***MISURA DELLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE G MEDIANTE LõUSO DELLA BILANCIA DI CAVENDISH***

NON CANCELLARE
ATTENZIONE
Bilancia di Cavendish
LA DISTANZA "R" TRA LA BILANCIA
E IL RIGHELLO E' DI
547,5
547 cm
(±1 cm)

## *Legge generale della gravità*

Considerati due punti materiali qualsiasi con masse m e M separate da una distanza r, tra esse agisce sempre una forza gravitazionale di attrazione e diretta lungo la retta che li congiunge :

$F = G (m M/ r^2)$

$\boldsymbol{F} = - G ( m M /r^2) \boldsymbol{r}/r$

Mŏ --------- >ŏ m ; Forza di gravità su *m* per effetto di *M* *( in grassetto le quantità vettoriali)*

***r***

*G* eô la costante di gravitazione universale. E ó una delle costanti fondamentali della fisica.

Il valore accettato eô: $G = 6.67259(85)\ 10^{-11}$ $(N\ m^2 / kg)$

Corrisponde alla forza espressa in newton con cui due sfere omogenee di massa di 1 kg si attraggono quando la distanza tra i loro centri eô di 1 m.

Il valore di G dipende esclusivamente dalle unità di misura usate ed eô completamente indipendente dal luogo e dal tempo, e da qualsiasi proprietà della materia. Lô attrazione gravitazionale tra due corpi eô indipendente dalla natura chimica e fisica di essi. Lô attrazione esercitata dalla Terra eô la stessa per qualsiasi corpo di massa eguale ( es: 1 kg) posto ad una certa distanza dal suo centro indipendentemente che si tratti di piombo, acqua, ghiaccio, aria o altro. Esprime la forza tra particelle puntiformi .

Come possiamo trattare corpi estesi? Ciascun corpo si può pensare scomposto in n particelle puntiformi sulle quali si applica la relazione per il calcolo della forza e la forza totale si ottiene integrando su tutta la massa. In problemi gravitazionali in cui si trattano sfere uniformi si può supporre la massa concentrata nel centro. Occorre determinare G sperimentalmente. Una volta determinato G per una data coppia di corpi, possiamo usare quel valore nella legge di gravitazione per determinare la forza di gravitazione tra qualsiasi altra coppia di corpi.

Per determinare G eô necessario misurare la forza di attrazione tra due masse conosciute.

Useremo un metodo simile a quello usato da Cavendish nel 1798 per misurare per la prima volta il valore di G.

Faremo uso della ***bilancia di Cavendish*** che eô una bilancia di torsione. Essa funziona da dinamometro molto sensibile , in cui i momenti delle forze vengono misurati per mezzo dei momenti delle reazioni elastiche di torsione da esse provocate.

## *Note sulla sensibilità della bilancia di torsione*

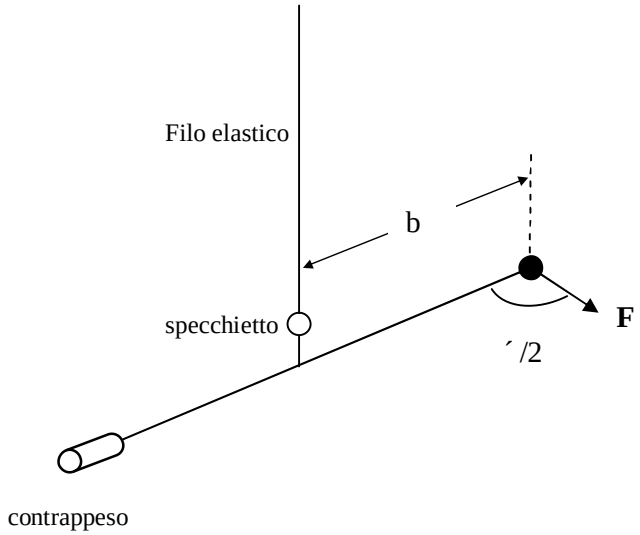



Fig1:schema di una bilancia di torsione

La costante elastica di torsione del nastro (filo cilindrico) eô data da $k = (\pi/2)\, M\, r^4 / l$ [ N m / rad] dove:
$l$ = lunghezza nastro;
$r$ = raggio nastro;
$M$ = modulo di rigidità del materiale con cui eô realizzato il nastro.
Il momento di richiamo delle forze elastiche di torsione vale $\tau = k\,\theta$.
Se si applica una forza $F$ a distanza $d$ dallôasse si produce un momento della forza $F\,d$ che si equilibra con il momento antagonista di torsione elastica $\tau = k\,\theta$. Allôequilibrio $F\,d = k\theta$.
Misurato $\theta$ , nota k si risale a $\tau$ e ad $F$.
Nel caso in cui la massa piccola valga 15 g , la massa grande valga 1.5 kg , la distanza r tra i centri delle due sfere valga r = 4.5 cm le forze in gioco sono dellôordine di $F = 10^{-9}$ N. Esse sono molto deboli e occorre una bilancia con sensibilità molto elevata per apprezzare le rotazioni prodotte dai momenti di tali forze.
La sensibilità della bilancia eô definita come: $S = d\tau/d\theta = k$ [ N m / rad] . Con essa si possono ottenere sensibilità molto elevate: k dipende dalla quarta potenza del raggio del filo ed inoltre si riescono a produrre fili molto sottili e sufficientemente robusti per sostenere il peso dellôequipaggio.
Con i parametri sopra riportati e per un filo di quarzo ($M = 3.1\ 10^{10}$ N/m$^2$; $\phi = 10^{-5}$ *m)*si può ottenere una bilancia con sensibilità S che può essere spinta sino a valori di circa $10^{-11} \div 10^{-12}$ [N m / rad]
{ applicando un momento di $10^{-11}$ *(N m )*si ottiene una torsione del nastro di *1 radiante*}

