.16). L'evoluzione temporale di piccole perturbazioni imposte ad uno stato di equilibrio può essere studiata con le equazioni della dinamica perturbate considerando solo i termini lineari e trascurando i termini nonlineari. Il vantaggio del metodo è che in sistemi lineari vale il *principio di sovrapposizione*, cioè è possibile rappresentare una qualunque perturbazione in componenti di Fourier piane $\propto \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ e studiare l'evoluzione separatamente per ciascuna di esse: la soluzione sarà la somma delle singole evoluzioni.

Le componenti di Fourier forniscono quindi informazione su quali onde lineari possono oscillare in un fluido; abbiamo visto che queste sono le onde acustiche, che si propagano alla velocità del suono con la relazione di dispersione (6.16). Le perturbazioni ondose che abbiamo calcolato potersi propagare in un fluido omogeneo di dimensioni infinite non determinano un cambiamento dell'equilibrio, ma solo oscillazioni intorno ad un minimo dell'energia del sistema. La relazione di dispersione infatti è caratterizzata da valori reali sia della frequenza sia del numero d'onda.

Sono invece possibili situazioni in cui l'analisi lineare produce una relazione di dispersione in cui ad un numero d'onda reale corrisponde una frequenza complessa (o viceversa). In tal caso le perturbazioni sono oscillazioni di ampiezza crescente e/o decrescente. Le oscillazioni con ampiezza crescente comportano una sostanziale variazione della situazione di equilibrio in quanto conducono verso una fase in cui i termini nonlineari non possono più essere trascurati; le oscillazioni decrescenti corrispondono invece a onde che vengono dissipate all'interno del sistema senza modificare la situazione di equilibrio. Sono anche possibili soluzioni in cui la frequenza è puramente immaginaria, il che comporta che la perturbazione non sia di tipo oscillatorio, ma monotonicamente crescente e/o decrescente in ampiezza; nel caso di ampiezza crescente il sistema è dinami-

camente instabile.

Queste considerazioni suggeriscono pertanto che il metodo perturbativo consenta di studiare la *stabilità delle configurazioni di equilibrio*. Se infatti una soluzione di equilibrio a cui venga imposta una perturbazione lineare oscilla intorno al valore di equilibrio senza allontanarsene, possiamo dire che l'equilibrio è stabile; se invece se ne allontana sempre di più (oscillando oppure discostandosi lentamente ma monotonicamente), l'equilibrio è instabile. Nella letteratura le situazioni con ω puramente immaginaria sono spesso indicate come *instabilità*, quelle con ω complesso come *sovra-stabilità* (*overstability* in inglese).

Naturalmente la valutazione completa della stabilità di un equilibrio non può fermarsi al livello lineare. Può infatti accadere nel caso di un sistema linearmente instabile, che, quando l'ampiezza della perturbazione cresca sufficientemente, l'intervento dei termini non lineari comporti la *saturazione* dell'instabilità, che pertanto rimane presente senza realmente distruggere l'equilibrio. Alternativamente può accadere in un sistema stabile che al crescere di certi valori dei parametri di struttura possa partire l'instabilità; questa transizione corrisponde matematicamente a una *biforcazione* delle soluzioni.

Nei precedenti Capitoli abbiamo discusso alcune soluzioni di equazioni della gasdinamica per flussi stazionari. In realtà, quelle soluzioni non garantiscono affatto che gli equilibri possano essere né raggiunti né mantenuti, in quanto potrebbero essere configurazioni instabili, che, perturbate da somme di onde piane di Fourier, ne vedono crescere l'ampiezza fino alla distruzione. In questo Capitolo vedremo alcuni studi di instabilità di fluidi incompressibili che chiariranno le precedenti considerazioni. Una trattazione completa dei metodi di analisi delle instabilità idrodinamiche, applicate peraltro al caso di fluidi incompressibili, con applicazioni di interesse fisico e astrofisico si trova in Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (1961)

8.2 Instabilità convettive e onde di gravità interne

La discussione di questa instabilità, utilizzata nella teoria delle strutture stellari, può essere fatta senza troppo formalismo matematico, ma allo stesso tempo permette di illustrare il collegamento tra studio di moti ondosi e instabilità.

Consideriamo un'atmosfera di gas perfetto in equilibrio idrostatico in presenza di un campo gravitazionale (Fig. 8.1); sia z la direzione della gravità e si supponga in generale che le distribuzioni $\rho(z)$ e $p(z)$ decrescano verso l'alto (z positivo). Si prenda un volumetto di gas in z_1 e lo si sposti verticalmente verso l'alto contro l'azione della gravità. Inizialmente il volumetto ha la stessa densità ρ_1 e pressione p_1 dell'ambiente che lo circonda; nella nuova posizione a z_2 si dovrà confrontare con un ambiente con densità ρ_2 e pressione p_2 . Lo spostamento avviene in condizioni di equilibrio di pressione con l'esterno e adiabatico, assumendo che sia rapido rispetto al tempo scala di conduzione termica. Pertanto la pressione del volumetto a z_2 sarà uguale alla pressione esterna p_2 ,

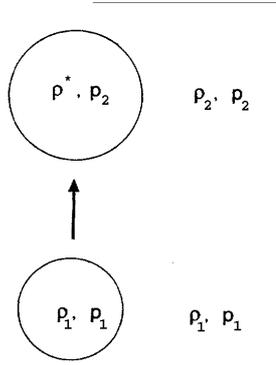


Fig. 8.1: Spostamento adiabatico di un volumetto di gas in un'atmosfera stratificata

mentre la sua densità sarà ricavabile dalla legge di trasformazione adiabatica di un gas perfetto $\rho^* = \rho_1 (p_2/p_1)^{1/\gamma}$. Ovviamente, sulla base del principio di Archimede, se $\rho^* < \rho_2$ il volumetto continuerà a galleggiare e a salire; se invece $\rho^* > \rho_2$ il volumetto ricadrà verso la posizione iniziale e oscillerà intorno alla posizione di equilibrio.

