Prototypes and physical models: the similarity technique

Textbooks and web sites references for this lecture:

- J. Holton – An introduction to dynamic meteorology
- Physic der atmosphäre - Institut für Umweltphysik - Universität Heidelberg
- Adrian M. Tomkins – Atmospheric Physics – ictp_atmospheric_physics.beamer.pdf

THE PRINCIPLE OF SIMILITUDE.

I HAVE often been impressed by the scanty attention paid even by original workers in physics to the great principle of similitude. It happens not infrequently that results in the form of "laws" are put forward as novelties on the basis of elaborate experiments, which might have been predicted *a priori* after a few minutes' consideration. However useful verification may be, whether to solve doubts or to exercise students, this seems to be an inversion of the natural order. One reason for the neglect of the principle may be that, at any rate in its applications to particular cases, it does not much interest mathematicians. On the other hand, engineers, who might make much more use of it than they have done, employ a notation which tends to obscure it.

Lord Rayleigh, Nature 1915

Interpreting physical phenomena

- The steps in understanding and/or control every physical phenomena are:
  - To identify the relevant physical variables.
  - Relate these variables using the known physical laws.
  - Solve the resulting equations.

- Usually not all of these are possible. Sometimes none are.

Dimensional Analysis

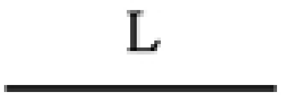
- Physical laws must be **independent** of arbitrarily chosen units of measure. **Nature does not care if we measure lengths in centimeters or inches or light-years or …**

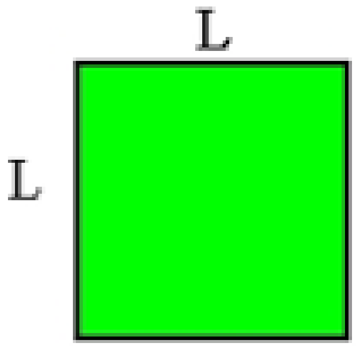
- Check your units! **All natural/physical relations must be dimensionally correct**

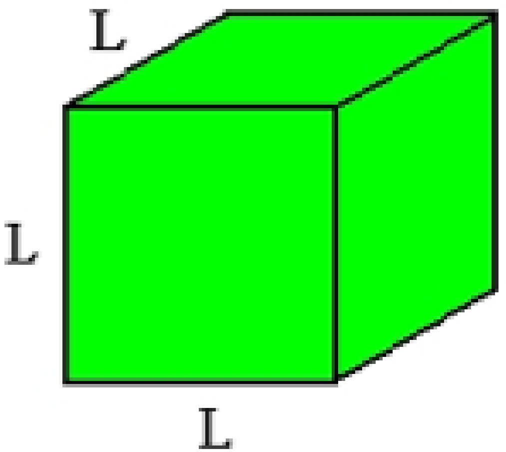
Dimensional Analysis

Dimensional Analysis refers to the physical nature of the quantity and the type of unit (**Dimension**) used to specify it.

- Distance has dimension L.
- Area has dimension L^2.
- Volume has dimension L^3.
- Time has dimension T.
- Speed has dimension L/T







Why are there no small animals in the polar regions?

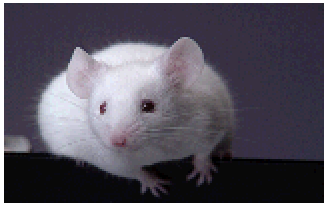
- Heat Loss $\propto$ Surface Area (L^2)

- Mass $\propto$ Volume (L^3)