## *Breve descrizione della bilancia.*

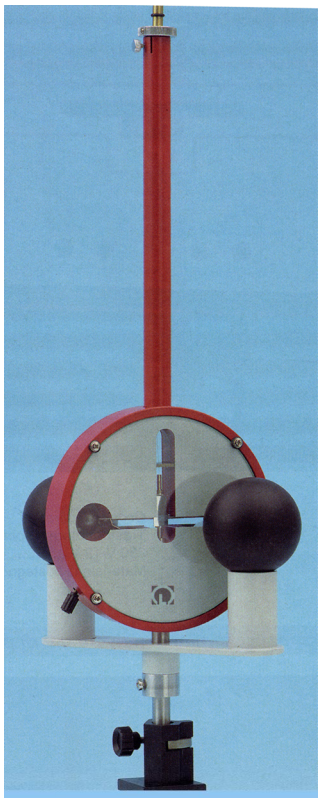
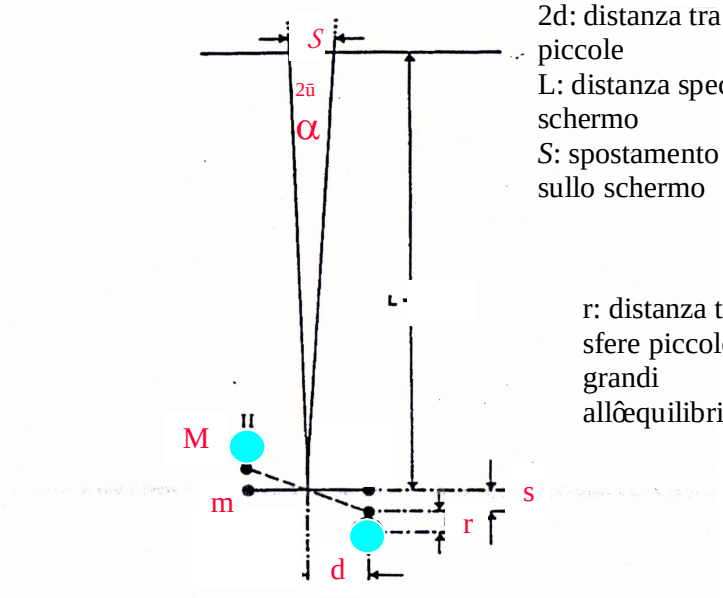


Fig 2 : foto di una bilancia di Cavendish




2d: distanza tra le sfere piccole
L: distanza specchietto-schermo
*S*: spostamento misurato sullo schermo

r: distanza tra sfere piccole e grandi allôequilibrio

Fig3:schema della bilancia di Cavendish

Eô dotata di un sistema di lettura ad indice luminoso che funge da ôleva ottica ô. Vedere figure di copertina ,le figure 2, 3 e lo schema di figura 4.
La bilancia eô racchiusa da una custodia metallica rettangolare con un lato provvisto di una finestra trasparente , onde permettere una osservazione diretta del sistema mobile . Sulla parte inferiore

unôasta metallica serve per il suo fissaggio a parete o su di un piano orizzontale. Sulla parte superiore un tubo metallico racchiude il filo di torsione . Sulla estremità del tubo di supporto vi eô una ghiera regolabile , che sostiene il nastro di torsione di bronzo lungo 25 cm circa e di sezione (0.01 x 0.15 $mm^2$). Al nastro eô sospeso un sistema a T rovesciata alla quale eô fissata , al centro, uno specchio concavo (distanza focale circa 30 cm) e alle estremità due sferette di piombo di 15 g. Esse si trovano alla distanza di 5 cm dallôasse di torsione.
La cavità entro la quale eô montato il manubrio a T capovolto eô molto piccola e contiene dei divisori in plastica, per ridurre ogni possibile influenza da parte di correnti dôaria. La sospensione può venire bloccata sulla parte inferiore per mezzo di due viti calanti. Il bloccaggio eô utile per il trasposto dello strumento.
Sotto la custodia metallica rettangolare vi eô un supporto girevole sul quale sono montate due sfere di piombo di 1.5 kg. Esse possono essere avvicinate alle sferette di piombo montate entro la custodia. Con un anello di regolazione questo supporto girevole viene preventivamente fissato in modo che i centri delle sfere esterne e delle sferette interne si trovino sullo stesso piano orizzontale.
Nella figura di copertina eô riprodotta la bilancia montata su un tavolo.
Ad una distanza di circa 5 m dalla bilancia viene fissata una scala graduata lunga circa 0.5 m per la lettura della posizione dellôindice luminoso.(vedere figura 4)
Una sorgente di radiazione luminosa, costituita da una lampadina a incandescenza , viene posta ad una distanza di circa 0.3 m dalla bilancia. Il filamento della lampadina disposto orizzontalmente, attraversa un condensatore di luce, viene diaframmato , e infine proiettato sullo specchietto fisso solidamente con lôequipaggio mobile della bilancia.
Per riflessione sullo specchietto, lôimmagine della lampadina viene raccolta dalla scala graduata.
La prima volta che la bilancia viene fatta funzionare , si libera lôarresto del sistema mobile e lo si lascia oscillare liberamente , con eventuali regolazioni della ghiera mobile posta sopra il tubo di supporto, in modo tale che lôequipaggio interno, nelle sue oscillazioni, non tocchi le pareti trasparenti della custodia e lôindice luminoso si trovi al centro della scala graduata posta sulla parete opposta.
La regolazione della bilancia di gravitazione richiede tempo e pazienza. Sbloccato il sistema si deve regolare il tutto in modo tale che lôoscillazione dellôindice luminoso stia entro la scala graduata. Per fare questo occorre che le sfere grandi si trovino in posizione simmetrica rispetto allôasse contenente le due sferette interne .
AVVERTENZA. Lo Studente trova la bilancia già montata e funzionante: non deve eseguire la fase di montaggio e regolazione; non deve eseguire alcuna operazione di aggiustamento; opererà lontano dalla bilancia e starà vicino alla scala graduata per lôoperazione di lettura.

