

## Capitolo 17

# Magnetoidrodinamica

### 17.1 Le equazioni fondamentali MHD

Nel Capitolo precedente abbiamo ricavato le equazioni magnetoidrodinamiche partendo dalle equazioni cinetiche e da considerazioni sulla fisica microscopica. Abbiamo discusso in particolare sotto quali condizioni si può arrivare ad un modello fluido, analogamente a quanto fatto nel caso idrodinamico, mostrando come nel caso dei plasmi il modello sia meno ben giustificato per la difficoltà a trattare in modo unico le collisioni coulombiane per vari parametri d'impatto e per l'intrinseca complessità dei plasmi che fanno intervenire interazioni a molti corpi. Il modello magnetoidrodinamico vale quando non si creino separazione di cariche, e, come già detto, ciò avviene quando le scale spaziali del problema siano grandi rispetto alla lunghezza di Debye e quelle temporali lunghe rispetto all'inverso della frequenza di plasma. Il modello magnetoidrodinamico, o come d'ora in avanti lo indicheremo per brevità modello MHD (dall'inglese magnetohydro-dynamic model), dà la possibilità di studiare la dinamica nelle condizioni suddette in modo molto chiaro ed elegante. La sua principale caratteristica è di poter eliminare i campi elettrici dal problema e di basarsi sulla capacità del campo magnetico di confinare le particelle e quindi di produrre un comportamento collettivo anche in assenza di collisioni.

Tra il modello cinetico e quello magnetoidrodinamico esiste il modello a due fluidi illustrato nel Capitolo 15 che permette di trattare fenomeni in cui elettroni e ioni rispondono in modo differente; ciò avviene soprattutto nel caso di fenomeni che avvengono su tempi scala brevi, come ad esempio la propagazione di onde come abbiamo visto nel Capitolo 15 e studieremo ancora nel prossimo Capitolo 20.21.

Discuteremo ora le equazioni MHD dal punto di vista macroscopico assumendo in genere che i coefficienti di trasporto (viscosità, resistività, conducibilità termica) siano semplici scalari. In realtà la presenza del campo magnetico rende il plasma anisotropo, e ciò comporterebbe la necessità di utilizzare coefficienti tensoriali. Tuttavia se la frequenza di collisione è elevata il plasma

viene mantenuto sempre in condizioni di isotropia. Considereremo inoltre i coefficienti costanti per semplificare la trattazione.

Seguiamo lo stesso schema del Capitolo 4 per l'idrodinamica. L'equazione di continuità rimane invariata:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (17.1)$$

Nell'equazione del moto occorre invece aggiungere all'equazione di Navier-Stokes (5.9) le forze elettromagnetiche, che, nell'ipotesi di assenza di separazione di carica, si riducono alla sola forza di Hall  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (17.2)$$

Questa equazione coincide con l'equazione del modello microscopico ad un fluido ricavato nel Capitolo 16. Qui abbiamo aggiunto il termine di viscosità secondo quanto discusso nel caso idrodinamico, nell'ipotesi che le considerazioni allora fatte sulla viscosità continuino sostanzialmente a valere anche quando si parli di plasm.

Possiamo ora esprimere la corrente  $\mathbf{J}$  per mezzo dell'equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (17.3)$$

imponendo di trascurare processi che avvengono su tempi scala brevi e con velocità tipiche  $u \ll c$ , per cui  $|E/B| \sim u/c \ll 1$  e quindi:

$$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| : |\nabla \times \mathbf{B}| \sim \frac{E/ct}{B/L} \sim \frac{u E}{c B} \sim \left( \frac{u}{c} \right)^2. \quad (17.4)$$

In tal modo possiamo trascurare le correnti di spostamento e quindi:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (17.5)$$

che permette di scrivere l'equazione del moto nel solo campo magnetico:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (17.6)$$

Dall'identità vettoriale:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla^2 \left( \frac{B^2}{2} \right) \quad (17.7)$$

si ricava infine:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{4\pi\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (17.8)$$

È chiaro come l'effetto del campo magnetico sia quello di introdurre una pressione isotropa e una tensione lungo le linee di forza.

