

Capitolo 7

ELEMENTI DI FISICA DEL PLASMA

Sebbene la struttura dell'Universo su tutte le scale (pianeti, stelle, ammassi di stelle, galassie, ammassi di galassie) sia dominata dall'interazione gravitazionale, appare evidente dall'insieme dei dati osservativi che l'interazione elettromagnetica è determinante per la loro morfologia e nella fisica dei loro processi evolutivi. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che la materia cosmica si trova per il 99% in stato di alta ionizzazione e alta mobilità delle particelle, cioè sotto forma di *plasma* ad elevata conducibilità e non di gas neutro. Perciò le forze coulombiane creano elevati campi elettrici non appena si sviluppi una sia pur piccola separazione di carica; e, per le stesse forze, le cariche seguono moti collettivamente ordinati e producono correnti, campi elettromagnetici variabili e forze elettrodinamiche.

Lo studio dei fenomeni astrofisici in cui siano determinanti gli effetti elettromagnetici è indicato spesso con il termine di *astrofisica dei plasmi*, dove il termine plasma viene riferito ad un insieme di particelle in cui la presenza di cariche elettriche libere sia in grado di produrre effetti collettivi.

Il modello di più vasta applicazione in astrofisica è, a tutt'oggi, il *modello magnetoidrodinamico*, proposto da Alfvén e Cowling negli anni 1950, equivalente del modello fluidodinamico discusso nel precedente Capitolo: è infatti basato sul principio di trattare la dinamica dei plasmi come quella di sistemi collettivi fluidi dotati di conducibilità elettrica. Le correnti elettriche prodotte dal moto delle cariche indotto dai campi esterni modificano i campi elettromagnetici; tali nuovi campi portano coerentemente a una modifica delle caratteristiche del moto. La sequenza ciclica di processi implica che fluido e campi siano dipendenti attraverso un processo di interazione altamente nonlineare.

La trattazione matematica deve essere quindi impostata sul seguente sistema di equazioni:

1. equazioni del campo elettromagnetico (equazioni di Maxwell);

2. equazioni fluide di continuità, del moto e del bilancio energetico, includendo le forze elettrodinamiche (forze di Lorentz);
3. equazioni che collegano le proprietà dinamiche ed elettrodinamiche del fluido, campi, correnti, conducibilità elettrica, conducibilità termica e coefficienti di trasporto in genere, alle grandezze macroscopiche, temperatura, densità, pressione, velocità (legge di Ohm generalizzata).

Si tratta di un sistema molto complesso, tanto più se si tiene conto che in molti fenomeni astrofisici energetici va utilizzata la dinamica relativistica. In realtà i fenomeni di plasma sono ancora più complessi di quanto possa riprodurre la teoria magnetoidrodinamica. Anche per i plasmi, come per i fluidi neutri, per rappresentare tutti i fenomeni si deve ricorrere alla *teoria cinetica*, in quanto le proprietà fisiche vengono a dipendere dalla forma dettagliata delle funzioni di distribuzione dei vari tipi di particelle.

L'idea di applicare l'elettrodinamica in astrofisica nacque dall'osservazione della corona solare durante le eclissi. Nel 1899 Bigelow ebbe l'intuizione che il Sole potesse essere un gigantesco magnete dalla somiglianza dei pennacchi coronali con le linee di forza tracciate da limatura di ferro intorno a una sfera magnetizzata.

Questi suggerimenti qualitativi, che Schuster estese fino a proporre che tutte le stelle fossero grandi magneti rotanti, motivarono Hale a eseguire la misura del campo magnetico solare con esperimenti di spettroscopia Zeeman che ebbero successo nel 1908: risultò che il campo delle macchie solari raggiungeva i 10^3 gauss. Poiché anche la Terra possiede un campo magnetico, la presenza di effetti elettrodinamici in astrofisica fu da allora accettata.

Nel 1919 Larmor avanzò la prima *teoria dinamo* per spiegare la produzione di campi magnetici persistenti su scala astrofisica. Nel 1933 Cowling discusse come il campo potesse essere trasportato alla superficie da moti convettivi sub-fotosferici a formare le macchie solari, proponendo euristicamente il principio di *congelamento delle linee di forza in mezzi conduttori fluidi*. Kiepenheuer ne dedusse che materiale solare espulso dalla corona potesse portare con sé campo magnetico: si trattò della prima ipotesi di un vento solare magnetizzato.

Nel 1937 Ferraro derivò la *legge di isorotazione*, secondo la quale una massa fluida magnetizzata e rotante in modo differenziale è stabile solo qualora la velocità angolare sia costante su superfici equipotenziali del campo magnetico: altrimenti lo "stiramento" del campo magnetico, congelato delle linee di forza, farebbe nascere un campo toroidale e di conseguenza una forza di reazione.

Un altro campo d'indagine che fu di grande stimolo per lo sviluppo dell'elettrodinamica cosmica fu lo studio delle tempeste geomagnetiche da parte di Chapman e Ferraro (1932 - 33). Questi autori provarono che esse sono dovute all'interazione del gas ionizzato emesso dal Sole con il campo magnetico dipolare terrestre.

Infine nel 1942 Alfvén formulò le equazioni complete della magnetoidrodinamica ideale, cioè per mezzi a conducibilità elettrica infinita, derivando il *teorema del congelamento plasma - campo magnetico*. Ricavò inoltre l'apparire

di un nuovo tipo di onde nei fluidi conduttori, proprio dovuto all'interazione tra campo magnetico e fluido. Le linee di campo sono dotate di tensione e quindi una perturbazione può propagarsi lungo di esse, analogamente a quanto avviene per le corde vibranti. Queste onde esistono sia in mezzi compressibili, sia incompressibili, e permettono il trasporto di energia su lunghe distanze senza trasporto di materia; in gas incompressibili onde non possono invece propagarsi.

Un altro importante concetto introdotto da Alfvén fu quello di *centro di guida* con il quale si può discutere in maniera completa il moto di particelle cariche singole in campi elettromagnetici comunque complessi, isolando la girazione intorno alle linee magnetiche da moti di deriva trasversa e da moti longitudinali alle linee. Con questo metodo Singer poté calcolare le traiettorie delle particelle cariche provenienti dal Sole e intrappolate dal campo magnetico terrestre, ricavando l'esistenza delle fasce di Van Allen molto prima della loro scoperta. Di conseguenza fu possibile interpretare la fenomenologia della magnetosfera terrestre, con le tempeste geomagnetiche, la coda geomagnetica e le zone di dissipazione.

Dal 1950 l'elettrodinamica venne largamente applicata allo studio della fenomenologia dell'attività solare: macchie, brillamenti, protuberanze, ciclo solare, vento. Venne in particolare messo in evidenza che le strutture magnetoidrodinamiche sono instabili, possono cioè deformarsi e distruggersi su tempi scala anche relativamente rapidi. Inoltre il concetto ideale di congelamento plasma - campo magnetico venne progressivamente rilassato per tener conto degli effetti di dissipazione delle correnti tramite la conduttività (resistività) elettrica. In particolare, proprio in relazione all'attività solare, apparve chiaro come le instabilità resistive e di riconnessione magnetica possono dare origine a rilasci di energia magnetica in energia cinetica su tempi scala brevi (brillamenti solari).