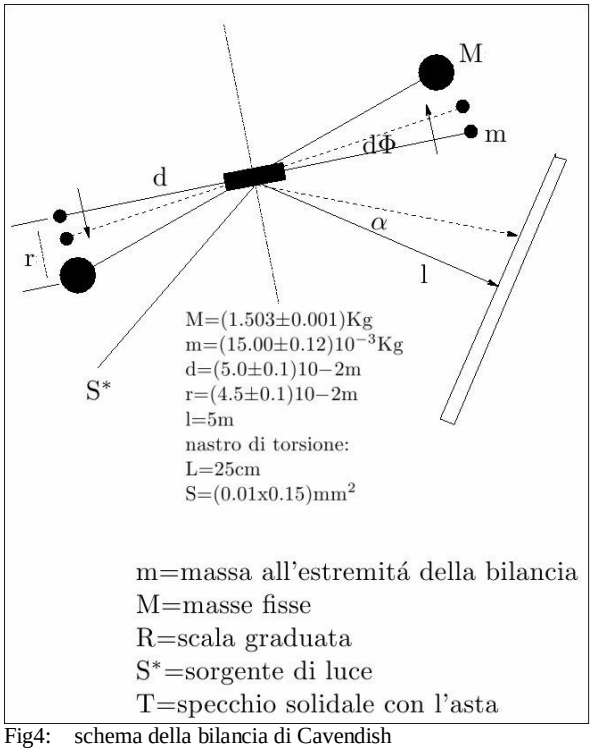



Fig4: schema della bilancia di Cavendish

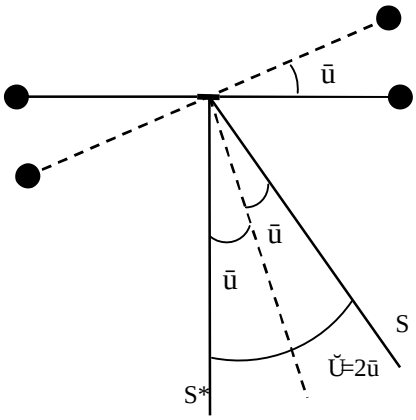



Fig5: relazione fra lôangolo ū (angolo di rotazione dellôequipaggio mobile) e lôangolo Ŭ(angolo del raggio riflesso)

***Procedura per la misura di G*** (vedere anche le note allegate)

Assumiamo che allôinizio la posizione della bilancia sia in equilibrio con lôindice luminoso che indica la posizione di riposo So. Le sfere grandi si trovino in <u>posizione simmetrica rispetto allôasse contenente le due sferette interne</u> . La componente dei momenti di tutte le forze agenti sulle sferette nel piano che contiene i quattro centri delle sfere eô nulla e la bilancia eô a riposo in posizione di equilibrio. Il filo della bilancia non eô torto.

Si spostino le masse M sino a raggiungere la configurazione di figura 4 , ove la distanza tra i centri delle sfere eô pari ad r .

Sotto lôazione dei momenti delle forze di attrazione gravitazionali tra m ed M lôequipaggio comincia a muoversi.

A questo istante si inizia il rilevamento , ogni 5 s per i primi 120 s ed ogni 20 s per il restante tempo (circa 1 ora), delle posizioni dellôindice luminoso immagine di S* sulla scala graduata. (In figura 6 si riporta un esempio di andamento delle posizioni s in funzione di t, $s(t_i)$. Ne risulta un moto oscillatorio smorzato attorno alla nuova posizione di equilibrio).

Si riportano in tabella il tempo e le posizioni.

Quando il manubrio si sposta di un angolo $\phi$, il raggio luminoso si sposta di un angolo $\alpha = 2\,\phi$ . Lo spostamento su R del raggio luminoso eô pari a $S = L\,\alpha = 2\,L\,\phi$.

La fig.5 indica la relazione tra lôangolo $\phi$ di rotazione del manubrio ed il corrispondente angolo $\alpha$ tra il raggio luminoso proveniente da S* e quello riflesso dallo specchietto solidale al manubrio e raccolto sulla scala graduata.

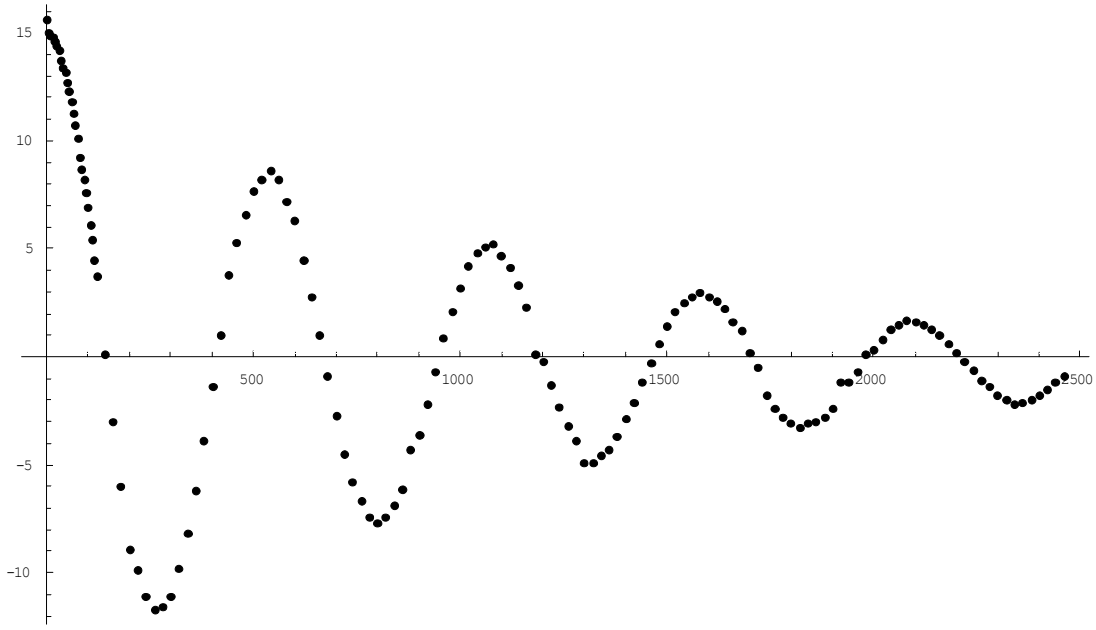


Fig 6

## *Misura di G*

Si usano due metodi. Il metodo dellô***accelerazione iniziale*** sfrutta i dati rilevati nei primi due minuti per ricavare lôaccelerazione a cui eô soggetta la sfera piccola; il metodo dellô***escursione finale*** usa le informazioni complete sul moto oscillatorio smorzato per ricavare la posizione di equilibrio ed il periodo di oscillazione.