Occorre dunque confrontare la variazione di densità del volumetto nella trasformazione adiabatica

$$\rho^* = \rho_1 + \left(\frac{\rho}{\gamma p} \frac{dp}{dz} \right)_1 \Delta z \quad (8.1)$$

e il profilo di gradiente di densità nell'atmosfera:

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_1 \Delta z = \rho_1 + \left(\frac{\rho}{p} \frac{dp}{dz} \right)_1 \Delta z - \left(\frac{\rho}{T} \frac{dT}{dz} \right)_1 \Delta z \quad (8.2)$$

dove è stata usata l'equazione di stato del gas perfetto per legare il gradiente di densità a quello delle altre variabili termodinamiche. Ne segue:

$$\rho^* - \rho_2 = \left[- \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{\rho}{p} \frac{dp}{dz} \right)_1 + \left(\frac{\rho}{T} \frac{dT}{dz} \right)_1 \right] \Delta z. \quad (8.3)$$

Considerando che i gradienti sono negativi, l'atmosfera sarà dunque stabile se (trascuriamo l'indice 1):

$$\left| \frac{dT}{dz} \right| < \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{p} \left| \frac{dp}{dz} \right| \quad (8.4)$$

che è il ben noto *criterio di Schwarzschild* sul trasporto convettivo nelle strutture stellari (1906). Nel limite opposto l'atmosfera risulta instabile alla convezione,

cioè un piccolo spostamento di un qualunque elemento fluido viene amplificato e permette il rimescolamento degli strati del fluido. Nel caso dei modelli stellari, le stelle diventano convettive quando vale il limite opposto alla (8.4): il gradiente termico corrispondente a trasformazioni adiabatiche è quindi il più ripido che si può permettere in una stella, in quanto la convezione lo riporta rapidamente verso tale valore.

Deriviamo ora la relazione di dispersione dell'instabilità. La forza di gravità agente su un volumetto unitario spostato, diminuita della spinta di Archimede è $-(\rho^* - \rho_2)g$ con g accelerazione gravitazionale. Quindi l'equazione del moto del volumetto unitario è:

$$\rho^* \frac{d^2(\Delta z)}{dt^2} = -(\rho^* - \rho_2)g \quad (8.5)$$

assumendo che il resto del fluido rimanga imperturbato. Quindi dalla (8.3) si ottiene:

$$\frac{d^2(\Delta z)}{dt^2} + N^2 \Delta z = 0 \quad (8.6)$$

dove

$$N = \sqrt{\frac{g}{T} \left[\frac{dT}{dz} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} \frac{dp}{dz} \right]} \quad (8.7)$$

è la *frequenza di Brunt-Väisälä* (1925). Il moto è oscillatorio quando N è reale, cioè nelle condizioni in cui il sistema è stabile rispetto alla convezione. In realtà questo moto oscillatorio mette in oscillazione anche l'atmosfera circostante, per cui in effetti nell'atmosfera si propagano delle onde che prendono il nome di *onde di gravità interne* (per distinguerle da quelle superficiali di cui parleremo in seguito), con la frequenza N ; lo studio della relazione di dispersione di tali onde va fatto con la linearizzazione del sistema completo delle equazioni idrodinamiche. Va infine detto che qualora le oscillazioni non possano più essere considerate adiabatiche le onde risultano una combinazione di onde acustiche e onde di gravità interne (Lighthill 1978).

8.3 Convezione di Rayleigh-Bénard

Mentre l'instabilità convettiva di un gas compressibile è stata trattata con relativa facilità, il caso di un fluido incompressibile è meno diretto. Seguiremo l'analisi perturbativa lineare così come presentata da Rayleigh nel 1916 per interpretare i dati sperimentali di Bénard del 1900 sul comportamento di liquidi riscaldati dal basso.

Occorre anzitutto definire la configurazione di equilibrio. Scegliamo come coordinata di riferimento l'asse z rivolto verso l'alto e studiamo un fluido compresso tra due superfici piane infinite a $z = 0$ e $z = d$, riscaldato a $z = 0$. Considereremo un fluido incompressibile, quindi con densità costante rispetto all'applicazione di una pressione. Tuttavia terremo conto delle variazioni di densità del fluido al variare della temperatura. È ragionevole quindi aspettarsi

che un fluido riscaldato dal basso diventi convettivamente instabile perché gli strati più bassi diventano più leggeri di quelli sovrastanti e quindi tendono a scambiarsi con essi (sulle instabilità di scambio ritorneremo in un successivo paragrafo).

Si parte dall'equazione idrodinamica dell'energia (3.45) assumendo conduzione termica K costante e variazione di energia interna per unità di massa data da $d\epsilon = c_p dT$ (le trasformazioni avvengono a pressione costante):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (8.8)$$

dove $\kappa = K/(\rho c_p)$ è la *conduttività termometrica* ed è stata utilizzata l'equazione di continuità per i fluidi incompressibili $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Se T_b e T_a sono le temperature ai contorni $z = 0$ e $z = d$, la soluzione di equilibrio ($\partial T/\partial t = 0$, $\mathbf{u} = 0$) è:

$$T_0(z) = T_b - \beta z \quad (8.9)$$

$$\beta = \frac{T_b - T_a}{d} \quad (8.10)$$

cui viene a corrispondere una distribuzione di densità

$$\rho_0(z) = \rho_b (1 + \alpha \beta z) \quad (8.11)$$

in base alla definizione del coefficiente α di espansione volumica del gas con la temperatura a pressione costante:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (8.12)$$

Infine il profilo di pressione all'equilibrio sarà determinata dall'equilibrio tra forze di pressione e gravità:

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0(z)g \quad (8.13)$$

Si introduce ora la perturbazione nella temperatura $T = T_0 + T_1$, cui corrispondono quella in densità $\rho = \rho_0 - \rho_b \alpha T_1$ e quella in pressione $p = p_0 + p_1$. Naturalmente il sistema può uscire dall'equilibrio, per cui comparirà una velocità al prim'ordine \mathbf{u}_1 . Utilizzando l'equazione di Navier-Stokes (5.9):

$$(\rho_0 - \rho_b \alpha T_1) \left[\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 \right] = -\nabla (p_0 + p_1) + (\rho_0 - \rho_b \alpha T_1) \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{u}_1, \quad (8.14)$$

che viene riscritta tenendo conto delle relazioni all'equilibrio e linearizzando. In genere si introduce un'ulteriore semplificazione, che va sotto il nome di *approssimazione di Boussinesq*. Si mantiene la variazione lineare di densità nel termine di forza esterna perché determina l'effetto di galleggiamento, cioè la spinta di Archimede; invece si trascura la stessa variazione nel primo membro

dell'equazione perché corrisponde a termini nonlineari, e si pone $\rho \approx \rho_b$ consistentemente con l'ipotesi di incompressibilità. Pertanto:

$$\rho_b \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_b \alpha T_1 \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{u}_1 . \quad (8.15)$$