- Heat Loss/Mass $\propto$ Area/Volume

$$= L^2/ L^3$$
$$= L^{-1}$$

Heat Loss/Mass $\propto$ Area/Volume $= L^2/L^3 = L^{-1}$



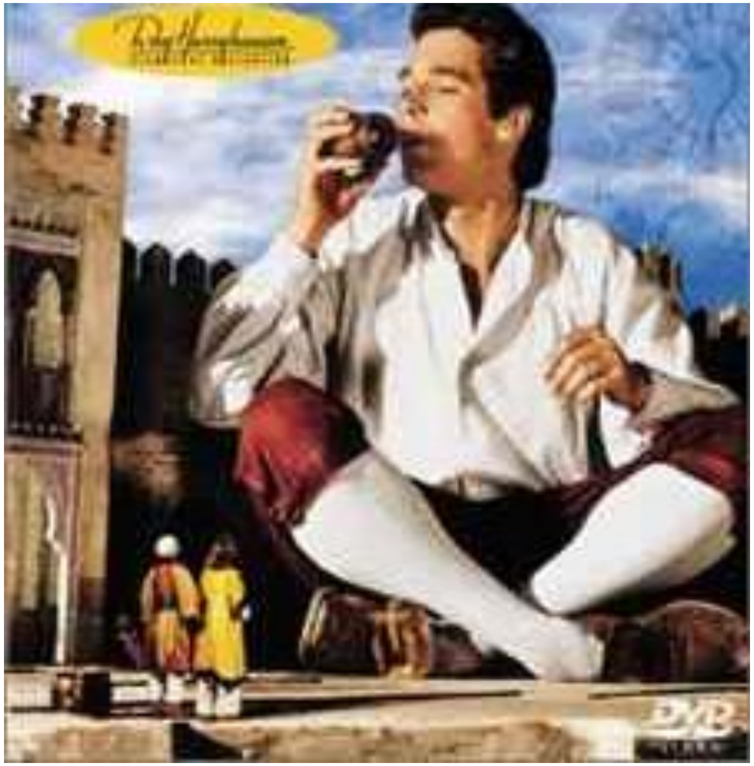
<u>Mouse</u> ($L = 5$ cm)
$1/L = 1/(0.05\text{ m})$
$= 20\text{ m}^{-1}$

<u>Polar Bear</u> ($L = 2$ m)
$1/L = 1/(2\text{ m})$
$= 0.5\text{ m}^{-1}$

20 : 0.5 or 40 : 1

Dimensional Analysis: Gulliver’s Travels

- Gulliver was 12x the Lilliputians
- How much should they feed him?
  12x their food ration?
- A persons food needs are related to their mass (volume) – This depends on the cube of the linear dimension



Let $\mathbf{L_G}$ and $\mathbf{V_G}$ denote <u>G</u>ulliver's linear and volume dimensions.
Let $\mathbf{L_L}$ and $\mathbf{V_L}$ denote the <u>L</u>illiputian's linear and volume dimensions.

Gulliver is 12x taller than the Lilliputians,
$\mathbf{L_G} = 12\ \mathbf{L_L}$

Now $V_G \propto (L_G)^3$ and $V_L \propto (L_L)^3$, so

$$\begin{aligned} V_G / V_L &= (L_G)^3 / (L_L)^3 \\ &= (12\ L_L)^3 / (L_L)^3 \\ &= 12^3 \\ &= 1728 \end{aligned}$$

Gulliver needs to be fed 1728 times the amount of food each day as the Lilliputians

Page 8

"I found my arms and legs were strongly fastened on each side to the ground"

This problem has direct relevance to drug dosages in humans

Dimensions of Some Common Physical Quantities

[x], Length – L

[m], Mass – M

[t], Time – T

[v], Velocity – LT^{-1}

[a], Acceleration – LT^{-2}

[F], Force – MLT^{-2}

[ρ], Mass Density – ML^{-3}

[P], Pressure – $ML^{-1}T^{-2}$

[*E*], Energy – $ML^{2}T^{-2}$

[*I*], Electric Current – QT^{-1}

[q], Electric Change – Q

[E], Electric Field - $MLQT^{-2}$

All are powers of the fundamental dimensions:

[Any Physical Quantity] = $M^{a}L^{b}T^{c}Q^{d}$

Dimensional Homogeneity

- Law of dimensional homogeneity (DH): every additive term in an equation must have the same dimensions
- Example: Bernoulli equation