## *Metodo dellôaccelerazione iniziale*.

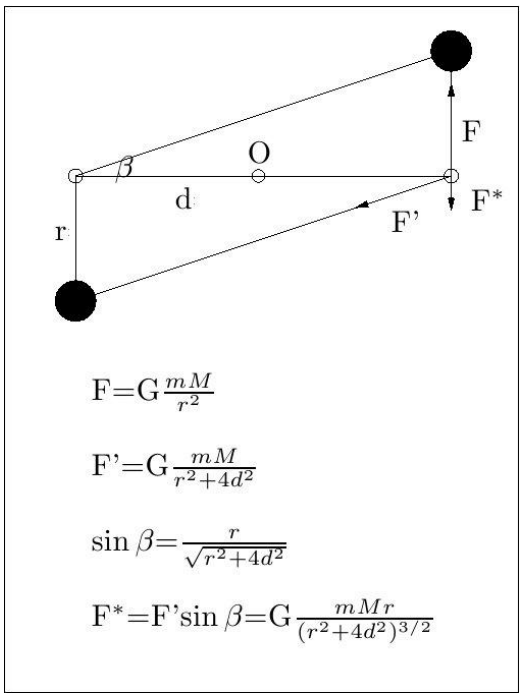


Fig7: schema delle forze in gioco. Tutte le forze sono contenute in un piano passante per i baricentri delle 4 sfere, piano che è ortogonale allôasse di rotazione (filo di torsione).

Descriviamo le forze in gioco. Tutte le forze sono contenute in un **piano ortogonale** allôasse di rotazione e contenente il cento di massa delle quattro sfere.

$F = G\, m\, M / r^2$

$F\hat{o} = g\, m\, M /(r^2 + 4\, d^2)$

$sen\ \beta = r / (r^2 + 4\, d^2)^{1/2}$

$F^* = F\hat{o}\, sen\ \beta$ e' ortogonale a $d$ e dà origine ad un momento di verso contrario a quello prodotto da $F$. La componente parallela a $d$ dà momento nullo.

Lôequazione generale del moto eô governata dalla <u>II equazione cardinale</u> del moto:

$2\, F\, d - k\, \phi\, ï\, \beta\, \phi' = I_o\, \phi''$

Dove:

$2\, F\, d$ eô il momento torcente dovuto alle forze gravitazionali;

$- k\, \phi$ e' il momento di richiamo delle forze di torsione; $-\beta\, \phi$ ó momento relativo alle forze di attrito;

$I_o$ eô il momento di inerzia del sistema rotante rispetto allôasse di rotazione. Tutti i momenti sono tra loro paralleli e diretti lungo lôasse di rotazione

Nei primi istanti del moto si può assumere che la torsione del filo sia trascurabile, così come le forze di attrito che dipendono essenzialmente dalla velocità. Trascurando quindi i termini $k\, \phi$ ; $\beta\, \phi'$ e per ora anche $F^*$, lôequazione dei momenti delle forze agenti sul sistema mobile rispetto al polo O negli istanti iniziali è:

$\tau_{EXT} = I_o\, \phi''$ ; $2\, F\, d = I_o\, \phi''$ ; $I_o = 2\, m\, d^2$ ( si trascura il momento di inerzia dellôasta)

$2\, F\, d = 2\, m\, d^2\, \phi''$

Ricordando che: $F = G\, m\, M / r^2$ segue $G\, m\, M / r^2 = m\, d\, \phi''$ ; $G\, M / r^2 = d\, \phi''$ ;

$\longrightarrow\ G = (d\, r^2 / M)\, \phi''$

Negli istanti iniziali lo spostamento della sfera piccola eô trascurabile ed $r$ si può supporre circa costante, e di conseguenza sono costanti anche la forza $F$ e lôaccelerazione $\phi''$.

Inoltre detto $s$ lo spostamento lineare della sfera piccola: $s\grave{o} = d\, \phi'' \rightarrow \phi'' = s\grave{o}/d \rightarrow$

$\rightarrow G = r^2\, s\grave{o} / M$

La quantità misurata e' però lo spostamento del raggio riflesso sulla scala graduata S :

$S = L\, \alpha = L\, 2\, \phi \rightarrow \phi'' = S\grave{o}/2L$

$\rightarrow G = (r^2\, d / 2\, L\, M)\, S\grave{o}$

I valori delle grandezze $d, M, r$, sono noti con il proprio errore. $L$ viene misurata.

Rimane da determinare $S$ò : lôaccelerazione eô costante ed il moto uniformemente accelerato. Pertanto lôandamento di S(t) eô di tipo parabolico : $S = ½\, S\grave{o}\, t^2$

Avendo rilevato ogni 5 s S(t) (vedi tabella), possiamo, con il MMQ, interpolare i punti $(S_i,t_i)$ e trovare la parabola che meglio li approssima: $S = A + B\, t + C\, t^2$ dove:

$A = So;\ B = Vo;\ C = 1/2\, a$. Si ricavano A , B , C con i relativi errori . Si verifica con il test del $\chi^2$ se la curva interpola bene i dati. Il valore dellôaccelerazione cercato sarà: $S\grave{o} = a = 2C$ ; $\sigma_a = 2\, \sigma_C$

Il valore di G risulta infine: $G = a\, (r^2\, d) / (2LM)$ [N m$^2$/kg$^2$]

La seguente tabella riporta i valori delle grandezze e le incertezze assolute:

| |
|---|
| M=(1,503±0,005)Kg |
| m=(20,00±0,12)$10^{-3}$ Kg |
| d=(5,0±0,1)$10^{-2}$ m |
| r=(4,5±0,1)$10^{-2}$ m |
| l=25 cm |
| Lå 5 m |
| Sezione nastro |
| A=(0,01*0,15) mm$^2$ |

(da calcolare le incertezze relative)

La valutazione dellô incertezza su G si ottiene propagando gli errori delle diverse grandezze, supposti indipendenti.

$\sigma^2_G = (\delta G/\delta r)^2\ \sigma_r^2 + (\delta G/\delta M)^2\ \sigma_M^2 + (\delta G/\delta d)^2\ \sigma_d^2 + (\delta G/\delta L)^2\ \sigma_L^2 + (\delta G/\delta a)^2\ \sigma_a^2$

o usando la relazione tra errori relativi:

$(\sigma_G / G)^2 = (2\sigma_r/r)^2 + (\sigma_M/M)^2 + (\sigma_d/d)^2 + (\sigma_L/L)^2 + (\sigma_a/a)^2$

Studiate il peso dei vari contributi allôerrore su G. Tenendo conto degli errori delle altre grandezze con che precisione misurereste L e di conseguenza che strumento sceglierestе per la misura di L?