I modelli magnetoidrodinamici comportano fenomenologie molto complesse, con molti gradi di libertà, e quindi con dipendenza da un numero elevato di parametri fisici di difficile misurazione in astrofisica. Basti pensare ai dati osservativi che dal 1991 giungono dal satellite giapponese per osservazioni a raggi X Yohkoh fornendo lo svilupparsi dell'attività solare in tempo reale (Fig. 7.1): anche se si intravedono comportamenti generali consistenti con le teorie dell'astrofisica dei plasmi, molti aspetti, e non di dettaglio, appaiono ancora del tutto inspiegati.

Sempre negli anni 1950 le teorie magnetoidrodinamiche iniziarono ad essere applicate anche in altri campi dell'astrofisica. Era ormai evidente, dallo studio dei raggi cosmici e della radioastronomia, come campi magnetici e particelle cariche libere rappresentino una delle componenti essenziali dell'Universo. Fermi (1955) sviluppò un modello per l'accelerazione dei raggi cosmici nella galassia utilizzando l'interazione di particelle sopratermiche con nuvole magnetizzate.

Shklovskii (1953) e Ginzburg (1959) proposero che l'emissione radio nontermica di stelle e galassie in fasi evolutive di estrema condensazione e forti campi gravitazionali fosse dovuta a radiazione sincrotrone di elettroni relativistici in campi magnetici. Nel 1962 Lynden-Bell avanzò l'ipotesi che l'energetica dei nuclei galattici attivi potesse essere interpretata attraverso il processo di accrescimento di materia verso un buco nero di grande massa: nel 1974 Rees intuì

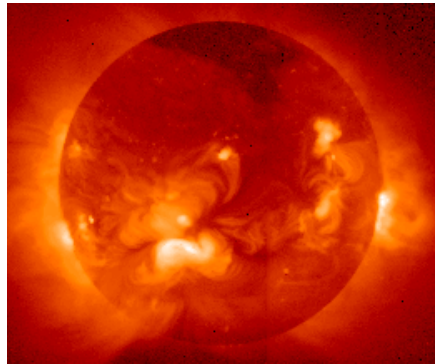


Fig. 7.1: La corona solare osservata ad alta risoluzione dal satellite Yohkoh

che la presenza di campi magnetici potesse modellare il fenomeno, costituendo anche la base dei processi di espulsione di getti supersonici osservati nelle radiosorgenti estese. Pure le stelle normali presentano comportamenti collettivi dinamici ; la Fig. 7.2 mostra ad esempio una regione di formazione stellare caratterizzata da emissione di getti supersonici che interagiscono con il mezzo interstellare circostante creando onde d'urto.

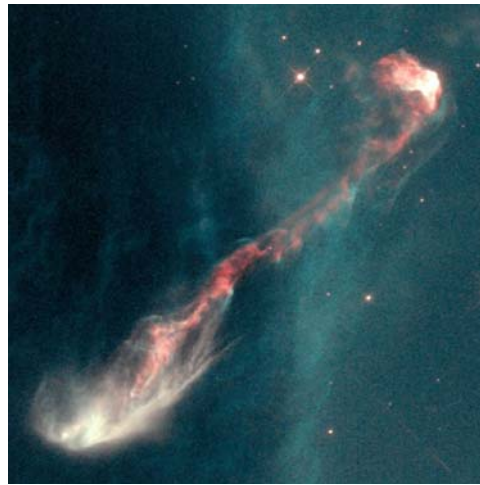


Fig. 7.2: Getti in regioni di formazione stellare

Infine le osservazioni *in situ* per mezzo di sonde spaziali del plasma interplanetario hanno mostrato come l'interazione del vento solare con le magnetosfere planetarie sia dominata da effetti cinetici. Tutta la ricca e inspiegata fenomenologia astrofisica di attività stellare e galattica, dei mezzi diffusi e delle

variabilità è largamente guidata da simili effetti.

7.1 Lo stato di plasma

Lo stato di plasma viene raggiunto spontaneamente nella materia in equilibrio termodinamico a $T \geq 10^4$ K quando l'agitazione termica è sufficientemente energetica da permettere un'elevata ionizzazione; per sistemi fuori dall'equilibrio si può realizzare ogni qualvolta esistano agenti eccitatori, ad esempio fotoni o flussi di particelle, con energie $\geq 10^{-2}$ eV, corrispondenti alle minime energie di ionizzazione.

La presenza di particelle cariche libere cambia drasticamente il comportamento della materia: intervengono le forze coulombiane a lungo range ($r \gg n_{car}^{-1/3}$), in aggiunta alle forze di interazione a corto range ($r \ll n_{neu}^{-1/3}$) tipiche della materia neutra.

Infatti, quando il sistema materiale è sufficientemente grande perché siano molte le particelle interagenti a lungo range, la materia acquista un *comportamento collettivo* che sovrasta l'agitazione termica e il moto browniano. Le particelle "sentono" il campo elettromagnetico medio e seguono moti mediamente ordinati.

Il fattore essenziale per definire un plasma è la presenza di cariche libere: un plasma non sarà quindi caratterizzato fisicamente dalla densità e dalla temperatura separatamente, ma tramite una loro combinazione che assicuri la sostanziale presenza di fenomeni di ionizzazione.

In un gas ionizzato lo stato di prevalenza degli effetti collettivi è raggiungibile aumentando il numero di particelle cariche interagenti, in quanto, se le forze elettrostatiche, che consentono interazioni a *lungo raggio*, decrescono con la distanza $\propto 1/r^2$, è però vero che il numero delle cariche interagenti cresce $\propto r^3$. Pertanto è possibile, per un numero sufficientemente grande di cariche, che i campi elettrici (e magnetici) dell'insieme delle cariche si sommino in maniera coerente dando origine a un comportamento a molti corpi, a differenza di quanto avviene in un gas neutro in cui le particelle interagiscono essenzialmente in urti a *corto raggio*.

7.1.1 Lunghezza di Debye

Si può fissare un criterio quantitativo per esprimere la prevalenza degli effetti collettivi sui moti casuali termici, considerando che in un insieme di cariche in equilibrio gli effetti microscopici dell'interazione fra cariche sono schermate dalla distribuzione media della carica spaziale che si viene a formare intorno a ciascuna di esse. L'effetto è quello di creare un campo medio collettivo al di sopra di una certa distanza λ_D , mentre al di sotto prevalgono ancora gli effetti delle singole cariche. Tale distanza caratteristica è detta *lunghezza di Debye*.