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C$$

  - $\{p\} = \{\text{force/area}\} = \{\text{mass x length/time}^2 \text{ x } 1/\text{length}^2\} = \{M/(T^2L)\}$
  - $\{1/2\rho V^2\} = \{\text{mass/length}^3 \text{ x } (\text{length/time})^2\} = \{M/(T^2L)\}$
  - $\{\rho gz\} = \{\text{mass/length}^3 \text{ x length/time}^2 \text{ x length}\} = \{M/(T^2L)\}$

Nondimensionalization of Equations

- Given the law of DH, if we divide each term in the equation by a collection of variables and constants that have the same dimensions, the equation is rendered nondimensional

- In the process of nondimensionalizing an equation, nondimensional parameters often appear, e.g., Reynolds number and Froude number

Nondimensionalization of Equations

- To nondimensionalize, for example, the Bernoulli equation, the first step is to list primary dimensions of all dimensional variables and constants

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C$$

$\{p\} = \{M/(T^2L)\}$ $\{\rho\} = \{M/L^3\}$ $\{V\} = \{L/T\}$

$\{g\} = \{L/T^2\}$ $\{z\} = \{L\}$

- Next, we need to select Scaling Parameters. For this example, select L, U_0, ρ_0

Nondimensionalization of Equations

- By inspection, nondimensionalize all variables with scaling parameters

$$p^\star = \frac{p}{\rho_0 U_0^2} \qquad \rho^\star = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad V^\star = \frac{V}{U_0}$$

- Back-substitute *p, ρ, V, g, z* into dimensional equation $g^\star = \frac{gL}{U_0^2}$ $\quad z^\star = \frac{z}{L}$

$$\rho_0 U_0^2 p^\star + \frac{1}{2}\rho_0 \rho^\star \left(U_0^2 {V^\star}^2\right) + \rho_0 \rho^\star g^\star U_0^2 z^\star = C$$

Nondimensionalization of Equations

- Divide by $\rho_0 U_0^2$ and set $\rho^* = 1$ (incompressible flow)

$$p^\star + \frac{1}{2}V^{\star 2} + g^\star z^\star = \frac{C}{\rho_0 U_0^2} = C^\star$$

- Since $g^* = 1/Fr^2$, where

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL}}$$

$$p^\star + \frac{1}{2}V^{\star 2} + \frac{1}{Fr^2} z^\star = C^\star$$

Nondimensionalization of Equations

- Note that convention often dictates many of the nondimensional parameters, e.g., $1/2\rho_0 U_0^2$ is typically used to nondimensionalize pressure.

$$p^\star = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}$$

- This results in a slightly different form of the nondimensional equation

$$p^\star + V^{\star 2} + \frac{2}{Fr^2} z^\star = C^\star$$

- BE CAREFUL! Always double check definitions.

Nondimensionalization of Equations

- Advantages of nondimensionalization
  - Increases insight about key parameters
  - Decreases number of parameters in the problem
    - Easier communication
    - Fewer experiments
    - Fewer simulations
  - Extrapolation of results to untested conditions

Dimensional Analysis and Similarity

- Nondimensionalization of an equation is useful only when the equation is known!
- In many real-world flows, the equations are either unknown or too difficult to solve.

  - *Experimentation* is the only method of obtaining reliable information
  - In most experiments, geometrically-scaled models are used (time and money).
  - Experimental conditions and results must be properly scaled so that results are meaningful for the full-scale prototype.
  - ***Dimensional Analysis***

Dimensional Analysis and Similarity

- Primary purposes of dimensional analysis
  - To generate nondimensional parameters that help in the design of experiments (physical and/or numerical) and in reporting of results
  - To obtain scaling laws so that prototype performance can be predicted from model performance.
  - To predict trends in the relationship between parameters.

Fenomeni con scale spazio-temporali diverse

Fenomeni naturali (prototipo) e riproduzioni in laboratorio (modello)

Come far sì che lo studio di laboratorio sia rappresentativo del prototipo naturale?