## *Metodo dellôescursione finale o metodo delle oscillazioni.*

Dopo qualche minuto il moto è regolato dalla relazione completa :

$2\,F\,d - k\,\phi$ ï $\beta\,\phi$ ô $= Io\,\phi''$ (1) $\kappa > 0$ ; $\beta > 0$

Dove: $-\kappa\,\phi$ è il momento di richiamo delle forze di torsione

$-\beta\phi$ ó è il termine relativo alle forze di attrito

$2\,F\,d$ il momento delle forze gravitazionali

La soluzione di tale equazione differenziale eô data dalla somma della soluzione dellô *omogenea associata + integrale particolare.*

*Lôomogenea associata eô:* $Io\,\phi'' + k\,\phi + \beta\,\phi$ô $= 0$

Posto $: 2\,\delta = \beta/Io$ ; $\omega^2 = k / Io$ lôequazione diventa: $\phi$ò$+ 2\,\delta\,\phi$ô$+ \omega^2\,\phi = 0$

Si cercano soluzioni del tipo $\phi = e^{ht}$ per le quali risulta: $\phi' = h\,e^{ht}$; $\phi$ò $= h^2\,e^{ht}$

Per sostituzione si ottiene lôequazione algebrica di II grado

$h^2 + 2\,\delta\,h + \omega^2 = 0$ che ha soluzioni date da ;

$h = -\delta \pm (\delta^2$ ï $\omega^2)^{1/2}$

Nel nostro caso le forze elastiche prevalgono su quelle di attrito:

$\omega^2 > \delta^2$ ; $(\beta/2Io)^2 < k/Io$

Ponendo $\alpha^2 = \omega^2 - \delta^2$ si ottiene $h = -\delta \pm i\,\alpha$ . Si hanno così due soluzioni complesse coniugate.

$\phi_1(t) = e^{-\delta t} e^{\iota\alpha t} = e^{-\delta t}(\cos\alpha\, t + i \operatorname{sen} \alpha\, t)$

$\phi_2(t) = e^{-\delta t} e^{-\iota\alpha t} = e^{-\delta t}(\cos\alpha\, t - i \operatorname{sen}\alpha\, t)$

Se $\phi_1$ e $\phi_1$ sono indipendenti, il wronskiano W sarà Í 0 e come soluzione finale si può considerare una loro combinazione lineare:

$\phi(t) = C_1\,\phi_1(t) + C_2\,\phi_2(t) = A\,e^{-\delta t}(\cos\alpha\, t + \psi)$ ;

A $e$ $\psi$ sono costanti da determinare con le condizioni iniziali.

Come *integrale particolare* si può assumere $\phi = 2\,F\,d / k$;

verificabile sostituendo nella (1): $\phi$ô$= 0$ , $\phi$ò $= 0$ da cui $k\phi = 2\,F\,d$

La soluzione completa: $\phi(t) = A\,e^{-\delta t}(\cos\alpha\, t + \psi) + 2\,F\,d / k$

risulta essere un moto oscillatorio smorzato.

Se $\delta = 0$ si ottiene un moto armonico con asse delle $\phi$ traslato di $2Fd/k$ rispetto alla posizione iniziale $\phi_0$ e periodo :$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I_0 / k}$. (vedi figura seguente)

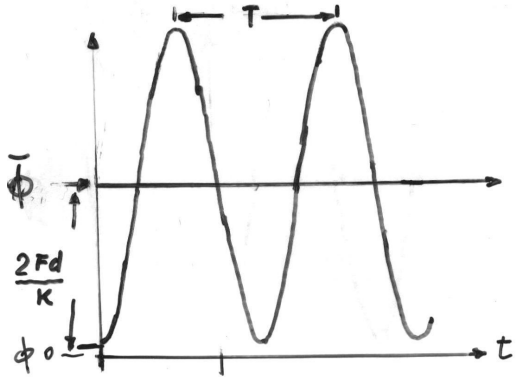



Fig8

Se $\delta$ ***Í 0*** a causa degli attriti si ha un moto oscillatorio smorzato di pseudo periodo
$\boldsymbol{T = 2}\pi\sqrt{[1/(\omega^2 - \delta^2)]} = 2\pi / \alpha$ . (Vedi figura)

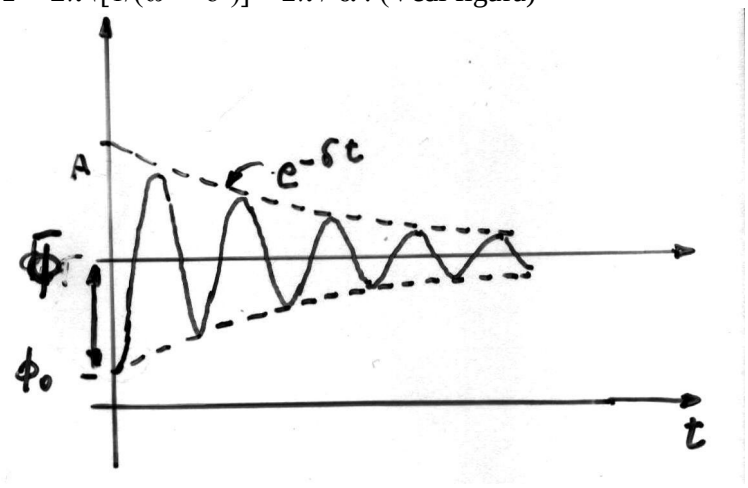



Fig 9

Nel nostro caso $\delta$ ***Í 0*** ma $\delta << \omega$ per cui: $\boldsymbol{T = 2}\pi / \omega = 2\pi \sqrt{(2\, \boldsymbol{m\, d^2/k})}$ ***;*** $\omega^2 = \boldsymbol{k / I_0}$

## *Determinazione di G*

Al crescere di ***t*** lôampiezza $\boldsymbol{A\, e^{-\delta t}} \rightarrow 0$ e $\phi$ tende al valore di equilibrio :

$\boldsymbol{\phi_{eq} = 2\, F\, d / k.}$

Ricordando che: $\omega^2 = \boldsymbol{k/Io}$ ; $\boldsymbol{k = 8\pi^2\, m\, d^2 / T^2}$ ; $\boldsymbol{F = G\, mM/r^2}$ avremo:

$\boldsymbol{\phi_{eq} = 2\, G\, (m\, M/r^2)(d/k) \rightarrow G = \phi_{eq}\, (r^2\, k)/(2\, m\, M\, d) = G_0}$

Ricordando inoltre che***:*** $\phi = \boldsymbol{S/2L} \rightarrow \phi_{eq} = \boldsymbol{S_{eq} / 2L}$ otterremo:

$\boldsymbol{G = (r^2/2mMd)(8\pi^2\, m\, d^2/T^2)(S_{eq}/2L)}$

$\rightarrow \boldsymbol{G = 2\pi^2 (d\, r^2/LMT^2) S_{eq}}$

$S_{eq} = \left|\overline{S} - S_0\right|$ dove $\boldsymbol{S_0}$ eô la posizione di riposo iniziale(caso di bilancia scarica a riposo).