Essa può essere calcolata considerando la distribuzione del potenziale elettrico intorno a una qualunque carica q localizzata in una posizione r in un plasma

in equilibrio con elettroni e ioni distribuiti in modo da assicurare una neutralità globale, $n_e = \sum_i Z_i n_i = Zn$, dove Z è il valore medio della carica ionica. Il campo intorno a una singola carica può essere scritto tramite l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 V = -4\pi \left[q\delta(\mathbf{r}) - en_e e^{V/kT} + e \sum_i Z_i n_i e^{-Z_i eV/kT} \right] \quad (7.1)$$

dove gli esponenziali sono i fattori di Boltzmann che rappresentano la probabilità di trovare una carica in un punto a potenziale V quando il suo moto termico corrisponda a una temperatura T . Linearizzando i fattori esponenziali (piccoli potenziali di interazione $eV/kT \ll 1$) si ottiene:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{\lambda_D^2} (1 + Z) V = -4\pi q\delta(\mathbf{r}) \quad (7.2)$$

con

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n}} \quad (7.3)$$

In configurazione a simmetria sferica, si risolve:

$$V = \frac{q}{r} e^{-(r/\lambda_D)(1+Z)^{1/2}} \quad (7.4)$$

Il risultato indica che intorno ad ogni carica q il plasma crea una nuvola di carica spaziale che riduce il potenziale elettrico coulombiano fino ad annullare l'effetto di carica singola su distanze superiori a λ_D . In pratica a distanze $L > \lambda_D$ si misurano solo gli effetti collettivi e non quelli delle singole cariche. La lunghezza λ_D prende il nome di *lunghezza di Debye* (dal fisico che la introdusse nella teoria degli elettroliti). Nel caso di un plasma in cui le cariche mobili siano essenzialmente gli elettroni, la lunghezza di Debye vale:

$$\lambda_D = 740 \sqrt{\frac{kT}{n}} \quad \text{cm} \quad (7.5)$$

dove l'energia termica kT è espressa in eV ($kT = 1$ eV a $T = 11.400$ K) e n in cm^{-3} .

7.1.2 Quasi-neutralità dei plasmì

Un plasma del tipo testè discusso, con un solo tipo di carica, non è in equilibrio se non sotto l'azione di un campo esterno o altri agenti (pareti) capaci di controbilanciare la carica spaziale netta che crea campi repulsivi. Comunemente in natura si incontrano invece plasmì in cui sono presenti cariche di ambedue i segni, mescolate fra di loro in modo da portare ad una situazione di neutralità globale corrispondente a stati di equilibrio. Uno stato di equilibrio in presenza di

cariche libere è caratterizzato quindi dal fatto che le differenze di energie elettrostatiche tra diversi punti generate da cariche spaziali siano inferiori all'energia media del moto termico; per elettroni:

$$-e\Delta V \ll kT_e .$$

Considerando un plasma con densità di ioni positivi n_i ed elettroni negativi n_e , e cariche $Z_i e$ e $-e$, l'equazione di Poisson su una distanza tipica L comporta:

$$\nabla^2 V \approx \frac{\Delta V}{L^2} = -4\pi e (\sum Z_i n_i - n_e) .$$

Tenendo conto della definizione di lunghezza di Debye, si ha come conseguenza che per $L > \lambda_D$:

$$|n_e - \sum Z_i n_i| \ll n_e . \quad (7.6)$$

Questo risultato implica la quasi-neutralità di un plasma: da un punto di vista macroscopico ioni ed elettroni sono vincolati a muoversi senza apprezzabile separazione di carica, sono cioè sempre legati collettivamente da effetti di carica spaziale.

7.1.3 Il parametro del plasma

Nelle considerazioni precedenti è implicito che entro una *sfera di Debye* esista comunque un numero sufficiente di particelle per poter parlare di comportamento medio; pertanto:

$$N_D = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \gg 1 . \quad (7.7)$$

Si deriva immediatamente che questa condizione coincide in effetti con la richiesta che la ionizzazione sia efficiente, cioè che l'energia termica sia grande rispetto alle forze coulombiane tra le singole particelle che tendono verso la ricombinazione:

$$\frac{kT}{q^2/r} = \frac{kT}{q^2 n^{1/3}} = 4\pi \lambda_D^{2/3} n^{2/3} = (36\pi)^{1/3} N_D^{2/3} \gg 1 .$$

La quantità $\Lambda = 3N_D$ è chiamata *parametro del plasma*; quando è molto maggiore dell'unità gli effetti collettivi sono dominanti. In effetti tutte le definizioni ora esposte sono consistenti nel caratterizzare i plasmi.

7.1.4 La frequenza di plasma

Una naturale implicazione del comportamento collettivo di un plasma è che può essere modellato come un sistema di oscillatori accoppiati. È immediato ricavare una frequenza tipica di oscillazione del sistema, considerando il rapporto tra la

| | L | n | T |
|----------------------|------------------------------|---------------------|------------------|
| | cm | cm^{-3} | K |
| Ionosfera | 10^7 | $10^3 \div 10^6$ | $10^2 \div 10^3$ |
| Vento solare | $10^{13} \div 10^{15}$ | $1 \div 10^4$ | $10^2 \div 10^3$ |
| Corona solare | $6 \times 10^9 \div 10^{11}$ | $10^8 \div 10^{12}$ | $10^6 \div 10^7$ |
| Interni stellari | $10^{10} \div 10^{12}$ | 10^{27} | 4×10^7 |
| Stelle di neutroni | 10^6 | 10^{42} | $10^6 \div 10^9$ |
| Gas interstellare | $10^1 \div 10^{22}$ | $10^{-3} \div 10$ | 10^2 |
| Gas intergalattico | $\geq 10^{24}$ | $\leq 10^{-5}$ | $10^5 \div 10^6$ |
| Nuclei galattici | $\leq 10^{15}$ | $\leq 10^{12}$ | $\geq 10^8$ |
| Plasma termonucleare | 10^2 | 10^{16} | 10^8 |

Tab. 7.1: Parametri dei plasmi astrofisici: scale spaziali, densità, temperature

| | B | λ_{De} | σ |
|----------------------|------------------------|--------------------------|-------------------------|
| | Gauss | cm | s^{-1} |
| Ionosfera | 0.1 | $10^{-1} \div 7$ | $10^9 \div 10^{11}$ |
| Vento solare | $10^{-6} \div 10^{-5}$ | $0.7 \div 2 \times 10^2$ | $10^9 \div 10^{11}$ |
| Corona solare | $10^{-5} \div 1$ | $10^{-2} \div 2$ | 7×10^{15} |
| Interni stellari | – | 10^{-9} | 7×10^{18} |
| Stelle di neutroni | 10^{12} | $10^{-17} \div 10^{-16}$ | $10^{17} \div 10^{21}$ |
| Gas interstellare | 10^{-6} | $20 \div 2 \times 10^3$ | 6×10^{12} |
| Gas intergalattico | $\leq 10^{-8}$ | $\geq 2 \times 10^6$ | 10^{14} |
| Nuclei galattici | $\geq 10^5$ | 7×10^{-2} | $\geq 4 \times 10^{18}$ |
| Plasma termonucleare | 10^5 | 7×10^{-4} | 6×10^{18} |

Tab. 7.2: Parametri dei plasmi astrofisici: campi magnetici, lunghezza di Debye, conduttività elettrica

| | ν_g | ν_{pe} | ν_c |
|----------------------|--------------------|------------------------|------------------------|
| | Hz | Hz | Hz |
| Ionosfera | 3×10^5 | $10^5 \div 10^7$ | $10 \div 10^3$ |
| Vento solare | $3 \div 30$ | $10^4 \div 10^6$ | $10^{-2} \div 6$ |
| Corona solare | $30 \div 10^6$ | $10^8 \div 10^{10}$ | 8 |
| Interni stellari | – | 3×10^{17} | 2×10^{16} |
| Stelle di neutroni | 3×10^{18} | $10^{25} \div 10^{26}$ | $10^{23} \div 10^{28}$ |
| Gas interstellare | 3 | $10^2 \div 10^4$ | 9×10^{-5} |
| Gas intergalattico | $\leq 10^{-2}$ | ≤ 30 | $\leq 10^{-11}$ |
| Nuclei galattici | $\geq 10^{11}$ | $\leq 10^{10}$ | 30 |
| Plasma termonucleare | 3×10^{11} | 10^{12} | 2×10^5 |

Tab. 7.3: Parametri dei plasmi astrofisici: frequenza di girazione, frequenza di plasma, frequenza di collisione

velocità tipica del moto delle cariche (la velocità termica) e la lunghezza scala per i fenomeni collettivi (la lunghezza di Debye):

$$\omega_p = \frac{v_{th}}{\lambda_D} = \sqrt{\frac{4\pi q^2 n}{m}}, \quad (7.8)$$

che è appunto detta *frequenza di plasma*. Nell'espressione compare l'inerzia delle cariche che trasportano la carica spaziale, e quindi in linea di principio sono possibili varie frequenze tipiche di oscillazione. Tuttavia le cariche più mobili sono ovviamente gli elettroni e quindi la frequenza di plasma più importante è anche quella massima:

$$\omega_{pe} = 5.6 \cdot 10^4 \sqrt{n_e} \quad \text{rad s}^{-1} \quad (7.9)$$

con n_e in cm^{-3} .