Linearizzando anche l'equazione dell'energia (8.8) si ha:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \beta u_{1z} = \kappa \nabla^2 T_1 . \quad (8.16)$$

Le (8.15) e (8.16), insieme all'equazione di continuità, sono le equazioni della convezione per fluidi incompressibili nel limite di Boussinesq. Si applichi due volte l'operatore rotore alla (8.15) e se ne consideri la componente z , ricordando che $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_{1z} = \alpha g \nabla^2 T_1 + \nu \nabla^4 u_{1z} \quad (8.17)$$

(ν è la viscosità cinematica). Poiché le sole variabili indipendenti sono in realtà T_1 e u_{1z} le (8.16) e (8.17) sono sufficienti alla soluzione del problema. Queste equazioni sono lineari e quindi ne possiamo fare l'analisi in componenti piane di Fourier nel piano (x, y) dove sono simmetriche:

$$u_{1z} = w(z) \exp(\sigma t + ik_x x + ik_y y) \quad (8.18)$$

$$T_1 = \theta(z) \exp(\sigma t + ik_x x + ik_y y) . \quad (8.19)$$

Componenti (modi) instabili corrispondono dunque a $\sigma > 0$, modi stabili a $\sigma < 0$. In tal senso possiamo ricercare le condizioni di instabilità marginale per $\sigma = 0$. Otteniamo ($k^2 = k_x^2 + k_y^2$):

$$\beta w + \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \theta = 0 \quad (8.20)$$

$$-\alpha g k^2 \theta + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 w = 0 . \quad (8.21)$$

Combinando le due equazioni per eliminare θ :

$$\nu \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 w = -\alpha \beta g k^2 w \quad (8.22)$$

che può essere adimensionalizzata con $z = z' d$ e $k = k' / d$:

$$\left(\frac{d^2}{dz'^2} - k'^2 \right)^3 w = -R k'^2 w \quad (8.23)$$

con

$$R = \frac{\alpha \beta g d^4}{\nu \kappa} \quad (8.24)$$

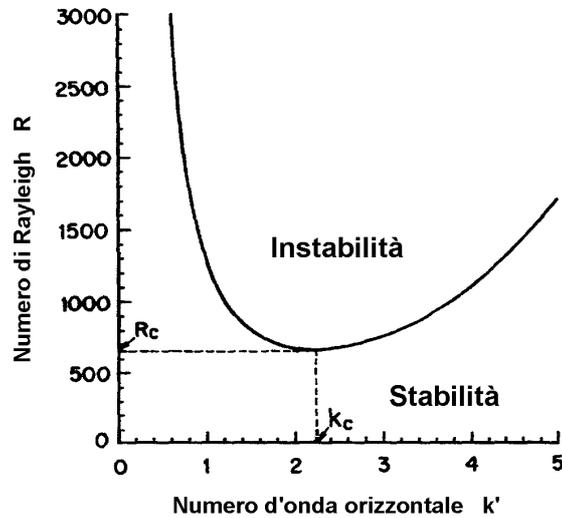


Fig. 8.2: Instabilità marginale per la convezione di Rayleigh-Bénard

numero adimensionale detto *numero di Rayleigh*.

L'equazione è differenziale del sesto ordine e quindi richiede sei condizioni al contorno. Una trattazione completa delle soluzioni è piuttosto complessa, e si può trovare nel citato testo di Chandrasekhar. Per la nostra discussione è sufficiente fare riferimento al caso rappresentativo di perturbazioni con velocità nulla alla superficie di base ($w(z') = 0$ a $z = 0$) e libere a quella superiore ($w(z') = 1$ a $z = d$), che corrisponde ad una soluzione del tipo:

$$w(z') = w_0 \sin \pi z' \quad (8.25)$$

che comporta:

$$R = \frac{(\pi^2 + k'^2)^3}{k'^2}. \quad (8.26)$$

Quest'ultima condizione definisce quali tra i modi di Fourier del tipo onda piana orizzontale (8.19) con dipendenza da z del tipo (8.25) siano marginalmente stabili. R è proporzionale al gradiente di temperatura in base alla (8.24): possiamo dire quindi che se R è maggiore del valore corrispondente alla soluzione marginalmente stabile i modi sono instabili, mentre se R è minore i modi sono stabili. Una più precisa definizione di tale criterio deve essere fatta studiando in dettaglio l'andamento di $\sigma \geq 0$.

In Fig. 8.2 è dato il tipico andamento della (8.26) con le regioni di stabilità e instabilità. In particolare si noti che esiste un valore critico $R_c = (27/4) \pi^4 =$

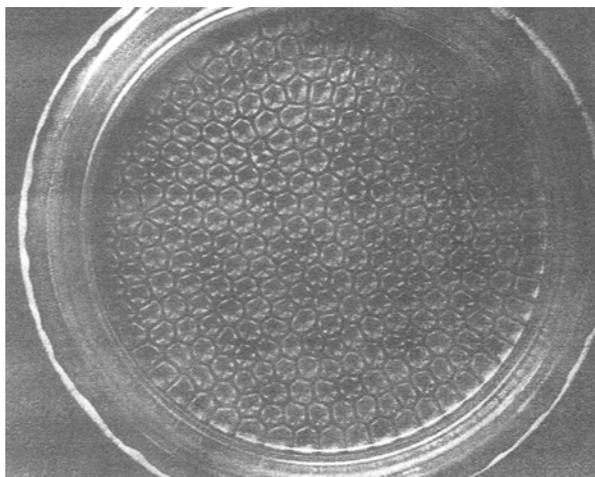


Fig. 8.3: Celle di Bénard in un esperimento di laboratorio

657.5 al di sotto del quale non esistono modi instabili. Ciò comporta che partendo da valori $R < R_c$ e facendo crescere il gradiente di temperatura si raggiunge a R_c la possibilità di avere modi instabili con numero d'onda $k'_c = \pi/\sqrt{2}$. Per $R > R_c$ avremo un crescente intervallo di valori di k' instabili. I modi corrispondono a celle con moti convettivi nelle tre direzioni spaziali. Il valore critico k'_c corrisponde a valori del numero d'onda orizzontale dell'ordine della profondità d dello strato convettivo. La Fig. 8.3 mostra i risultati di un esperimento nella regione di convezione marginale che permette di osservare lo sviluppo delle *celle di Bénard* nel piano orizzontale. La situazione è sostanzialmente analoga se fotografata lungo una sezione verticale. La sorgente energetica dell'instabilità è chiaramente il calore trasmesso dalla superficie di base $z = 0$ al fluido.

