PROVA SCRITTA DI MECCANICA QUANTISTICA II

Compito N.1

17 luglio 2008

Es. 1. All'istante $t = 0$ la funzione d'onda $\psi(\mathbf{x})$ di una **particella libera** di massa m sia una gaussiana di larghezza L, centrata in un punto scelto come origine.

a) Valutare l'ordine di grandezza del tempo T necessario perche' raddoppi l'errore quadratico medio sulla misura della posizione della particella; si tenga conto che le uniche grandezze dimensionali in gioco sono m e L, oltre naturalmente alla costante di Planck $\hbar$.

b) Calcolare esattamente T, nel caso in cui il moto sia unidimensionale, ricordando che l'errore quadratico medio è determinato dalla densitá di probabilità.

Es. 2. Si consideri un atomo di idrogeno immerso in un debole campo elettrico $\mathbf{E}$, uniforme nello spazio e costante nel tempo.

Dopo aver scritto il potenziale che descrive l'effetto del campo elettrico $\mathbf{E}$ sull'elettrone dell'atomo di idrogeno

a) si calcoli perturbativamente la correzione all'energia del primo livello eccitato, al primo ordine in $\mathbf{E}$;

b) si dica quali sono gli stati che contribuiscono alla correzione dell'energia dello stato fondamentale, al piú basso ordine non banale, e si calcoli il piú importante fra questi contributi.

Formule utili

- Le funzioni d'onda che descrivono gli stati stazionari dell'atomo d'idrogeno, appartenenti alle energie

$$E_n \;=\; -\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}$$

dove a_0 è il raggio di Bohr, sono:

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = \phi_{nl}(r)\; Y_l^m(\theta,\varphi)\ ,$$

Le prime funzioni d'onda radiali $\phi_{nl}(r)$, correttamente normalizzate, sono:

$$\begin{aligned}
\phi_{10} &= \frac{2}{\sqrt{a_0^3}}\,\exp(-r/a_0)\ , \\
\phi_{20} &= \frac{1}{\sqrt{8\,a_0^3}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\exp(-r/2a_0)\ , \quad \phi_{21} \;=\; \frac{1}{\sqrt{24\,a_0^5}}\,r\,\exp(-r/2a_0)\ .
\end{aligned}$$

Le prime funzioni sferiche, correttamente normalizzate, sono

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\quad,\quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\quad,\quad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\; e^{\pm i\varphi}\quad .$$

- Integrale utile:

$$\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r}dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$