7.1.5 La conduttività elettrica

Il raggiungimento della quasi-neutralità in un plasma è legata alla capacità delle cariche elettriche a rispondere alla presenza di un campo elettrico pure in presenza di collisioni che ne ostacolano il moto. Questa caratteristica è misurata dalla conduttività elettrica σ , definita come il rapporto tra la densità di corrente che si genera e il campo elettrico che la induce:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

In realtà la conduttività è un tensore in quanto i plasmi sono anisotropi soprattutto in presenza di campi magnetici; ma nei casi più semplici (ad es. per plasmi omogenei non magnetizzati) si riduce a uno scalare. Si ottiene una semplice espressione per σ ricordando che il trasporto di carica è sempre effettuato dagli elettroni che hanno maggior mobilità:

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}, \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} \quad (7.10)$$

e utilizzando la frequenza di collisione ν_c come tempo scala su cui avviene l'accelerazione da parte del campo elettrico:

$$m\nu_c \mathbf{v} = e\mathbf{E},$$

si può scrivere:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\nu_c}. \quad (7.11)$$

Plasmi ad alta conduttività possono essere considerati sempre in condizioni di quasi-neutralità e sono modellati come un fluido elettricamente conduttore (modello magneto-idrodinamico).

Nelle Tabelle 7.3, ??, ?? sono riportati i valori delle grandezze ora definite per vari tipi di plasmi astrofisici e per i plasmi termonucleari di laboratorio per confronto.

7.2 Modellizzazione dei plasmi

Poichè lo studio diretto di un plasma attraverso le equazioni del moto per ogni singola particella è del tutto inapplicabile in vista di verifiche sui dati sperimentali che comunque si riferiscono a grandezze macroscoptiche, sono state sviluppate classi di trattazioni della fisica dei plasmi:

1. teoria cinetica
2. teoria magnetoidrodinamica
3. teoria delle orbite.

Il primo metodo è il più completo e permette lo studio dettagliato del plasma, includendo fenomeni fuori dall'equilibrio termodinamico. Il secondo metodo consente di trattare la maggior parte dei fenomeni di plasma, ma esclude lo studio dell'evoluzione della funzione spettrale delle particelle e della sua influenza sulla stabilità del sistema. Il terzo metodo consente di comprendere la dinamica dei sistemi soprattutto quando siano dominati dai campi esterni cosicchè tutte le particelle si comportino in modo uniforme.

7.2.1 Equazioni cinetiche

L'equazione fondamentale per la descrizione dell'evoluzione temporale della funzione distribuzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ nello spazio delle fasi con variabili canoniche \mathbf{q} e \mathbf{p} è, come abbiamo discusso nel precedente Capitolo, l'*equazione di Liouville*. Si tratta dell'equazione di continuità nello spazio delle fasi, e impone la conservazione della funzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ a meno che non siano presenti interazioni che modifichino la quantità di moto in maniera discontinua (collisioni):

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{q,p} \cdot (f\mathbf{U}) = 0 \quad (7.12)$$

ovvero:

$$\frac{df}{dt} + f\nabla_{q,p} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (7.13)$$

dove \mathbf{U} è il flusso di velocità nello spazio delle fasi:

$$\mathbf{U} = \left(\frac{dq_i}{dt}, \frac{dp_i}{dt} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.14)$$

e

$$\nabla_{q,p} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (7.15)$$

e si tenga conto che naturalmente per flussi non discontinui $\nabla \cdot \mathbf{U} \equiv 0$.

Quando siano invece presenti collisioni che eludono la conservazione della densità $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, l'espressione formale dell'equazione di Liouville risulta:

$$\frac{df}{dt} + f\nabla_{q,p} \cdot \mathbf{U} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}, \quad (7.16)$$

ove il termine a destra dev'essere scritto attraverso la fisica delle collisioni.

Per particelle di carica e e massa m in presenza di campi elettromagnetici di potenziale vettore \mathbf{A} e potenziale scalare ϕ , le variabili canoniche nello spazio delle fasi (in condizioni non-relativistiche) sono:

$$q_i = x_i, \quad p_i = mv_i + \frac{e}{c} A_i \quad (7.17)$$

con hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 + e\phi. \quad (7.18)$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di Liouville, si ottiene l'*equazione di Vlasov*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (7.19)$$

con:

$$\begin{aligned} F_i &= -e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \\ \mathbf{F} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

In presenza di collisioni l'equazione di Vlasov diventa l'*equazione di Boltzmann*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}. \quad (7.21)$$

7.2.2 Equazioni macroscopiche

Come nel caso dei fluidi, le equazioni macroscopiche derivano dalle equazioni cinetiche tramite il calcolo dei momenti sulle velocità. Nel Capitolo precedente sono già state individuate le grandezze macroscopiche che si ottengono come momenti della $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Per scrivere i momenti nel caso dei plasmi è usuale definire il momento della forza:

$$\text{densità di forza} \rightarrow \mathcal{F} = \int \mathbf{F} f d^3v. \quad (7.22)$$

Qualora la forza non dipenda da \mathbf{v} , $\mathcal{F} = n\mathbf{F}$.

Le tre equazioni dei momenti sono l'*equazione di continuità*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (7.23)$$

l'*equazione di conservazione della quantità di moto*:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}} = \mathcal{F} \quad (7.24)$$

e l'equazione di conservazione dell'energia:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{V} = 0$$

dove $D/Dt = (\partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla)$; per plasmi omogenei e isotropi $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}} \rightarrow \nabla p$. Queste tre equazioni non formano un sistema chiuso, in quanto il numero di momenti di f incogniti, ρ , \mathbf{V} , $\tilde{\mathbf{\Pi}}$, \mathbf{q} ($\varepsilon = (1/2) \text{Tr } \tilde{\mathbf{\Pi}}$), è superiore al numero di equazioni; e la difficoltà non si risolve proseguendo nella derivazione di altri momenti, perché si incontra l'impossibilità di collegare i momenti di ordine superiore della f con quantità fisicamente misurabili. Come in idrodinamica, il sistema di equazioni macroscopiche viene chiuso con opportune assunzioni fisiche; le possibilità più comuni nella fisica dei plasmi sono:

1. definizione di un'equazione di stato $p = p(\rho)$;
2. condizione di adiabaticità $\mathbf{q} = 0$, corrispondente a:

$$(D/Dt)(p\rho^{-\gamma}) = 0$$

con γ indice adiabatico, $\gamma = 5/3$ nel caso di gas non relativistici e $\gamma = 4/3$ nel caso di gas relativistici.