Per quanto riguarda l'equazione dell'energia, è espressa analogamente alla (3.45)

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon \right) = \nabla \cdot (K \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{J^2}{\sigma} \quad (17.9)$$

$$= \nabla \cdot (K \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{c^2}{(4\pi)^2 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B})^2 \quad (17.10)$$

con il termine di riscaldamento Joule in aggiunta al termine di diffusione termica. Salvo casi particolari nella maggior parte dei problemi astrofisici l'equazione dell'energia è peraltro lasciata inutilizzata perché si trattano problemi di plasmi incompressibili oppure si assumono particolari tipi di trasformazioni, come ad esempio le adiabatiche in quanto le perdite energetiche sono trascurabili.

Per avere una teoria dinamica completa occorre ancora scrivere un'equazione per il campo magnetico. Nelle ipotesi precedentemente discusse, l'equazione dell'induzione di Maxwell:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}$$

può essere combinata con la

$$\mathbf{J} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \right) = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (17.11)$$

ossia

$$\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} \quad (17.12)$$

per cui

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (17.13)$$

che è anche detta *equazione magnetoidrodinamica*,  $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$  è la *resistività elettrica*. Il primo termine a destra dell'ultima relazione indica la diffusione del campo magnetico (analogamente all'equazione della temperatura per il trasporto di calore); il secondo termine rappresenta la convezione del campo magnetico da parte del plasma in moto (in analogia all'equazione per la vorticità nei fluidi).

## 17.2 Dinamica dei plasmi magnetizzati

La relativa importanza dei due termini della (17.13) che determinano l'evoluzione del campo magnetico è misurata dal rapporto delle loro quantità caratteristiche, un numero puro:

$$\mathcal{R}_M = \frac{uB/L}{\eta B/L^2} = \frac{uL}{\eta} \quad (17.14)$$

che prende il nome di *numero di Reynolds magnetico* in analogia al numero di Reynolds idrodinamico (5.19) che è espresso con la viscosità invece che con la resistività. Data la proporzionalità di  $\mathcal{R}_M$  alla scala del sistema, appare ovvio

	$L$ (cm)	$\tau_{diff}$ (s)	$u$ (cm/s)	$\mathcal{R}_M$
Scariche in gas	10	$10^{-3}$	10	$10^{-3}$
Nucleo terrestre	$10^8$	$10^{12}$	$10^5$	$10^9$
Macchie solari	$10^9$	$10^{14}$	$10^6$	$10^{11}$
Corona solare	$10^{11}$	$10^{18}$	$10^7$	$10^{14}$
Spazio interplanetario	$10^{13}$	$10^{20}$	$10^7$	$10^{14}$

Tab. 17.1: Tempi caratteristici di decadimento di campi magnetici e numeri di Reynolds magnetici in laboratorio e in astrofisica.

come in condizioni astrofisiche tenda sempre ad essere un numero grande, tanto più che la conduttività elettrica dei plasmi astrofisici è pure molto grande, e quindi la resistività molto piccola.

### 17.2.1 Plasma a riposo, $\mathbf{u} = 0$

In tale caso l'equazione magnetoidrodinamica diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (17.15)$$

che indica come il campo vari tipicamente su un tempo scala:

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{\eta} = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}, \quad (17.16)$$

in quanto le linee di flusso diffondono nel plasma quando la resistività non sia esattamente nulla (conduttività infinita). L'origine fisica del decadimento del campo magnetico è legata al fatto che il campo è generato da correnti elettriche secondo la (17.5) e queste vengono dissipate per effetto Joule; in assenza di sorgenti esterne quindi le correnti decadono e così pure il campo magnetico.

In condizioni astrofisiche  $\tau_{diff}$  è sempre molto grande, sia perchè la conduttività è grande sia perchè lo sono le lunghezze scala considerate. Pertanto i campi magnetici possono essere considerati praticamente costanti nella maggior parte dei casi (Tab. 17.1).

### 17.2.2 Plasma in moto, $\mathbf{u} \neq 0$ , con resistività nulla

L'equazione magnetoidrodinamica in tale limite risulta:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (17.17)$$

e, per  $\mathbf{B}$  dato a  $t = 0$ , permette di calcolare come esso viene modificato a tempi successivi dai moti del plasma. Confrontando questa equazione con le (4.52) e

(4.53) si ricava immediatamente il principio che il flusso magnetico concatenato con il plasma deve conservarsi nella dinamica di un plasma a resistività nulla.