Le instabilità convettive alla Rayleigh-Bénard appaiono verificarsi in varie situazioni astrofisiche. Ad esempio in Fig. 8.4 è riportata l'immagine della superficie solare che mette in evidenza l'esistenza delle cosiddette strutture di *granulazione*, chiaramente molto simili alla struttura delle celle di Bénard.

8.4 Instabilità alle superfici di contatto tra fluidi

Le superfici di contatto tra due fluidi di diverse caratteristiche fisiche possono essere origine di instabilità attraverso lo scambio di materia, momento ed energia tra i due fluidi. Ne abbiamo esperienza osservando il flusso del vento che increspa la superficie di un lago, oppure la corrente di un fiume che s'infrange entrando nel mare. In alcuni casi vediamo solo il formarsi di onde alle superfici di contatto, in altri casi queste onde possono crescere fino a distruggere l'interfaccia. I processi che danno origine a queste onde e instabilità sono di vario tipo a seconda del tipo di energia che viene messa in gioco; tuttavia è utile dare una formulazione

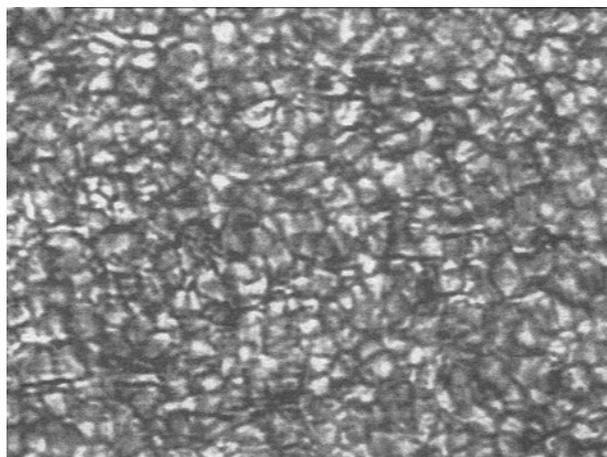


Fig. 8.4: Granulazione della superficie solare

generale del problema per ricavare la relazione di dispersione delle onde.

Per semplicità si supponga che i fluidi sui due lati dell'interfaccia siano incompressibili e ideali e che pertanto il flusso, se inizialmente irrotazionale, tale rimanga anche se perturbato, cioè non si produca vorticità, in accordo con il teorema di Kelvin. Si possono dunque introdurre i potenziali delle velocità. Trascureremo effetti di tensione superficiale, per i quali rimandiamo al testo di Chandrasekhar già citato.

Riprendiamo l'equazione di Eulero (4.12) con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, per cui $\rho = \text{costante}$ e $\mathbf{u} = -\nabla\varphi$, e otteniamo:

$$-\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nabla \Phi \quad (8.27)$$

dove Φ è il potenziale della forza esterna, ad esempio la gravità. Ovviamente possiamo integrare facilmente sulle coordinate spaziali, ricavando:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi = F(t) \quad (8.28)$$

dove $F(t)$ è una costante d'integrazione che può dipendere solo più dal tempo. Questa espressione è analoga al teorema di Bernoulli (4.50), ma grazie alle ipotesi di irrotazionalità e incompressibilità non vale solo lungo le linee di corrente, bensì in una direzione qualsiasi.

Applichiamo questa relazione al caso rappresentato in Fig. 8.5 in cui il piano $z = 0$ divide due fluidi di densità ρ (fluido inferiore) e ρ' (fluido superiore); i due fluidi possiedono anche velocità uniformi U e U' parallele all'interfaccia nella direzione dell'asse x ; si assume inoltre che la gravità agisca nella direzione z . Si verifica immediatamente che questa configurazione corrisponde ad un equilibrio,

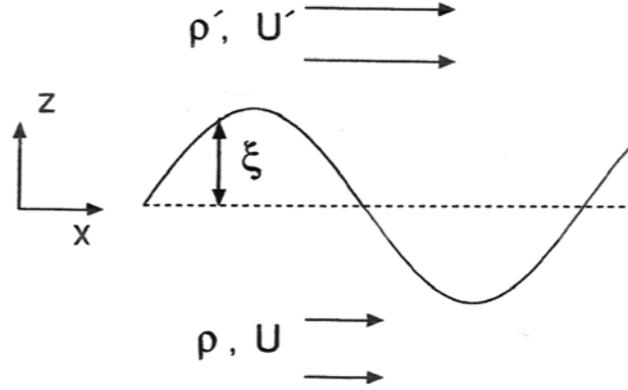


Fig. 8.5: Perturbazione dell'interfaccia tra due fluidi

cioè soddisfa alle equazioni dell'idrodinamica con $\partial/\partial t = 0$. Si perturbi ora la superficie di contatto con un piccolo spostamento $z = \xi(x, t)$ e sviluppiamo la tecnica per valutare se questo spostamento si amplifichi o decada nel tempo.