Nei successivi paragrafi discuteremo alcuni sistemi di equazioni macroscopiche approssimate.

7.3 Modello a due fluidi

In un plasma coesistono sempre almeno tre tipi di particelle, ciascuno con la propria funzione di distribuzione:

1. particelle neutre, f^0
2. elettroni, f^-
3. ioni positivi, f^+ .

Ne segue che i modelli macroscopici dovrebbero essere sempre modelli a tre fluidi: in realtà, poichè nella maggior parte dei casi di interesse i plasmi sono completamente ionizzati (ma naturalmente vi sono eccezioni importantissime anche in astrofisica), si adotta spesso un modello a due fluidi, in termini di f^- e f^+ in condizioni di equilibrio termodinamico, il che permette di esprimere la densità di energia in termini della temperatura $\varepsilon^\mp = c_v^\mp T^\mp$.

Le equazioni macroscopiche precedenti sono riscritte introducendo i termini di scambio di quantità di moto ($\Delta \mathbf{p}^{\mp\pm}$) ed energia ($\Delta \mathcal{E}^{\mp\pm}$) per collisioni tra

le due componenti. Le equazioni separate per i due fluidi risultano:

$$\frac{\partial \rho^\mp}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^\mp \mathbf{V}^\mp) = 0 \quad (7.25)$$

$$\rho^\mp \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^\mp \cdot \nabla \right) \mathbf{V}^\mp + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}^\mp - n^\mp e^\mp \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}^\mp}{c} \times \mathbf{B} \right) = \Delta \mathbf{p}^\mp \quad (7.26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^\mp \cdot \nabla \right) c_v^\mp T^\mp + c_v^\mp T^\mp \nabla \cdot \mathbf{V}^\mp + \nabla \cdot \mathbf{t}^\mp + \tilde{\mathbf{\Pi}} : \nabla \mathbf{V}^\mp = \Delta \mathcal{E}^\mp \quad (7.27)$$

Per giungere ad esprimere un modello in termini di grandezze misurabili, si opera una media sulle due distribuzioni secondo i seguenti pesi:

$$\begin{aligned} \text{densità di materia} &\rightarrow \rho = \rho^+ + \rho^- = n^+ m^+ + n^- m^- \\ \text{velocità media} &\rightarrow \mathbf{V} = (\rho^+ \mathbf{V}^+ + \rho^- \mathbf{V}^-) / (\rho^+ + \rho^-) \\ \text{densità di carica} &\rightarrow Q = n^+ e^+ + n^- e^- \\ \text{densità di corrente} &\rightarrow \mathbf{J} = n^+ e^+ \mathbf{V}^+ + n^- e^- \mathbf{V}^- \\ &\rightarrow \mathbf{J}_{conv} = Q \mathbf{V} = (n^+ e^+ + n^- e^-) \mathbf{V} \\ &\rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{J} - \mathbf{J}_{conv} = n^+ e^+ (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}) + \\ &\quad + n^- e^- (\mathbf{V}^- - \mathbf{V}) . \end{aligned} \quad (7.28)$$

Inoltre si può assumere, per urti elastici con piccolo potenziale di interazione:

$$\Delta \mathbf{p}^{-+} + \Delta \mathbf{p}^{+-} \simeq 0, \quad \Delta \mathcal{E}^{-+} + \Delta \mathcal{E}^{+-} \simeq 0 . \quad (7.29)$$

Sommando le equazioni di continuità, si ottiene l'equazione di continuità della massa totale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 .$$

Moltiplicando le due equazioni di continuità per e^\mp/m^\mp rispettivamente e sommandole, si ottiene l'equazione di continuità della carica:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (7.30)$$

Sommando le equazioni del moto, si ottiene l'equazione del moto del fluido:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}} - Q \mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \quad (7.31)$$

dove $\tilde{\mathbf{\Pi}} = \tilde{\mathbf{\Pi}}^+ + \tilde{\mathbf{\Pi}}^-$. Sempre utilizzando le due equazioni del moto, moltiplicandole per e^\mp/m^\mp rispettivamente e sommandole, si ottiene, nel limite $m^-/m^+ \ll 1$ (ioni "immobili") e di pressione scalare isotropa (d'ora in avanti indicata con p):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \Omega_e \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{B}}{B} - \frac{e^-}{m^-} \Delta \mathbf{p}^{-+} = \\ &= \frac{n^- e^{-2}}{m^-} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} - \frac{1}{n^- e^-} \nabla p^- \right) - \\ &\quad - n^- e^- (\mathbf{V}^- \cdot \nabla) \mathbf{V}^- + n^+ e^+ (\mathbf{V}^+ \cdot \nabla) \mathbf{V}^+ \end{aligned} \quad (7.32)$$

$$(7.33)$$

dove $\Omega_e = |e^- B/m^- c| = 1.8 \cdot 10^7 B \text{ rad sec}^{-1}$ è la frequenza di Larmor elettronica e p^- la pressione elettronica.

Le due assunzioni sui rapporti di cariche e masse sono accettabili in precise situazioni fisiche. Così l'assunzione di isotropia di pressione si applica nel limite di grande frequenza di collisioni, $p^+ \approx p^- \approx p/2$, caso detto di Chapman-Enskog, oppure nel limite detto di plasma freddo, $p^+ \approx p^- \approx 0$.

Per quanto riguarda l'espressione di $\Delta \mathbf{p}^\mp$ per lo scambio di quantità di moto tra elettroni e ioni, essa può essere ricavata considerando che dipende dalla velocità relativa:

$$\Delta \mathbf{p}^{-+} \simeq \nu_c n^- m^- (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^-) \simeq -\nu_c n^- m^- (\mathbf{V}^- - \mathbf{V}) \quad (7.34)$$

in quanto le velocità peculiari degli ioni pesanti sono trascurabili rispetto a quelle degli elettroni. La costante di proporzionalità rappresenta il numero di collisioni per unità di tempo. Confrontando con l'espressione della densità di corrente:

$$\mathbf{j} = n^+ e^+ (\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}) + n^- e^- (\mathbf{V}^- - \mathbf{V}) \simeq n^- e^- (\mathbf{V}^- - \mathbf{V})$$

si ottiene:

$$\Delta \mathbf{p}^{-+} \simeq -\frac{m^- \nu_c}{e^-} \mathbf{j}. \quad (7.35)$$

Nell'ulteriore ipotesi $\nabla V_i^\pm \approx 0$, corrispondente all'assenza di correnti termoelettriche, si ottiene la *legge di Ohm generalizzata* :

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \Omega_e \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{B}}{B} - \frac{e^-}{2m^-} \nabla p + \nu_c \mathbf{j} = \frac{n^- e^{-2}}{m^-} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (7.36)$$

È ovvia l'analogia con la legge di Ohm classica; in effetti il rapporto dei coefficienti di \mathbf{j} e \mathbf{E} corrisponde proprio alla conduttività elettrica classica alla Spitzer $\sigma = n^- e^2/m^- \nu_c$. I termini aggiunti nella presente formulazione corrispondono alle caratteristiche del plasma rispetto al caso di un conduttore classico. Formalmente si può quindi riscrivere la legge di Ohm generalizzata attraverso un *tensore di conduttività* $\tilde{\sigma}$:

$$\mathbf{j} = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{E}. \quad (7.37)$$

Passiamo infine all'equazione dell'energia, sommando le due espressioni singole per elettroni e ioni con $c_v = c_v^- T^- + c_v^+ T^+$:

$$(\partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla) c_v T + c_v T \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \tilde{\Pi} :: \nabla \mathbf{V} = \quad (7.38)$$

$$= \mathbf{j} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (7.39)$$

Il termine a secondo membro rappresenta il riscaldamento Joule.