Alfvén nel 1942 ha rivistato due teoremi che vanno sotto il titolo di *principio di congelamento delle linee di flusso magnetico nei plasmi a conduttività infinita* e che sono analoghi alla conservazione della vorticità ricavata per i fluidi ideali trattati nel Capitolo 4. Questi teoremi sono fondamentali nello studio dei processi astrofisici in quanto i plasmi astrofisici hanno tipicamente numeri di Reynolds magnetici praticamente infiniti.

*Teorema (a): il flusso magnetico attraverso a un qualunque circuito concatenato con il plasma è costante.*

Il flusso attraverso al circuito  $\gamma$  di area  $\mathbf{S}$  (Fig. 17.1) è dato da:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (17.18)$$

Al muoversi del circuito con il plasma il flusso varierà per due effetti distinti: (1) variazione locale di  $\mathbf{B}$  col tempo e (2) variazione della superficie deformata dal moto (perdita di flusso laterale):

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{r}) \\ &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_S \left\{ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right\} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (17.19)$$

L'integrando si annulla se  $\mathbf{u}$  è proprio la velocità del plasma. Pertanto, se il circuito si muove con il plasma,  $\Phi$  è costante, cioè il flusso è trasportato senza variazioni: il campo è *congelato* nel plasma.

*Teorema (b): elementi di fluido che si trovano inizialmente associati ad una data linea di flusso continuano a rimanere solidali con tale linea durante il moto.*

Si trasforma l'equazione magnetoidrodinamica nella forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

e, usando l'equazione di continuità, si ottiene:

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

che può essere scritta come:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (17.20)$$

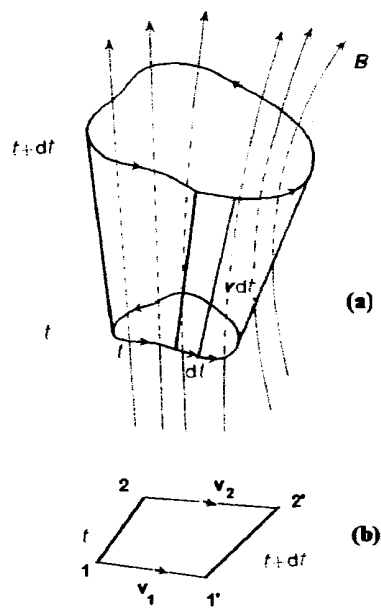


Fig. 17.1: Congelamento delle linee di flusso magnetiche in un plasma a conduttività infinita

Si consideri ora un elemento fluido lineare, definito dal vettore  $d\mathbf{r}$  di estremi iniziali 1 e 2, che si muova per il tempo  $dt$  nella posizione 1' e 2' (Fig. 17.1). Si calcoli la variazione del vettore  $d\mathbf{r}$ :

$$d\mathbf{r}(t + dt) - d\mathbf{r}(t) = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)dt = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{u}dt \quad (17.21)$$

che si riscrive nella forma:

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{r} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{u} . \quad (17.22)$$

per cui, confrontando le (17.20) e (17.22):

$$d\mathbf{r} \propto \frac{\mathbf{B}}{\rho} .$$

È quindi evidente che, se  $d\mathbf{r}$  è inizialmente lungo  $\mathbf{B}$ , la proporzionalità si conserva. Una tale situazione si verifica solo se le velocità dell'elemento fluido e del campo magnetico coincidono. Nuovamente si ottiene che plasma e campo magnetico sono solidali: qualora aumenti la densità del plasma dovrà anche crescere l'intensità del campo e viceversa.

### 17.2.3 Applicazioni della teoria MHD all'astrofisica

Nei sistemi astrofisici il principio di congelamento delle linee di forza nel plasma è uno strumento molto utile per visualizzare l'evoluzione di campi senza risolvere completamente le equazioni MHD. Ciò è legato al fatto che risulta intuitivo illustrare l'evoluzione dei campi attraverso le linee di flusso, molto più intuitivo che risalire alle correnti che permeano il plasma.

Si supponga ad esempio che un campo uniforme sia congelato in una colonna di plasma (Fig. 17.2). Se la colonna di plasma viene piegata o attorcigliata il campo magnetico acquisirà la stessa morfologia e si possono così creare complesse topologie magnetiche. In condizioni astrofisiche il campo magnetico viene visto come un materiale plastico che può essere distorto dalla dinamica del plasma: questa è l'origine delle strutture magnetiche alla superficie del Sole, macchie solari, protuberanze (Fig. 17.3), buchi coronali e della struttura magnetica a spirale del vento solare. L'origine del ciclo magnetico solare è legato all'interazione tra i moti convettivi subfotosferici e la rotazione.