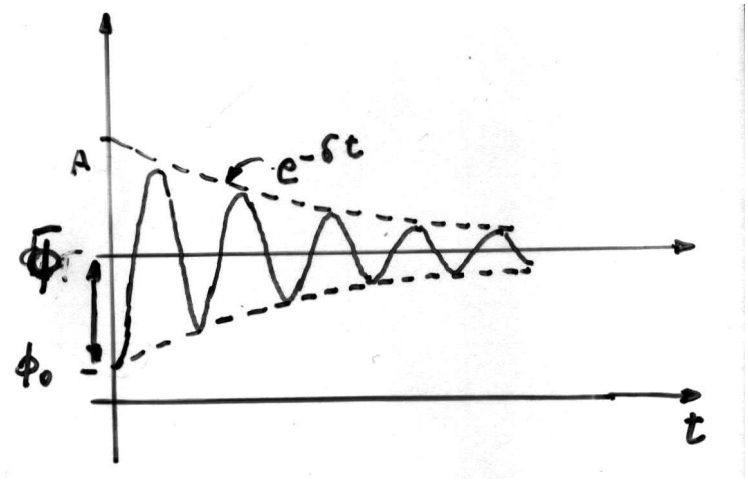



Fig 10

Nel caso di bilancia carica prima dellôinizio: $S_{eq} = 1/2 \left| \overline{S} - S_0 \right|$

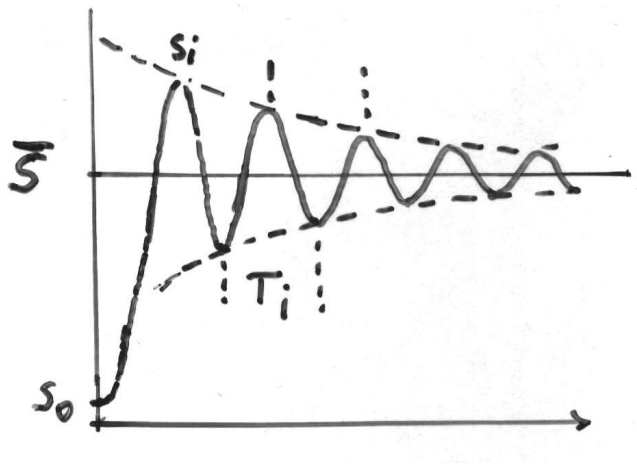



Fig11

Sono noti i valori delle grandezze ***r, d, m, M, L,*** occorre determinare $S_{eq}$ e ***T*** **.**
Il valore***(*** $S_0 \pm \sigma_{S0}$ ***)***eôdeterminato da una serie di misure $S_i$ ottenute quando la bilancia eôa riposo.
Il valore eô $\overline{S}$ ottenuto ad esempio dalla media di un numero dispari di massimi successivi e un numero pari di minimi successivi o viceversa.
$\overline{S} = ½[1/3\ (S_{M1} + S_{M3} + S_{M5}) + ½(S_{m2} + S_{m4})]$. Come errore sui singoli valori $\sigma_{Smi}$ e $\sigma_{SMi}$ si può assumere lôerrore di sensibilità della scala:( ± 1 mm) e lôerrore su $\overline{S}$ si ottiene dalla propagazione degli errori $\sigma_{Smi}$ e $\sigma_{SMi}$.
Lôerrore su $S_{eq}$ si ottiene propagando lôerrore su $\overline{S}$ e $S_{eq}$
Il valore di T si può valutare dalla media di vari periodi $T_i$ ottenuti dallôintervallo di tempo trascorso tra due elongazioni ( massimi o minimi) successive. Lôerrore è valutato come deviazione standard del valore medio ottenuto dai vari Ti.
Lôerrore relativo su G, assumendo errori indipendenti per le varie grandezze, vale:
$\sigma^2_{G/} G^2 = (2\ \sigma_r/r)^2 + (\sigma_M/M)^2 + (\sigma_d/d)^2 + (\sigma_L/L)^2 + (2\sigma_T/T)^2 + (\sigma_{Seq}/S_{eq})^2$

*NOTA: un modo più accurato per determinare le coordinate dei massimi e minimi è quello di interpolare nellôintorno di essi i punti* $(S_i, t_i)$ *con delle parabole e dai parametri di queste ricavare le coordinate* $(S_{Vi}, t_{Vi})$ *dei vertici e gli errori corrispondenti. I valori* $S_{Vi}$ *sono usati per determinare S e i valori* $t_{Vi}$ *per determinare T.*
*Eô predisposto un programma che fa uso di Mathematica per interpolare i punti (Si,ti) con una funzione sinusoidale smorzata a 5 parametri. Esso fornisce* $\overline{S}$ *,il coefficiente di smorzamento , il periodo di oscillazione e la matrice degli errori connessa coi 5 parametri. Nella figura seguente è mostrato lôottimo accordo tra la curva interpolante e i dati sperimentali.*