I campi \mathbf{E}, \mathbf{B} in queste equazioni sono definiti attraverso le equazioni di Maxwell, ove correnti e cariche sono a loro volta definite dalle di-distribuzioni

f^-, f^+ del plasma. Si usano quindi le equazioni di Maxwell nel vuoto per chiudere il sistema:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi Q \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{7.40}$$

Si ricordi che in effetti solo le prime due equazioni di Maxwell sono effettivamente richieste per descrivere i campi, mentre le due rimanenti definiscono solo le condizioni iniziali e al contorno in termini delle cariche e delle correnti.

In conclusione il sistema delle equazioni del modello a due fluidi è co-stituito da 15 equazioni scalari nelle 15 incognite scalari ρ , \mathbf{V} , Q , \mathbf{J} , p , \mathbf{E} , \mathbf{B} (viene dato per scontato che siano state fatte delle scelte su \mathbf{q} , in particolare $\mathbf{q} = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla p - Q\mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \Omega_e \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{B}}{B} - \frac{e^-}{2m^-} \nabla p + \nu_e \mathbf{j} &= \frac{n^- e^{-2}}{m^-} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\ \frac{D}{Dt} (c_v T) + c_v T \nabla \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{t} + \tilde{\Pi} :: \nabla \mathbf{V} - & \\ - \mathbf{j} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\tag{7.41}$$

Si tratta di un sistema complesso e altamente nonlineare, che può essere risolto analiticamente solo in casi molto particolari.

7.4 Equazioni magnetoidrodinamiche

Un plasma con elevata frequenza di collisione ed elevata conduttività elettrica è sempre in grado di mantenersi in condizioni di quasi-neutralità e in equilibrio maxwelliano a data T nelle sue varie componenti. In tal caso si può porre:

$$n^+ \approx n^-, \quad Q \approx 0, \quad p = p^+ + p^- \approx 2p^+ \approx 2p^- \tag{7.42}$$

$$\mathbf{J} \approx \mathbf{j}, \quad \mathbf{V}^+ \approx \mathbf{V}^-, \quad p = \frac{2}{3} c_v T. \tag{7.43}$$

Se inoltre si impone $\mathbf{q} \approx 0$, e si sceglie come tempo scala caratteristico $\omega^{-1} = L/V$ (L estensione del plasma, V velocità caratteristica dei moti fluidi), le equazioni del modello a due fluidi vengono scritte nell'*approssimazione magnetoidrodinamica*. Si parte dalla legge di scala suddetta in condizioni non relativistiche:

$$\frac{\omega L}{V} \approx 1, \quad \frac{\omega L}{c} \ll 1. \quad (7.44)$$

Dall'equazione di Maxwell per $\nabla \times \mathbf{E}$ si ottiene quindi:

$$\frac{E}{L} \approx \frac{\omega}{c} B, \quad \frac{E}{B} \approx \frac{\omega L}{c} \ll 1. \quad (7.45)$$

Dall'equazione di Maxwell per $\nabla \times \mathbf{B}$ si ottiene quindi:

$$\frac{B}{L} \approx \frac{J}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{\omega L}{c} B \quad (7.46)$$

ossia

$$J \frac{L}{c} \approx B \left[1 + \left(\frac{\omega L}{c} \right)^2 \right] \approx B, \quad (7.47)$$

cioè il termine delle correnti di spostamento è trascurabile.

Con le suddette relazioni possiamo scalare i vari termini della legge di Ohm:

$$\left(\frac{c^2}{V^2} \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \right) : \left(\frac{c^2}{V^2} \frac{\omega}{\omega_{pe}} \frac{\Omega_e}{\omega_{pe}} \right) : \left(\frac{c_s^2}{V^2} \frac{\omega}{\Omega_i} \right) : \left(\frac{c^2}{V^2} \frac{\omega}{\omega_{pe}} \frac{\nu_c}{\omega_{pe}} \right) = 1 : 1 \quad (7.48)$$

dove $c_s = (p/m^+n^+)^{1/2}$ è la velocità del suono e le altre quantità sono state precedentemente definite.

I primi tre termini della legge di Ohm sono trascurabili rispettivamente quando:

$$\frac{\omega}{\omega_{pe}} \ll \frac{V}{c}, \quad \frac{\omega \Omega_e}{\omega_{pe}^2} \ll \left(\frac{V}{c} \right)^2, \quad \frac{\omega}{\Omega_i} \ll \left(\frac{V}{c} \right)^2 \quad (7.49)$$

Se tutte queste relazioni sono soddisfatte, si ritorna alla legge di Ohm classica:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (7.50)$$

per analogia si usa spesso, per la legge generalizzata, la forma:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_{ind} \right) \quad (7.51)$$

dove il termine di campo indotto rappresenta gli effetti elettrodinamici che si originano in un plasma (trattato come un fluido conduttore).

Nelle ipotesi citate all'inizio del paragrafo, l'equazione dell'energia risulta pure semplificata; ponendo $p = (3/2)c_v T$ e utilizzando l'equazione di continuità:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^{5/3}} \right) = \frac{2}{3} \rho^{-5/3} \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (7.52)$$

Il sistema completo delle equazioni magnetoidrodinamiche risulta co-stituito da 14 equazioni scalari nelle 14 incognite scalari $\rho, \mathbf{V}, \mathbf{J}, p, \mathbf{E}, \mathbf{H}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\
\rho \frac{D\rho}{Dt} &= -\nabla p + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
\mathbf{J} &= \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\
\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^{5/3}} \right) &= \frac{2}{3} \rho^{-5/3} \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{7.53}$$

7.5 Equazioni magnetoidrodinamiche ideali

Un caso speciale delle equazioni magnetoidrodinamiche, molto usato in astrofisica, è quello che si ottiene nel limite di conduttività infinita, $\sigma \rightarrow \infty$, che comporta debba essere:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{B} \right) = 0 \tag{7.54}$$

se si vogliono evitare correnti infinite.

Il sistema delle *equazioni magnetoidrodinamiche ideali* è costituito dalle 11 seguenti equazioni scalari nelle 11 incognite scalari $\rho, \mathbf{V}, \mathbf{J}, p, \mathbf{H}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\
\rho \frac{D\rho}{Dt} &= -\nabla p + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^{5/3}} \right) &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\
\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{7.55}$$

È questo un sistema di vasta applicazione in astrofisica, dove i plasmi sono sempre caratterizzati da alta conduttività elettrica. È importante notare che non compare più direttamente il campo elettrico, in quanto un plasma ad alta conduttività non possiede carica netta. Tuttavia il plasma è conduttore, trasporta correnti e crea campi magnetici.

In effetti il sistema di equazioni suddetto è ricavabile direttamente dall'idrodinamica trattando il plasma come un fluido neutro, ma conduttore, e quindi assoggettabile alla forza $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, e tenendo conto delle equazioni di Maxwell per definire il campo magnetico e le correnti.