Possiamo calcolare facilmente il potenziale di equilibrio delle velocità nel fluido inferiore, $\varphi_0 = -Ux$ e quindi aggiungere una perturbazione che deve soddisfare la condizione di incompressibilità:

$$\varphi = -Ux + \varphi_1 \quad (8.29)$$

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0. \quad (8.30)$$

Naturalmente analoghe relazioni valgono per il fluido superiore:

$$\varphi' = -U'x + \varphi'_1 \quad (8.31)$$

$$\nabla^2 \varphi'_1 = 0. \quad (8.32)$$

Dobbiamo ora legare il potenziale φ agli spostamenti dell'interfaccia e raccordare quindi le soluzioni delle due regioni. Possiamo scrivere la velocità verticale di un punto vicino all'interfaccia sia come potenziale $-\partial\varphi_1/\partial z$ sia come derivata lagrangiana dello spostamento $-d\xi/dt$; pertanto a $z = 0$:

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + U\frac{\partial\xi}{\partial x} \quad (8.33)$$

e analogamente:

$$-\frac{\partial\varphi'_1}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + U'\frac{\partial\xi}{\partial x} \quad (8.34)$$

dove ξ deve ovviamente raccordarsi a $z = 0$ nelle due regioni. A questo punto possiamo utilizzare lo sviluppo in modi di Fourier dello spostamento:

$$\xi = A \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (8.35)$$

Le corrispondenti componenti di Fourier per i potenziali debbono avere analoga dipendenza da x e t , mentre la dipendenza da z viene immediatamente derivata imponendo che siano soddisfatte le equazioni di Laplace (8.30) e (8.32):

$$\varphi_1 = B \exp[-i(\omega t - kx) + kz] \quad (8.36)$$

$$\varphi'_1 = B' \exp[-i(\omega t - kx) - kz] \quad (8.37)$$

dove il segno di kz è stato scelto in modo da far svanire la perturbazione quando ci si allontani dalla superficie di contatto. Sostituendo nelle equazioni delle velocità (8.33) e (8.34) si ottiene:

$$i(-\omega + kU)A = -kB \quad (8.38)$$

$$i(-\omega + kU')A = -kB' \quad (8.39)$$

Una terza equazione nelle incognite A, B, B' si ottiene imponendo che la pressione sia continua attraverso l'interfaccia. Dalla (8.28) la pressione nel fluido inferiore in un punto prossimo all'interfaccia è:

$$p = -\rho \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + g\xi \right) + \rho F(t) \quad (8.40)$$

dove si è posto $\Phi = g\xi$. Scrivendo una relazione analoga per il fluido superiore e imponendo il bilancio delle pressioni a $z = 0$ si ottiene:

$$\rho \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + g\xi \right) = \rho' \left(-\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + \frac{u'^2}{2} + g\xi \right) + K \quad (8.41)$$

dove $K = \rho F(t) - \rho' F'(t)$ è in linea di principio una funzione del tempo, che tuttavia imponiamo essere costante sulla base della condizione al contorno che la perturbazione si annulli lontano dall'interfaccia. In tal modo la costante viene fissata prendendo i valori del fluido imperturbato:

$$K = \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho' U'^2 \quad (8.42)$$

Si noti anche che

$$u^2 = (U\hat{e}_x - \nabla\varphi_1)^2 \simeq U^2 - 2U\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \quad (8.43)$$

dove è stato trascurato il termine nonlineare nelle quantità perturbate. Utilizzando queste relazioni per ambedue i fluidi e sostituendo nella (8.41), si trova, sempre a $z = 0$:

$$\rho \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - U\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g\xi \right) = \rho' \left(-\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} - U'\frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + g\xi \right) \quad (8.44)$$

e, usando le espressioni in componenti di Fourier, si ottiene la terza equazione nelle A, B, B' :

$$\rho[-i(-\omega + kU)B + gA] = \rho'[-i(-\omega + kU')B' + gA] \quad (8.45)$$

Combinando le (8.38), (8.39) e (8.45) si ha infine:

$$\rho(-\omega + kU)^2 + \rho'(-\omega + kU')^2 = kg(\rho - \rho') \quad (8.46)$$

che è appunto la *relazione di dispersione* che lega frequenza e numero d'onda delle perturbazioni. In questo particolare caso è possibile risolvere algebricamente per ω/k :

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\rho U - \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \left[\frac{g \rho - \rho'}{k \rho + \rho'} - \frac{\rho \rho' (U - U')^2}{(\rho + \rho')^2} \right]^{1/2}. \quad (8.47)$$

Con questa relazione studieremo alcuni interessanti esempi fisici.

8.5 Onde di gravità superficiali

Si considerino due fluidi a riposo in presenza di campo di gravità, con quello più in basso a densità maggiore. Imponendo $U = u' = 0$ e $\rho > \rho'$ nella (8.47), si ottiene:

$$\frac{\omega}{k} = \pm \left[\frac{g \rho - \rho'}{k \rho + \rho'} \right]^{1/2} \quad (8.48)$$

che mostra come ω sia reale per k reale. Quindi le perturbazioni danno origine a onde che si muovono parallelamente all'interfaccia tra i due fluidi (il segno \pm indica i due versi di propagazione). Queste onde sono chiamate *onde di gravità superficiali*. La loro velocità di fase dipende da k , per cui onde di lunghezza diverse si propagano a velocità diversa, cioè sono dispersive: il profilo di un'onda composta da più componenti di Fourier cambia durante la propagazione.

Il caso trattato è di ovvia applicazione alla superficie di contatto tra l'acqua di un lago e l'atmosfera. In particolare in tal caso si può addirittura trascurare ρ' rispetto a ρ , per cui la relazione di dispersione diventa:

$$\omega = \pm \sqrt{gk}. \quad (8.49)$$

La teoria completa delle onde di gravità superficiali richiede in effetti si tenga conto anche delle forze di tensione superficiale. Inoltre abbiamo qui considerato fluidi di estensione infinita, anche nella direzione z , mentre un lago ha profondità finita h , il che comporta effetti di viscosità che garantiscano che l'acqua sia ferma al fondo del lago. La relazione di dispersione in questo caso può essere facilmente ricavata:

$$\omega = \pm \sqrt{gk \tanh(kh)}. \quad (8.50)$$

Per questi e altri effetti si può fare riferimento al testo di Chandrasekhar già citato.

8.6 Instabilità di Rayleigh-Taylor

Consideriamo ora due fluidi a riposo in presenza di un campo di gravità, ma questa volta sia il fluido a densità minore quello più in basso: il tipico esempio è quello del bicchiere capovolto. In tal caso avremo dunque la stessa relazione di dispersione del caso delle onde di superficie

$$\frac{\omega}{k} = \pm \left[\frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} \right]^{1/2}$$

ma naturalmente a un valore reale di k corrisponde un valore puramente immaginario di ω . Pertanto la configurazione di equilibrio è instabile, perché il fluido superiore più denso tende a scendere e a mescolarsi con quello meno denso. Una piccola perturbazione dell'interfaccia tra i due fluidi si amplifica e la distrugge. Il risultato, peraltro intuitivo nel caso del bicchiere capovolto, fu discusso matematicamente per la prima volta da Rayleigh nel 1883.