- Si dice che esiste *similarità* fra due quantità quando è possibile metterle in relazione attraverso una costante adimensionale (indipendente dal sistema di coordinate)

Teoria della *similitudine*

Permette attraverso opportune trasformazioni (dette di similarità), di ***proiettare***, in modo quantitativamente rigoroso e riproducibile, l'evoluzione reale di un processo fisico a scala naturale ("***prototipo naturale***") sull'evoluzione del medesimo processo, rappresentato però su una scala ridotta ("***modello***").

Nella riproduzione su modello di un fenomeno naturale occorre che il pattern del flusso nel prototipo sia una copia ingrandita e non distorta del “pattern” del flusso nel modello.

Si ha similitudine geometrica fra due sistemi quando è possibile far coincidere uno di essi con l’altro mediante un opportuno cambiamento di unità di misura delle lunghezze (e’ la meno importante fra le similitudini possibili).

Si dice che *due "oggetti"* sono cinematicamente simili se è possibile trovare due SR entrambi in quiete rispetto a *O*, tali che gli "oggetti" siano *geometricamente* simili per ogni t e che il rapporto di similitudine geometrica sia indipendente da *t*.

Se le rispettive masse stanno fra loro in un rapporto costante *μ*, allora essi sono anche *materialmente simili*

Se è possibile istituire una corrispondenza biunivoca fra i materiali di due sistemi e fra istanti omologhi di tempo tali per cui essi presentino contemporaneamente similitudine materiale e cinematica, allora i due sistemi si dicono ***dinamicamente*** simili.

Un opportuno cambiamento di unità di misura fondamentali (M, L, T ad esempio) permette di trasformare le equazioni del moto (e le condizioni al contorno) di un sistema in quelle dell’altro.

Per avere similarità dinamica

è necessario che, in corrispondenza di punti geometricamente similari, le forze agenti sulle particelle fluide siano in rapporti fissi ad istanti omologhi di tempo

Se esiste similarità dinamica fra due processi fisici, è possibile trasferire i risultati ottenuti per il primo al secondo, e viceversa.

Analisi di scala

Praticamente la procedura richiede che le equazioni in esame vengano adimensionalizzate tramite gli opportuni parametri scala.

Questa metodologia fornisce gli ordini di grandezza dei vari termini delle equazioni attraverso dei coefficienti numerici i cui valori variano al variare delle scale su cui si considerano i processi.

Lo scaling permette anche di valutare l'importanza relativa dei vari termini che vi compaiono e di procedere quindi a semplificazioni (trascurare le quantità meno rilevanti ⟹ analisi di scala).

In tal modo le equazioni complete che, per quel problema, conterrebbero più informazioni del necessario, vengono *ridotte* a forme limite più semplici, dalle quali è poi possibile capire se la scelta delle grandezze di scala é stata, o meno, più appropriata dal punto di vista fisico (attenzione!! La scelta iniziale può non essere corretta !!!)

Con particolare riferimento alle equazioni dinamiche è possibile individuare la seguente procedura per l'adimensionalizzazione.

1) Si scelgono le grandezze di scala per ciascuna variabile (spesso rappresentate da gradienti o da differenze). Esse possono anche essere differenti per ciascuna *dimensione spaziale* cosicché alcune direzioni del modello possono risultare contratte o dilatate rispetto a quelle corrispondenti del riferimento iniziale.

1 bis) Normalmente la scelta più corretta sarà quella che darà grandezze adimensionali il cui ordine di grandezza si avvicini maggiormente all'unità.

2) Si effettua l’adimensionalizzazione e si normalizza l’equazione così ottenuta per quella quantità che riduce all’unità il coefficiente che moltiplica il termine ritenuto più importante nel problema in oggetto.

2 bis) Gli altri coefficienti, che moltiplicano i termini dell’equazione, rappresentano ora i rapporti delle forze caratteristiche rispetto a quella evidenziata come fondamentale; la loro grandezza è indice dell’importanza (o trascurabilità) del termine ad essi corrispondente.

Può accadere che uno dei parametri adimensionalizzati assuma un valore estremo *(0 o ∞):* l'equazione assume una forma limite, cancellando, nel primo caso, il termine corrispondente oppure trattenendo, nel secondo, solo lui (caso di più semplice soluzione, ma contenente ancora la fisica essenziale del problema).