7.6 Sui criteri di applicabilità della trattazione fluida

Abbiamo visto nel caso idrodinamico che la trattazione fluida è consentita quando λ e τ , le scale di lunghezza e tempo su cui variano le grandezze fisiche, soddisfano certi criteri. Si può parlare di comportamento fluido di un elemento di volume r^3 ($r \ll \lambda$) se le particelle che vi si trovano al tempo t evolvono in maniera coerente fino al tempo $t + \tau$ (cioè mantengono valori delle grandezze fisiche molto vicini): il volume r^3 è pertanto l'elemento fluido. Una condizione necessaria, implicita in queste considerazioni, è che il trasporto di energia termica fuori dall'elemento dev'essere piccolo, il che comporta $\mathbf{q} \approx 0$.

In idrodinamica la coerenza è essenzialmente mantenuta dalle collisioni che impediscono alle particelle di diffondere liberamente e differenziarsi; in tal senso deve'essere $r \gg \lambda_c$ (cammino libero medio rispetto alle collisioni. E quindi a maggior ragione:

$$\lambda \gg \lambda_c, \quad (7.56)$$

$$\tau = \frac{\lambda}{V} \gg \tau_c, \quad (7.57)$$

dove in equilibrio termico $V \approx v_{th}$; per scale maggiori di λ o per tempi più lunghi di τ intervengono effetti dinamici globali.

In un plasma le deviazioni angolari del moto che impediscono la diffusione delle particelle non sono solo quelle dovute alle collisioni a breve range, ma anche la somma di tante piccole deflessioni dovute alle forze a lungo range.

Per le forze a breve range di tipo coulombiano il tempo che intercorre fra due urti che portano a una deflessione angolare di $\pi/2$ è, secondo Rutherford:

$$\tau_c = \frac{1}{nV\sigma(\pi/2)}; \quad (7.58)$$

per un gas di idrogeno ionizzato in equilibrio termodinamico la deflessione di $\pi/2$ avviene per collisioni alla distanza b_0 tale che $e^2/b_0 \approx kT$:

$$\tau_c = \frac{1}{nv_{th}\pi b_0^2}. \quad (7.59)$$

Per le forze a lungo range, sempre di tipo coulombiano, il corrispondente tempo di collisione $\tau_{c,lr}$, inteso come il tempo che deve intercorrere perchè l'insieme di molte collisioni deboli porti a una deflessione di $\pi/2$, è ottenibile con un classico calcolo di Spitzer:

$$\tau_{c,lr} = \frac{2\pi n \lambda_D^3}{\omega_p \log(\lambda_D/b_0)} \approx \frac{\tau_c}{\log \Lambda}. \quad (7.60)$$

Il fattore $\log \Lambda = 8 \log(\lambda_D/b_0)$ è nella maggior parte dei casi maggiore di 10, il che comporta che le collisioni a lungo range hanno un effetto più rapido di quelle a breve range.

Pertanto in un plasma le condizioni per la validità dell'approssimazione fluida sono:

$$\tau \gg \tau_{c,lr}, \quad (7.61)$$

$$\lambda \gg \lambda_{c,lr} = V\tau_{c,lr}. \quad (7.62)$$

Tipicamente le situazioni astrofisiche soddisfano queste condizioni, in quanto si lavora su grandi dimensioni o su elevate densità. Ciò consente l'utilizzazione di modelli fluidi. Tuttavia esistono anche situazioni in cui le precedenti condizioni sono violate; in tali casi si possono utilizzare altri regimi in cui una trattazione fluida è ancora valida. I più interessanti sono trattati nei due successivi paragrafi: il regime di plasma freddo e il regime di forte campo magnetico.

7.7 Il regime di plasma freddo

In una gas neutro a temperatura zero sono impossibili condizioni per un comportamento coerente in quanto le particelle non interagiscono: $\lambda_c \rightarrow \infty$. Le velocità delle particelle non sono correlate, i moti sono liberi (a meno che non intervengano altre forze che portino a effetti collettivi, ad esempio la gravitazione).

In un plasma, per quanto piccole possano essere le velocità di agitazione termica rispetto alla velocità imposta dalla dinamica, cioè $u \ll V$, i campi a lungo range continuano a mantenere la coerenza del sistema in quanto definiscono le velocità V .

Da un punto di vista formale, utilizzando le relazioni del precedente paragrafo, quando $v_{th} \approx T^{1/2} \rightarrow 0$, risulta $b_0 \rightarrow \infty$; pertanto $\tau_c \propto T^{3/2}$ e $\log \Lambda \propto \log T^{3/2}$, per cui $\tau_{c,lr}$ e $\lambda_c \rightarrow 0$. Pertanto le condizioni per una trattazione fluida sono soddisfatte per qualunque scala e per tempi maggiori di $\tau_{c,lr}$.

Le equazioni per un plasma freddo discendono dalle equazioni macroscopiche a due fluidi trascurando trasporto termico, pressione e temperatura del plasma. Sono 14 equazioni scalari nelle 14 incognite scalari ρ , Q , \mathbf{V} , \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{J}) &= 0 \\
\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= Q\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
\frac{m^+ m^-}{\rho e^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} .
\end{aligned} \tag{7.63}$$

7.8 Il regime di forte campo magnetico

Ritorniamo al caso di pressioni del plasma non trascurabili, ma di lunghezza scala di collisione grandi rispetto alle scale del plasma, $\lambda_c \gg \lambda$, co-sicché il plasma sia da considerare non collisionale; tuttavia si assuma che sia presente un forte campo magnetico, tale cioè che:

$$\lambda_c \gg r_{gir} = \frac{mvc}{eB}$$

dove r_{gir} è il raggio di Larmor o di girazione. In tali condizioni è lecito utilizzare le equazioni della teoria delle orbite in quanto i campi determinano un comportamento simile per particelle dello stesso tipo.

È tuttavia possibile ancora utilizzare equazioni fluide. Se λ_{\perp} è la scala delle variazioni delle grandezze fisiche del plasma perpendicolarmente al campo magnetico, si può dire che il campo magnetico "lega" le particelle alle linee di flusso, determinandone il comportamento collettivo, se:

$$\lambda_{\perp} \gg r_{gir} . \tag{7.64}$$

In tale situazione il campo magnetico assume il ruolo delle collisioni, ma solo nel piano perpendicolare: il comportamento è fluido soltanto su due delle tre coordinate spaziali.

Per la direzione lungo il campo magnetico spesso si utilizza l'ipotesi di moti termici trascurabili (plasma freddo longitudinale), in quanto ciò si accorda con l'ipotesi di poche collisioni.

Il plasma in presenza di un forte campo magnetico tende dunque ad avere un comportamento anisotropo con $p_{\perp} \neq p_{\parallel}$, $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$, ecc. Si possono ottenere le seguenti equazioni dell'energia nel limite equivalente al caso magnetoidrodin-

namico:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0 \quad (7.65)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0 \quad (7.66)$$

La teoria che tratta i plasmi anisotropi nel senso ora descritto, assumendo condizioni di adiabaticità per l'equazione dell'energia distinte nelle direzioni parallela e perpendicolare al campo magnetico, è stata sviluppata da Chew, Goldberger e Low e va sotto il nome di *teoria doppia adiabatica (o CGL)*; è di vasta applicazione nei plasmi di laboratorio. Nella maggior parte dei casi astrofisici, la teoria CGL non comporta grandi differenze rispetto alle equazioni magnetoidrodinamiche; e comunque, poichè si sviluppano facilmente situazioni turbolente, le collisioni con perturbazioni ondose possono rapidamente ricondurre la distribuzione alle condizioni di isotropia.