Un caso interessante è quello della contrazione gravitazionale di una stella magnetizzata e rotante alla fine della sua evoluzione verso lo stato di nana bianca o di stella di neutroni. Data la rapidità del collasso non vi è dissipazione né di momento angolare né di flusso magnetico:

$$MR^2\omega = \text{costante} \quad (17.23)$$

$$BR^2 = \text{costante} \quad (17.24)$$

per cui sia la velocità angolare sia il campo magnetico cresceranno proporzionalmente all'inverso del quadrato del raggio stellare. In particolare la struttura

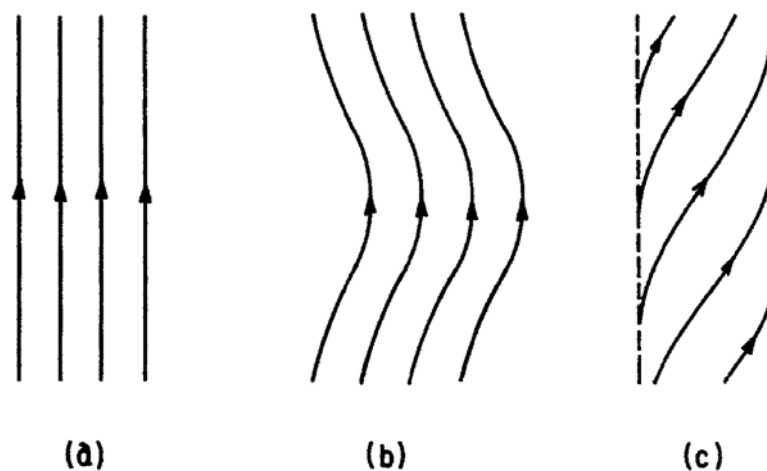
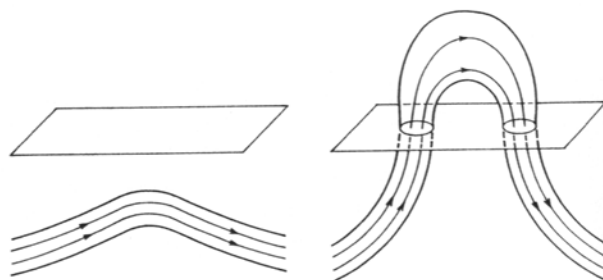
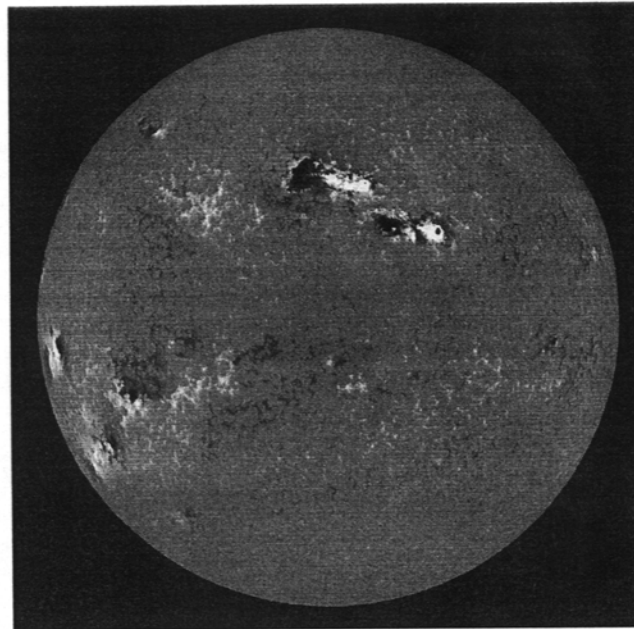


Fig. 17.2: Esempi sulla dinamica di campi magnetici congelati in un plasma. (a) Campo uniforme in una colonna di plasma. (b) Configurazione magnetica creata dal piegamento della colonna. (c) Configurazione magnetica creata da un attorcigliamento della colonna.