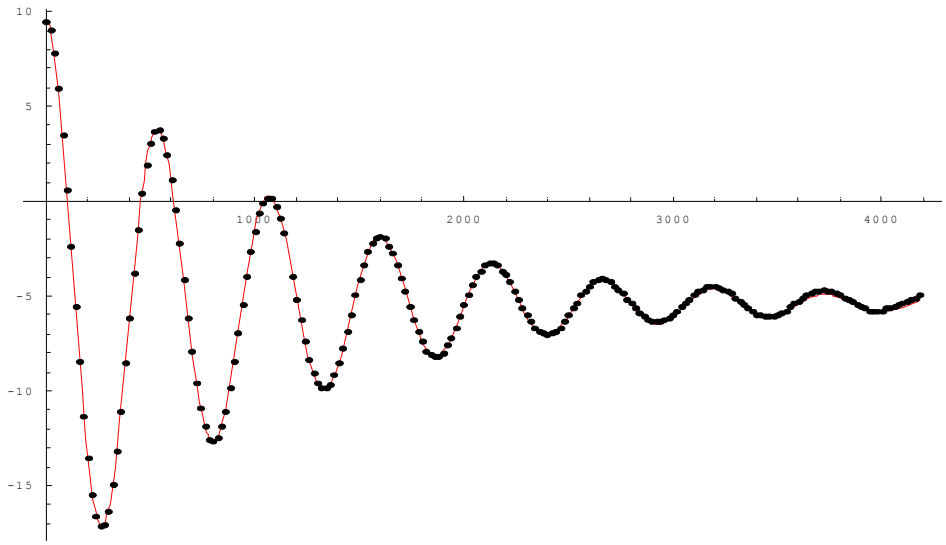


Fig12

## *Determinazione di k: costante elastica di torsione*

$\omega^2 = k / I_0$ ; $k = \omega^2 I_0 = 8 \pi^2 (m d^2 / T^2)$

Partendo da questa relazione, misurato lo pseudo periodo di oscillazione si ricava ***k***

$K = 8\pi^2 (m d^2/T^2)$ *[N m / rad]*

Oppure noto ***k*** si può risalire al momento di inerzia $I_0 = (T^2 k) / (4 \pi^2)$.

Lôerrore relativo su ***k*** è: $\sigma_k / k = \sqrt{[(\sigma_m / m)^2 + (\sigma_d / d)^2 + (2\sigma_T / T)^2]}$

## *Correzione per i SISTEMATICI.*

Nel calcolo di ***G*** si deve tenere conto anche dellôinfluenza della seconda sfera, più lontana,di massa ***M*** sul moto delle sfere di massa m. Facendo riferimento alla figura(7)

Allôequilibrio $M_{forze\ elastiche} = M_{forze\ gravitazinali}$

$K\, feq = 2 F d$ ï $2 ( F ô sen\beta) d$

$K \phi_{eq} = 2 G d m M / r^2 - 2 G d m M\, sen\beta/(r^2 + 4 d^2)$

$K \phi_{eq} = 2 G d m M / r^2 - 2 G d m M\, r/(r^2 + 4 d^2)^{3/2} =$

$(2 G d m M / r^2 ){1 ï r^3/(r^2 + 4 d^2)^{3/2}}$.

Indicato con $\gamma = r^3/(r^2 + 4 d^2)^{3/2}$ lôequazione diventa: $K \phi_{eq} = (2 G d m M / r^2){1 ï \gamma }$

$G{1-\gamma } = k \phi_{eq} r^2/(2 m M d) = G_0$

essendo $G_0$ il valore di ***G*** determinato in precedenza.

In definitiva $G = G_0/( 1 ï \gamma ) å G_0 (1 + \gamma )$

e $( 1 + \gamma )$ eô la correzione da apportare al valore $G_0$ **.** Tale correzione eô dellôordine del 7%.

## *Bilancia Carica*

Allôequilibrio, raggiunto sotto lôazione delle forze gravitazionali, vale la relazione:

$2 F d = K \phi_{eq1}$. Se da questa posizione di riposo si ribaltano le posizioni delle masse M , lôequazione che descrive il moto negli istanti iniziali diventa: $2 F d + K \phi_{eq1} = Io\, \phi ò$

in cui interviene anche il contributo del momento delle forze elastiche di torsione**.**

L'equazione diventa: $4 F d = Io\, \phi ò$ e il valore di **G** ricavato col metodo dellôaccelerazione diventa***:***

$G = a (r^2 d ) / ( 4LM )$

Indicando con $\phi_{eq2}$ la nuova posizione di equilibrio lôescursione, in termini di angolo $\phi$, dellôequipaggio mobile diventa ($\phi_{eq2}$ ï $\phi_{eq1}$) che eô 2 ($\phi_{eq}$ ï $\phi_0$) . Pertanto $S_{eq}$ ora assume il valore :

$S_{eq} = \left|\overline{S} - S_0\right| /2$

$G = 2\pi^2(d\, r^2/LMT^2)S_{eq}$

## *Approfondimenti*

***Determinazione del coefficiente di smorzamento.***
Le ampiezze di oscillazione in corrispondenza dei massimi e dei minimi si smorzano secondo la relazione ***:*** $S_{mi} = A_0\, e^{-\delta\, ti}$
Con il cambiamento di variabile***:*** $\ln S_{mi} = \ln(A_0\, e^{-\delta\, ti})$; $\ln S_{mi} = \ln A_0 + (-\delta)\, t_i$
si può passare allôequazione lineare $y_i = a + b\, t_i$ e con il MMQ ricavare ***a, b*** e risalire ad $A_0$ e $\delta$.
E' valida l'assunzione fatta: $\delta << \omega$ ; $T = 2\pi\sqrt{1/(\omega^2 - \delta^2)} = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I_0 / k}$ ***?.***

***NOTA:*** *Prima di effettuare il Fit operare una traslazione dellôasse dei tempi lungo lôasse di S con origine in* $S = \overline{S}$ *, calcolando nuovamente i valori* $S_{mi}$ *in questo nuovo sistema di assi: intorno al nuovo asse il sistema oscilla simmetricamente con smorzamento dellôampiezza.*

***Influenza del momento di inerzia della barretta che sostiene le sfere piccole***
Trascurando la presenza della barretta,e considerando la massa puntiforme, come viene influenzato $I_0$ ? {assumiamo come dati realistici $m_{barretta}$= 2g e $m_{sferetta}$=20g

***Influenza della variazione di r durante il moto***
La distanza ***r*** tra i centri delle sfere piccole e grandi si eô sempre ritenuta costante e di conseguenza anche la ***F.*** In realtà però ***r*** varia e ***F*** varia con ***r : F = F(r ).***
Stimare lôentità delle variazioni di ***r*** ed ***F(r)***

## ***<u>Appendice:soluzione completa dellôequazione differenziale</u>***

***Caso 1:*** $\delta < \omega$
Si ha: $h = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

$$\Phi_1(t) = e^{-\delta t} e^{i\alpha t} = e^{-\delta t}(\cos\alpha t + i\sin\alpha t)$$
$$\Phi_2(t) = e^{-\delta t} e^{-i\alpha t} = e^{-\delta t}(\cos\alpha t - i\sin\alpha t)$$