Le operazioni elencate possono dar luogo a leggi approssimate che valgono in certe regioni e non in altre. Occorre pertanto interpretare con cautela i risultati ottenuti e confrontarli sempre con l'esperienza nel prototipo.

Esempio

Forze agenti: solo quelle di inerzia e quelle d'attrito (moto lungo x, fluido incompressibile, senza superfici libere o effetti di galleggiamento).
Similarità solo se il rapporto delle forze di inerzia e di quelle d'attrito è il medesimo in tutti i punti geometricamente corrispondenti.

$$\mathrm{Re} = \frac{Forze\, d'inerzia}{Forze\, d'attrito} = \frac{\rho u \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \equiv \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Si vede che la condizione di similarità è soddisfatta se la quantità *ρUL/μ* resta invariata al variare di *ρ, U, L* e *μ* nel passaggio da un flusso all'altro. Tale quantità prende il nome di numero di Reynolds (*Re).*

Esempio applicativo

Microburst atmosferici (sicurezza voli aerei)

Diverse simulazioni numeriche:
LES (Large Eddy Simulations)

Conservazione del numero densimetrico di Froude

$$\mathrm{Fr} \equiv \frac{w}{\left(gH\frac{\delta T_R}{T_o}\right)^{\frac{1}{2}}}$$ $\Rightarrow$ Fr~0.5

prototipo	Modello di Lab
Altezza scala H ~1500 m	H ~ 0.2 m
Velocità verticale scala w ~10 m/s	w ~ 0.03 m/s
Gradiente Buoyancy $\frac{\Delta T}{T} = \frac{7}{300}$	$\frac{\Delta T}{T} = \frac{0.5}{300}$
Tempo scala $\tau = \frac{H}{w} \approx 150\,s$	Tempo scala $\tau = \frac{H}{w} \approx 7\,s$
g	g

Dimensional Analysis Theorems

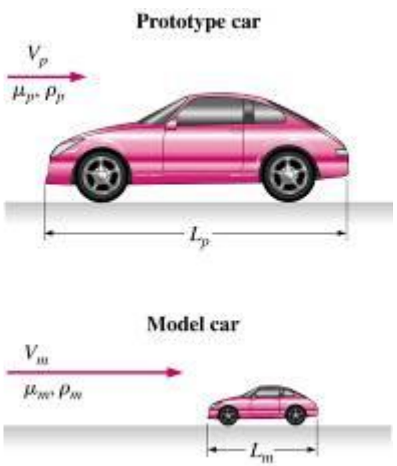
- **Dimensional Homogeneity Theorem**: Any physical quantity is dimensionally a power law monomial - **[Any Physical Quantity] = $M^aL^bT^cQ^d$**

- **Buckingham Pi Theorem:** If a system has ***k*** physical quantities of relevance that depend on ***r*** independent dimensions, then there are a total of ***k-r*** independent dimensionless products $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r}$. The behavior of the system is describable by a dimensionless equation

$$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r})=0$$

Dimensional Analysis and Similarity

- Complete similarity is ensured if all independent Π groups are the same between model and prototype.
- What is Π?
  - We let uppercase Greek letter Π denote a nondimensional parameter, e.g.,Reynolds number *Re*, Froude number *Fr,* Drag coefficient C_D, etc.



- Consider automobile experiment
- Drag force is $F = f(V, \rho, \mu, L)$
- Through dimensional analysis, we can reduce the problem to

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \rightarrow C_D = f(Re)$$

Buckingham Pi Theorem

- Step 1:

  List all the dimensional parameters involved

  Let n be the number of parameters

  Example: For drag on a sphere, F, V, D, ρ, μ, and $n = 5$

Buckingham Pi Theorem

- Step 2

  *Select a set of fundamental (primary) dimensions (f*or example *MLT*, or *FLT)*

  Example for drag: choose *MLT*

Buckingham Pi Theorem

- Step 3

  List the dimensions of all parameters in terms of primary dimensions

  Let *r* be the number of primary dimensions

  Example: For drag on a sphere *r* = 3

$$
\begin{array}{ccccc}
F & V & D & \rho & \mu \\
\dfrac{ML}{T^2} & \dfrac{L}{T} & L & \dfrac{M}{L^3} & \dfrac{M}{LT}
\end{array}
$$

Buckingham Pi Theorem

- Step 4

  Select a set of r dimensional parameters that includes all the primary dimensions

  Example: For drag on a sphere (r = 3) select ρ, V, D

Buckingham Pi Theorem

- Step 5

Set up dimensional equations, combining the parameters selected in Step 4 with each of the other parameters in turn, to form dimensionless groups

There will be *n – r* equations

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F$$

Buckingham Pi Theorem

- Step 5 (Continued)

Example: For drag on a sphere

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{T^2}\right) = M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

Buckingham Pi Theorem

- Step 6

Check to see that each group obtained is dimensionless

$$[\Pi_1] = \left[\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right]$$

Exponent Method

1. List all ***k*** variables involved in the problem
2. Express each variables in terms of [M] [L] [T] dimensions (***r***)
3. Determine the required number of dimensionless parameters (***k* – *r***)
4. Select a number of repeating variables = ***r***
   (All dimensions must be included in this set and each repeating variable must be independent of the others.)
5. Form a dimensionless parameter π by multiplying one of the non-repeating variables by the product of the repeating variables, each raised to an unknown exponent.
6. Solved for the unknown exponents.
7. Repeat this process for each non-repeating variable
8. Express result as a relationship among the dimensionless parameters – $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots) = 0$.

Significant Dimensionless Groups in Fluid Mechanics

- ✓Reynolds Number $$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$
- ✓ Mach Number $$M = \frac{V}{c}$$
- ✓Froude Number $$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$
- ✓Euler Number $$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$
- ✓ Weber Number $$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$$
- ✓ Cavitation Number $$Ca = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