7.9 Dinamica dell'interazione plasma/campo magnetico

L'interazione elettromagnetica comporta che in un plasma le particelle siano sempre fortemente condizionate dai campi collettivi ed eventualmente da campi sostenuti da generatori esterni. In astrofisica i campi magnetici sono presenti ovunque e la loro origine è spesso determinata da agenti esterni. Pertanto il comportamento dei plasmi astrofisici va studiato in termini di interazione elettrodinamica con i campi magnetici. In una vasta serie di problemi si può applicare la teoria magnetoidrodinamica.

In tale schema vogliamo studiare il comportamento delle linee di flusso immerse in un plasma. Si parte dalle equazioni di Maxwell e dalla legge di Ohm:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) \quad (7.67)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left[-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right] \quad (7.68)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left[\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \quad (7.69)$$

che porta all'equazione magnetoidrodinamica:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (7.70)$$

dove $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$ è la *resistività elettrica*. Il primo termine a destra dell'ultima relazione indica la diffusione del campo magnetico (analogamente all'equazione della temperatura per il trasporto di calore); il secondo termine rappresenta la convezione del campo magnetico da parte del plasma in moto (in analogia all'equazione per la vorticità nei fluidi).

| | L (cm) | τ (s) |
|------------------------|-----------|------------|
| Scariche in gas | 10 | 10^{-3} |
| Nucleo terrestre | 10^8 | 10^{12} |
| Macchie solari | 10^9 | 10^{14} |
| Corona solare | 10^{11} | 10^{18} |
| Spazio interplanetario | 10^{13} | 10^{20} |

Tab. 7.4: Decadimento dei campi magnetici

7.9.1 Plasma a riposo, $V = 0$

In tale caso l'equazione magnetoidrodinamica diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} , \quad (7.71)$$

che indica come il campo vari tipicamente su un tempo scala:

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{\eta} = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} , \quad (7.72)$$

in quanto le linee di flusso diffondono nel plasma quando la resistività non sia esattamente nulla (conduttività infinita). In condizioni astrofisiche τ_{diff} è sempre molto grande, sia perchè la conduttività è grande sia perchè lo sono le lunghezze scala considerate. Pertanto i campi magnetici possono essere considerati praticamente costanti nella maggior parte dei casi (Tab. 7.4).

7.9.2 Plasma in moto, $V \neq 0$, a resistività trascurabile, $\eta \rightarrow 0$

L'equazione magnetoidrodinamica in tale limite risulta:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) , \quad (7.73)$$

e, per \mathbf{B} dato a $t = 0$, permette di calcolare come esso viene modificato a tempi successivi dai moti del plasma.

È utile ricavare due importanti teoremi che vanno sotto il titolo di *principio di congelamento delle linee di flusso magnetico* nei plasmi a conduttività infinita (Alfvén 1942).

Teorema (a): il flusso magnetico attraverso a un qualunque circuito concatenato con il plasma è costante.

Il flusso attraverso al circuito γ di area \mathbf{S} (Fig. 7.3a) è dato da:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (7.74)$$

Al muoversi del circuito con il plasma il flusso varierà per due effetti di-stinti: (1) variazione locale di \mathbf{B} col tempo e (2) variazione della superficie deformata dal moto (perdita di flusso laterale):

$$\begin{aligned}
\frac{D\Phi}{Dt} &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \times d\mathbf{r}) \\
&= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S} \quad (7.75) \\
&= - \int_S \left\{ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right\} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

L'integrando si annulla se \mathbf{V} è proprio la velocità del plasma. Pertanto, se il circuito si muove con il plasma, Φ è costante, cioè il flusso è trasportato senza variazioni: il campo è *congelato* nel plasma.

Teorema (b): elementi di fluido che si trovano inizialmente associati ad una data linea di flusso continuano a rimanere solidali con tale linea durante il moto.

Si trasforma l'equazione magnetoidrodinamica nella forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

e, usando l'equazione di continuità, si ottiene:

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

che può essere scritta come:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} . \quad (7.76)$$

Si consideri ora un elemento fluido lineare, definito dal vettore $d\mathbf{r}$ di estremi iniziali 1 e 2, che si muova per il tempo dt nella posizione 1' e 2' (Fig. 7.3b). Si calcoli la variazione del vettore $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r}(t+dt) - d\mathbf{r}(t) = (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)dt = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{V} dt \quad (7.77)$$

che si riscrive nella forma:

$$\frac{D}{Dt} d\mathbf{r} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{V} . \quad (7.78)$$

per cui, confrontando le 7.76 e 7.78:

$$d\mathbf{r} \propto \frac{\mathbf{B}}{\rho} . \quad (7.79)$$

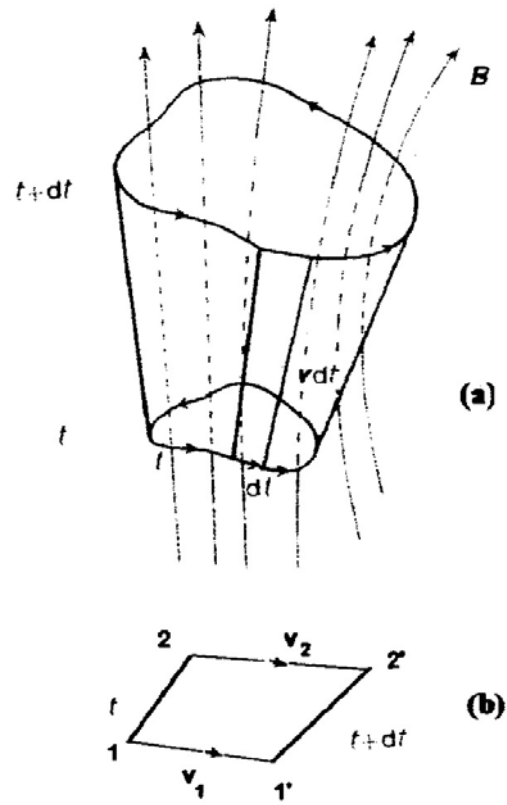


Fig. 7.3: Teorema di Alfvén sul congelamento del campo magnetico nei plasmi

È quindi evidente che, se $d\mathbf{r}$ è inizialmente lungo \mathbf{B} , la proporzionalità si conserva. Una tale situazione si verifica solo se le velocità dell'elemento fluido e del campo magnetico coincidono. Nuovamente si ottiene che plasma e campo magnetico sono *congelati*: qualora aumenti la densità del plasma dovrà anche crescere l'intensità del campo e viceversa.

Quanto vale l'ipotesi di congelamento per plasmi con $\eta \neq 0$? Occorre che la diffusione sia lenta rispetto alla convezione:

$$|\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})| \gg |\eta \nabla^2 \mathbf{B}|$$

$$\frac{VB}{L} \gg \eta \frac{B}{L^2}$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{M}} \equiv \frac{LV}{\eta} \gg 1 \quad (7.80)$$

dove $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ è detto *numero di Reynolds magnetico*. Per grandi numeri di Reynolds vale l'approssimazione magnetoidrodinamica ideale.