Le soluzioni sono indipendenti se:

$$W = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \dot{\Phi}_1 & \dot{\Phi}_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Phi\ (t) = c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) = e^{-\delta t}[c_1(\cos\alpha t + i\sin\alpha t) + c_2(\cos\alpha t - i\sin\alpha t)] =$$
$$= e^{-\delta t}[\cos\alpha t(c_1 + c_2) + i\sin\alpha t(c_1 - c_2)]$$

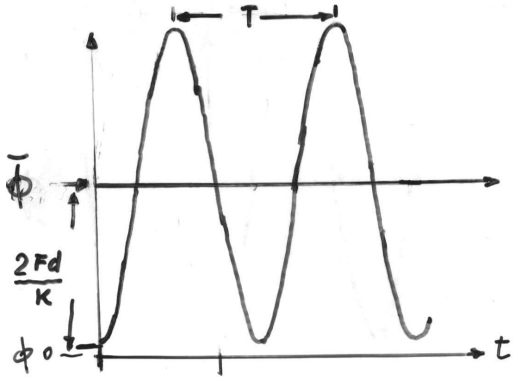
Chiamiamo: $\begin{array}{l} c_1 + c_2 = a \\ i(c_1 - c_2) = b \end{array}$

$$\Phi\ (t) = e^{-\delta t}(a\cos\alpha t + b\sin\alpha t)$$

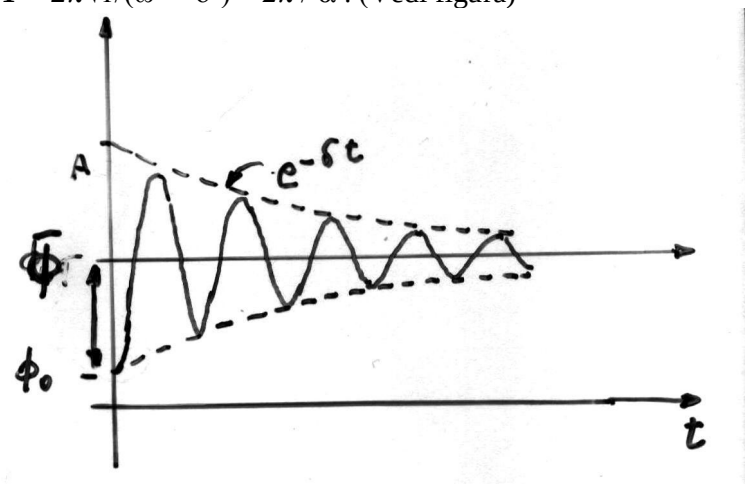
Se: $\begin{array}{l} a = A\cos\Psi \\ b = A\sin\Psi \end{array}$

$$\Phi\ (t) = e^{-\delta t}(A\cos\alpha t\cos\Psi + A\sin\alpha t\sin\Psi) = Ae^{-\delta t}\cos(\alpha t + \Psi)$$

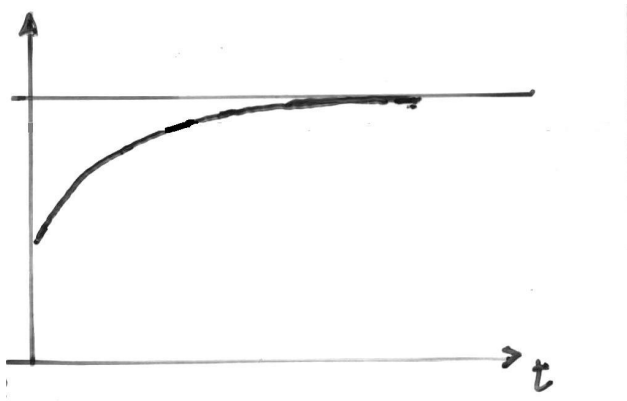
Se $\delta$ **= *0*** si ottiene un moto armonico con asse delle $\phi$ traslato di ***2Fd/k*** rispetto alla posizione iniziale $\phi_0$ e periodo :$\boldsymbol{T = 2}\pi/\omega = 2\pi\ \sqrt{I_0}\ /\ \boldsymbol{k}$. (vedi figura seguente)




Se $\delta$ ***Í 0*** a causa degli attriti si ha un moto oscillatorio smorzato di pseudo periodo
$\boldsymbol{T = 2}\pi\sqrt{1/(\omega^2 - \delta^2)} = 2\pi\ /\ \alpha$ . (Vedi figura)




***Caso 2***: $\delta^2 > \omega^2$***oscillazione sovrasmorzata*** .
Le forze resistive sono dominanti ed il sistema, dopo essere stato sollecitato, raggiunge lentamente la posizione di equilibrio muovendosi nel mezzo resistivo con un decadimento esponenziale.




Si ottengono le seguenti soluzioni:

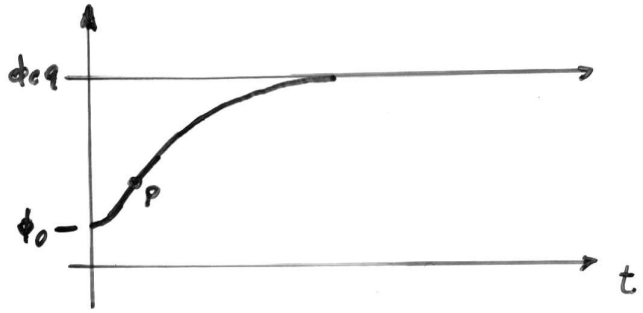
$$\Phi_1(t) = e^{h_1 t} = e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})}$$

$$\Phi_2(t) = e^{h_2 t} = e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})}$$

$$\Phi\ (t) = A\Phi_1(t) + B\Phi_2(t)$$

***Caso 3:*** $\delta^2 = \omega^2$***: smorzamento critico***

Sebbene inizialmente il moto si presenti come un'oscillazione, appena la velocità (misurata come pendenza della curva in P ) diventa sufficientemente elevata, la forza resistiva prende il sopravvento su quella elastica di richiamo smorzando rapidamente il moto.




Abbiamo:

$$h_1 = h_2 = -\delta$$

$$\Phi_1(t) = e^{-\delta t}$$

$$\Phi_2(t) = te^{-\delta t}$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = A\Phi_1(t) + B\Phi_2(t) = e^{-\delta t}(A + Bt)$$