Altri numeri adimensionali

Numero di Ekman

Importanza termini viscosi rispetto a Coriolis

$$Ek = \frac{\nu_R}{\Omega L^2}$$

Numero di Rossby

Importanza termini inerziali rispetto a Coriolis

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{U_R}{L\Omega_R}$$

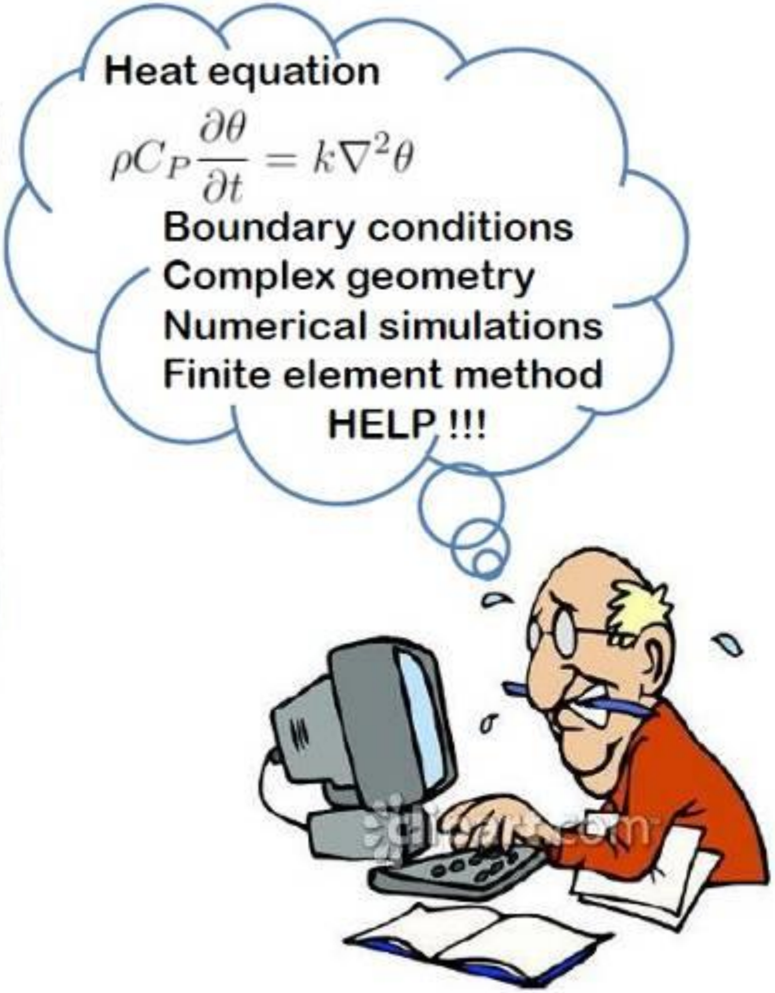
Numero di Richardson

Importanza energia potenziale rispetto a quella cinetica

$$\mathrm{R}i = \frac{N^2}{\left|\frac{du}{dz}\right|^2}$$

Example: cooking time

20lbs turkey



The scaling law of cooking

You must always know a little bit of physics about the phenomenon…

- Conduction of heat ⇨ thermal conductivity $k \approx 2$ W / (m.K)
- Storage of heat ⇨ specific heat capacity $C_P \approx 3500$ J / (kg.K)

Other significant variables

- Temperature (difference) $\Delta\theta \approx 300°F \approx 150$ K
- Mass (or size) of the turkey M = 20lbs = 9 kg
- Density $\rho \approx 1000$ kg/m^3
- Cooking time T_{cook} = ???

Build a formula in agreement with units (how?)

$$\boxed{T_{cook} \sim \frac{\rho^{1/3} C_P M^{2/3}}{k}}$$

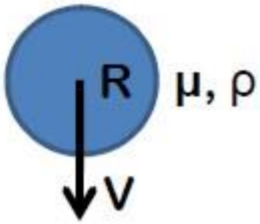
Proportionality factor $\simeq 1$ ⇨ what's T_{cook} ???

Experience / cooking book / internet ⇨ 3h for a 10lbs turkey at 350°F

What about a 20lbs turkey ? Not 6h, but 3 x $2^{2/3}$ ≈ $\boxed{\text{4h 45min}}$

Drag on a sphere

Which force is relevant ?



	Bacteria 	Soccer Ball 
	$V \sim 5.10^{-5}$ m/s, $R \sim 2.10^{-6}$ m $\mu_w = 10^{-3}$ kg/(m.s) $\rho_w = 10^3$ kg/m^3	$V \sim 15$ m/s, $R \sim 0.1$ m $\mu_a = 18.10^{-6}$ kg/(m.s) $\rho_a = 1.22$ kg/m^3
Viscous drag $F_D = 6\pi\,\mu\,R\,V$	$F_D \sim 2.10^{-12}$ N	$F_D \sim 5.10^{-5}$ N
Inertial drag $F_D = c_x\,\rho\,(\pi R^2)\,V^2$ ($c_x \sim 0.4$)	$F_D \sim 10^{-17}$ N	$F_D \sim 3$ N

$$\frac{F_D^{inert}}{F_D^{visc}} = \frac{c_x}{6}\frac{\rho R V}{\mu} \sim \boxed{\frac{\rho R V}{\mu} = \mathrm{Re}}$$

Reynolds number (dimensionless)
Re >> 1 ⇨ Inertia >> Viscosity
Re << 1 ⇨ Viscosity >> Inertia

Elastic similarity

a) The size of trees

2 different lengths r (radius) and L (height)

No buckling if elasticity > weight

Criterion ⇨ balancing both (energy)

Gravity $E_{grav} \sim mgL \sim \rho g r^2 L^2$

Elasticity $E_{elast} \sim \frac{Er^4}{L}$

$$E_{grav} \lesssim E_{elast} \Rightarrow \boxed{L^3 \lesssim \frac{E}{\rho g} r^2}$$

Maximum size of trees
for a given radius

Fagus Grandifolia (increasing age)