Nel 1950 Taylor ricavò come la stessa instabilità si possa sviluppare nel caso in cui un fluido leggero che si muova in un fluido denso subisce un'accelerazione contraria al gradiente di densità. Nel sistema a riposo (non inerziale) dell'interfaccia il fluido più denso tende a "cadere" sotto l'effetto dell'accelerazione anche se questa non è più di tipo gravitazionale. Il caso è di estremo interesse in astrofisica perché sono frequenti le situazioni in cui, a seguito di processi esplosivi, fluidi di densità diversa si incontrino dinamicamente.

È questa ad esempio la situazione del materiale espulso da una supernova entro il mezzo interstellare nelle fasi precedenti la fase autosimilare di Sedov studiata in 7.3. Il gas espulso dall'esplosione tende ad accumularsi in un sottile strato dietro la superficie di contatto con il mezzo interstellare meno denso, perché deve lavorare contro il mezzo esterno e quindi viene decelerato. Pertanto nel sistema a riposo dell'interfaccia l'accelerazione è rivolta verso l'esterno, contraria alla direzione del gradiente di densità. Le perturbazioni dell'interfaccia crescono dunque a formare strutture filamentari del tipo di quelle osservate (Fig. 8.6).

8.7 Instabilità di Kelvin-Helmholtz

Consideriamo infine il caso in cui le velocità dei fluidi non siano nulle, assumendo peraltro che $\rho > \rho'$ per assicurare che il sistema sia stabile dal punto di vista dell'instabilità di Rayleigh-Taylor. In tal caso la relazione di dispersione (8.47) può avere una componente immaginaria se:

$$\rho\rho' (U - U')^2 > \frac{g}{k} (\rho^2 - \rho'^2) \quad (8.51)$$

e in particolare la soluzione immaginaria positiva porta ad un'instabilità. Dal punto di vista fisico ciò significa che una perturbazione dell'interfaccia porta alla formazione di onde che si propagano parallelamente all'interfaccia stessa amplificandosi. La formazione di onde alla superficie di un lago per l'azione di

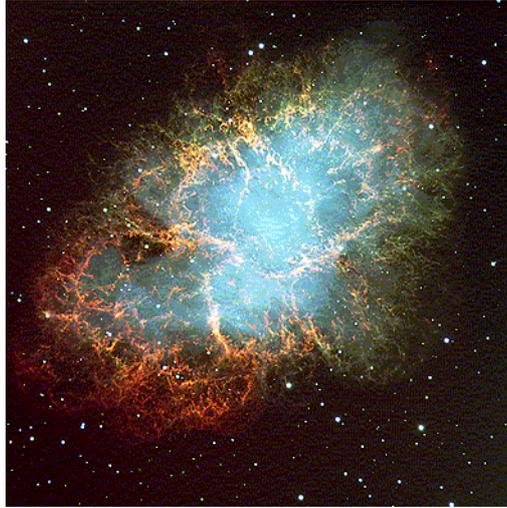


Fig. 8.6: Filamenti nel resto di supernova della Nebulosa del Granchio

vento che soffia sopra di essa sono il tipico esempio di questa instabilità studiata indipendentemente da Helmholtz e Kelvin tra il 1868 e il 1871, ed è appunto detta *instabilità di Kelvin-Helmholtz*. L'energia delle onde instabili viene dal moto relativo fra i due fluidi.

La condizione di instabilità (8.51) indica che minore è la differenza di velocità tra i fluidi $|U - U'|$ minore sarà la lunghezza d'onda delle onde instabili $\lambda = 2\pi/k$. Questo risultato tuttavia cambia quando si considerino effetti di tensione superficiale oppure interfacce di spessore finito e non discontinuità: in particolare interviene anche un limite inferiore alle onde instabili, ovvero la necessità di avere differenze di velocità sempre maggiori per avere effettivamente instabilità.

Inoltre si può notare che la condizione di instabilità è verificata sempre in assenza di gravità, $g = 0$, sia pure con le stesse limitazioni della teoria lineare ora sviluppata. Effetti nonlineari possono in effetti modificare notevolmente la situazione.

In astrofisica si osservano in varie situazioni moti relativi di diverse componenti. Citiamo come classico esempio la formazione di strutture morfologicamente complesse nei getti supersonici galattici ed extragalattici (Fig. 8.7). Va tuttavia notato che, trattandosi di getti supersonici, la teoria in questi casi deve essere adattata al caso di fluidi compressibili, il che comporta la comparsa di nuovi modi di oscillazione.

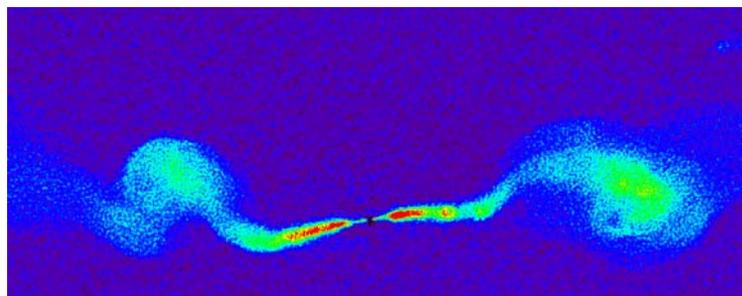


Fig. 8.7: Sviluppo di instabilità di Kelvin-Helmholtz nei getti supersonici della radiogalassia 3C 449

8.8 Instabilità di Jeans

La propagazione di onde e lo sviluppo di instabilità nei fluidi sono sempre intimamente collegati. Quindi, avendo precedentemente analizzato le caratteristiche delle onde acustiche, pare ovvio ricercare quando esse possano dare origine a effetti di instabilità.

L'origine delle onde acustiche risiede nel fatto che, quando in una regione di gas uniformemente distribuito viene generata una compressione, l'eccesso di pressione che si produce tende a riportare il sistema in condizioni di equilibrio e il sistema inizia ad oscillare intorno a tale condizione. Tuttavia, se la regione contiene abbastanza materia, va tenuto in conto anche l'aumento di forza gravitazionale prodotto dalla compressione, aumento che tende invece ad attirare altro gas. Mentre nella propagazione delle onde acustiche nell'atmosfera l'effetto gravitazionale è sempre del tutto trascurabile, si può pensare che la compressione di estese regioni del mezzo interstellare freddo possa creare effetti gravitazionali che superino la spinta espansiva della pressione termica. Queste considerazioni vennero sviluppate nel 1902 in un lavoro fondamentale da Jeans, che portò alla dimostrazione dell'esistenza dell'*instabilità di Jeans*.

Si consideri un gas omogeneo infinito e consideriamo il sistema linearizzato delle equazioni della fluidodinamica tenendo conto anche della perturbazione del potenziale gravitazionale $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ dove la parte non-perturbata è legata alla densità e alla pressione del sistema in equilibrio dalle equazioni idrostatica e di Poisson:

$$\nabla p_0 = -\rho_0 \nabla \Phi_0 \quad (8.52)$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 . \quad (8.53)$$

In realtà un gas a densità, pressione, temperatura uniformi non nulle non soddisfa queste equazioni: infatti nella (8.52) pressione e densità costanti implicherebbero un campo gravitazionale costante, e quindi la (8.53) implicherebbe che la densità dev'essere ovunque nulla. Sarebbe dunque opportuno partire da una soluzione delle equazioni all'equilibrio; sono ad esempio stati sviluppati

studi su masse autogravitanti a simmetria sferica, a strato, a disco. Tuttavia, proprio seguendo Jeans, si può lavorare anche su una situazione omogenea che risulta a posteriori sufficientemente indicativa: l'approccio è appunto indicato come il "trucco di Jeans".

Scriviamo dunque le equazioni perturbate della fluidodinamica tenendo in conto solo i termini lineari:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (8.54)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \rho_1 - \rho_0 \nabla \Phi_1 \quad (8.55)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (8.56)$$

Studiamo l'evoluzione di una qualunque perturbazione in termini delle sue componenti di Fourier $\propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ ottenendo le seguenti equazioni algebriche:

$$-\omega \rho_1 + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (8.57)$$

$$\rho_0 \omega \mathbf{u}_1 = -c_s^2 \mathbf{k} \rho_1 - \rho_0 \mathbf{k} \Phi_1 \quad (8.58)$$

$$-k^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (8.59)$$

dove ora le perturbazioni contengono solo le ampiezze che a livello di equazioni lineari omogenee rimangono indeterminate. Eliminando appunto tali ampiezze si ricava la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = c_s^2 (k^2 - k_J^2) \quad (8.60)$$

dove

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}.$$

Per numeri d'onda $k < k_J$ la frequenza ω risulta immaginaria e quindi il sistema è instabile. Quando cioè le regioni di compressione corrispondono a dimensioni sufficientemente grandi, $\lambda = 2\pi/k > 2\pi/k_J$, l'aumento di gravità nella compressione prevale sulla spinta della pressione e quindi la perturbazione cresce e collassa. Jeans definì dunque la massa critica da superare per avere un collasso gravitazionale in un mezzo omogeneo:

$$M_J = \frac{4}{3}\pi \lambda_J^3 \rho_0 = \frac{4}{3}\pi^{5/2} \left(\frac{k_B T}{Gm} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho_0^{1/2}}$$

che è appunto chiamata *massa di Jeans* (m è la massa delle particelle del gas, k_B la costante di Boltzmann). Il gas cosmico omogeneo può dunque frammentarsi in nuvole di massa eguale o superiore alla massa di Jeans. Su questo principio si discute in astronomia la formazione di stelle e galassie a partire dai gas primordiali. In realtà nel caso della formazione stellare si ottiene, sostituendo i dati tipici del gas interstellare ($T = 100$ K e $\rho_0 = 1 \times 10^{-24}$ g cm⁻³), che le nuvole instabili debbono avere masse $M > 10^5 M_\odot$; questi valori corrispondono

alla massa degli ammassi stellari. Quindi gli ammassi sono i primi prodotti della frammentazione; successivamente, a seguito dell'aumento di densità, il limite di Jeans si riduce e l'ammasso a sua volta risulta instabile alla frammentazione in singole stelle. La formazione stellare appare quindi essere un processo gerarchico. Va peraltro ricordato che il gas interstellare non è certamente omogeneo come assunto, e inoltre possiede momento angolare e campi magnetici; queste componenti cambiano quantitativamente il processo descritto che tuttavia può essere considerato qualitativamente valido nelle sue linee generali.

8.9 Oscillazioni di corpi gravitanti, sismologia stellare

Questo studio è stato sviluppato per interpretare la variazione periodica della luminosità delle stelle, ad esempio le variabili Cefeidi, attraverso un fenomeno di pulsazione. Il caso più semplice è quello delle pulsazioni radiali, cioè a simmetria sferica, studiato da Eddington (1918). Sono possibili anche pulsazioni di tipo non radiale, che sono apparentemente associate con le cosiddette oscillazioni solari e stellari e permettono di rivelare le caratteristiche della struttura interna degli oggetti celesti, analogamente a quanto lo studio dei terremoti dà informazioni sulla struttura interna della Terra.

Le oscillazioni periodiche debbono essere associate a onde persistenti, quindi a onde stazionarie, per cui possiamo aspettarci che solo certe specifiche frequenze siano permesse, in analogia al caso delle corde vibranti. Queste autofrequenze determinano un sistema di modi normali; la discussione matematica per il caso di oscillazioni adiabatiche è stata sviluppata da Kippenhahn (1990). La tipica espressione per le perturbazioni radiali associate con una autofrequenza ω_n è $\exp(-i\omega_n t) R_n(r)$; la perturbazione è instabile se ω_n ha una parte immaginaria positiva. Il calcolo è complesso per una struttura stellare realistica, ma si semplifica molto se si può assumere una relazione adiabatica $p = K\rho^\gamma$ in ogni punto della stella. Inoltre, invece di sviluppare il calcolo rigoroso dell'analisi di instabilità, seguiremo una via semplificata, ma sufficientemente illustrativa.

L'equazione di Eulero, nelle condizioni sopra descritte è:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM(r)}{r^2} \quad (8.61)$$

dove $M(r)$ è la massa all'interno del raggio r e u la componente radiale della velocità. La condizione di equilibrio si ottiene ponendo a zero appunto la velocità, e ottenendo la tipica espressione dell'equilibrio idrostatico stellare. Supponiamo ora di far espandere la stella in modo che la posizione dei suoi punti si modifichi dalla posizione generica r_0 alla posizione $r_0(1 + \varepsilon)$. Sviluppando le altre grandezze al prim'ordine si otterrà:

$$r = r_0(1 + \varepsilon) \quad \rho = \rho_0(1 - 3\varepsilon) \quad p = p_0(1 - 3\gamma\varepsilon) . \quad (8.62)$$

In tale assunzione lagrangiana la massa all'interno del raggio r non cambia. Sostituendo le (8.62) nella (8.61) e tenendo solo i termini del prim'ordine, si

ricava l'evoluzione delle perturbazioni lineari:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dr_0} (1 + 2\varepsilon - 3\gamma\varepsilon) - \frac{GM(r)}{r_0^2} (1 - 2\varepsilon) \quad (8.63)$$

che imponendo la relazione all'equilibrio:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dr_0} - \frac{GM}{r_0^2} = 0 \quad (8.64)$$

si riduce a:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{GM(r)}{r_0^2} 3\varepsilon \left(\gamma - \frac{4}{3} \right). \quad (8.65)$$

Supponendo di espandere la stella, $\varepsilon > 0$, l'accelerazione nella (8.65) risulta positiva, cioè la velocità di espansione cresce se $\gamma < 4/3$, cioè la stella è instabile. La stabilità della stella richiede invece $\gamma > 4/3$. Questo fatto è facilmente interpretabile pensando ad una contrazione della sfera autogravitante: per valori relativamente grandi di γ la pressione cresce nella compressione più rapidamente della forza di gravità, per cui la contrazione viene arrestata e la sfera è stabile.

Oltre alle oscillazioni radiali sono possibili oscillazioni di tipo non-radiale, l'analisi della cui stabilità viene fatta in modi normali della forma:

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \exp(-i\omega_{nlm}t) U_{nlm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (8.66)$$

dove $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ è l'armonica sferica di ordine l, m nelle variabili angolari. Le autofrequenze ω_{nlm} si calcolano sostituendo le (8.66) nelle equazioni linearizzate; nel limite di piccole oscillazioni si possono trascurare gli effetti delle variazioni del campo gravitazionale, ipotesi che va sotto il nome di *approssimazione di Cowling* (1941). In queste lezioni non approfondiremo tale studio, ma possiamo citare alcuni risultati.

Le frequenze delle oscillazioni solari sono state misurate con buona precisione negli anni 1970 e si è compreso trattarsi non di disturbi locali bensì di modi normali globali del Sole in quanto le potenze di Fourier sono concentrate su frequenze discrete per ogni lunghezza d'onda. La *eliosismologia* ha utilizzato tali dati e la loro interpretazione teorica sulla base delle instabilità non-radiali per tracciare le mappe della distribuzione del momento angolare nell'interno del Sole, in quanto la rotazione da origine alle dipendenze delle autofunzioni dell'indice m , ordine dell'armonica in φ . In particolare è così stato mostrato che il Sole non ruota come un corpo solido. Analoghe ricerche sono attualmente in corso sulle oscillazioni della sismologia delle stelle, con osservazioni basate su misure interferometriche di alta precisione.

8.10 Instabilità nonlineari

Abbiamo già precisato che lo studio lineare delle instabilità non risolve completamente il problema, in quanto al crescere delle ampiezze delle oscillazioni i

termini di ordine più elevato diventano via via più importanti. Essi possono aumentare il tasso di instabilità, oppure stabilizzarlo; in quest'ultimo caso si parla di saturazione dell'instabilità, e i primi studi risalgono a Landau (1944). Più tardi Veronis calcolò gli effetti nonlineari sull'instabilità convettiva di Rayleigh-Bénard (1958).

Nello studio delle onde acustiche lineari abbiamo già fatto presente come i termini nonlineari portino all'irripidirsi dei gradienti; la comprensione di tale effetto è relativamente semplice perché le onde acustiche si propagano in mezzi omogenei con velocità di fase indipendente dalla lunghezza d'onda, cioè non sono dispersive. Nel caso di onde dispersive, ad esempio le onde di gravità superficiali, l'effetto nonlineare che tende a irripidire i gradienti è invece contrastato dalla dispersione dovuta alla dipendenza della velocità di fase dalla lunghezza d'onda che disperde un pacchetto d'onda composto di più componenti di Fourier. Può accadere che i due effetti si compensino, per cui si forma un pacchetto d'onda che si propaga senza cambiare forma: questa soluzione prende il nome di *onda solitaria* o *solitone*. Il caso sperimentale di un solitone fu descritto per la prima volta da Scott Russell nel 1844.

Abbiamo indicato che la relazione di dispersione delle onde di superficie in un lago di profondità h , è data dalla (8.50):

$$\omega = \pm \sqrt{gk \tanh(kh)}. \quad (8.67)$$

Consideriamo il caso particolare di un lago di piccola profondità, in modo da poter assumere $kh \ll 1$. In tal caso la velocità di fase delle onde è:

$$v_f = \frac{|\omega|}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \approx u_0 \left(1 - \frac{1}{6} k^2 h^2\right) \quad (8.68)$$

dove $u_0 = \sqrt{gh}$. Viene lasciato per esercizio mostrare che una perturbazione di numero d'onda k che si propaghi nel verso positivo delle x con velocità $u_0 (1 - \frac{1}{6} k^2 h^2)$ soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (8.69)$$

con $a = (1/6)u_0 h^2$. Se si include anche il termine nonlineare $u (\partial u / \partial x)$ e si passa alla coordinata $X = x - u_0 t$, si ottiene la famosa *equazione di Korteweg-de Vries* (1895) che è utilizzata nello studio delle onde solitoniche:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial X} + a \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} = 0.$$

Si tratta di una fondamentale equazione nonlineare della fisica matematica che descrive il comportamento della propagazione di onde includendo sia gli effetti nonlineari sia quelli della dispersione.