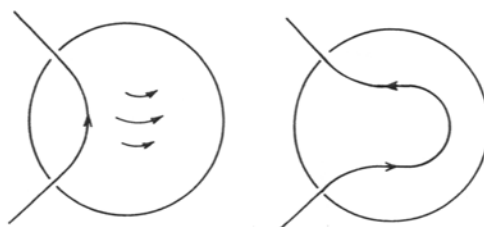
magnetica evolverà omologicamente se il collasso mantiene la simmetria assiale; ad esempio la struttura di dipolo magnetico di una stella del tipo solare con raggio di circa  $10^{11}$  cm, periodo di rotazione di circa 1 mese e campo magnetico di circa 1 gauss si trasformerà nella struttura di dipolo di una stella di neutroni con raggio di circa 10 km, periodo di rotazione di qualche millisecondo e campo magnetico oltre i  $10^{10}$  gauss. È questa la spiegazione dell'origine delle pulsar nel modello di rotatore magnetico obliquo (Fig. 17.4).

Un'applicazione importante della teoria MHD è quella all'accelerazione di getti supersonici dai nuclei galattici attivi che abbiamo precedentemente discusso in contesto idrodinamico nel Capitolo 7 sulla base del modello di Blandford e Rees. Quel modello lascia non chiarita l'origine della spinta del getto verso velocità relativistiche e dell'effettiva sua collimazione. Nel 1982 un modello MHD del fenomeno è stato proposto da Blandford e Payne. La prima questione è appunto sull'origine dell'energia del getto; per questo si può ricorrere all'idea discussa nel Capitolo 5 che l'energia dei nuclei galattici attivi provenga da fenomeno di accrescimento verso un oggetto di grande massa, presumibilmente sotto forma di buco nero. Possiamo dunque costruire lo scenario illustrato in Fig. 17.5: un buco nero centrale è circondato nel piano equatoriale del momento angolare da un disco di accrescimento, e due getti viene eiettati in direzioni opposte lungo l'asse di rotazione. Per incanalare parte dell'energia rilasciata dalla dinamica dell'accrescimento verso i getti Blandford e Payne propongono che il campo magnetico possa essere utilizzato per lanciare pic-





(a)



(b)

Fig. 17.3: Magnetogramma del disco solare; polarità positive e negative corrispondono alle macchie chiare e scure. (a) Formazione di un tubo di flusso magnetico emergente dalla superficie solare per effetto di galleggiamento. (b) Produzione del campo magnetico toridale solare per effetto della rotazione differenziale

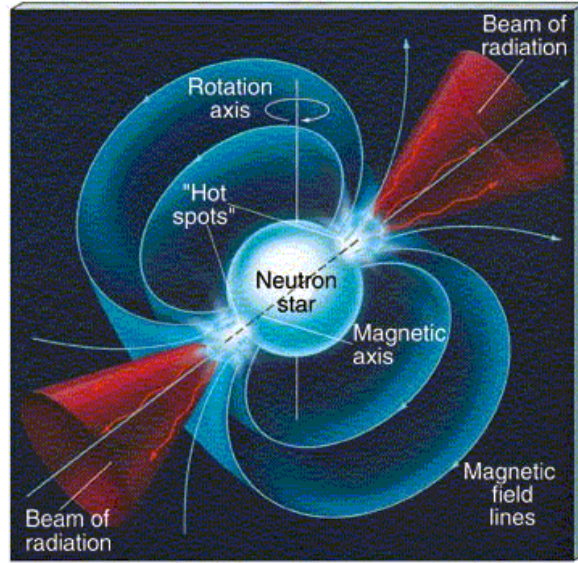


Fig. 17.4: Modello di rotatore magnetico obliquo per le pulsar

cole quantità di gas evaporato dalle zone più interne della superficie del disco che trasportino grandi quantità di momento angolare. Questo spiegherebbe tra l'altro anche la perdita di momento angolare del disco che ne causa quindi l'accrescimento verso il buco nero.

La parte destra della Fig. 17.5 mostra una tipica linea di forza ancorata ad un punto  $P$  del disco e piegata verso il buco nero per effetto dell'accrescimento. Si mostra (legge di isotrazione di Ferraro) che una struttura stabile esiste solo se tutti i punti sulla linea di forza  $PQ$  posseggono la stessa velocità angolare, che è quella Kepleriana del punto  $P$ :

$$\Omega_0 = \left( \frac{GM}{r_0^3} \right)^{1/2}. \quad (17.25)$$

Consideriamo ora una particella di plasma alla posizione  $R$  congelata sulla linea di forza. Essa sarà soggetta alla forza centrifuga  $F_c = \Omega_0^2 r$  perpendicolare all'asse di rotazione e alla forza gravitazionale verso il buco nero  $F_g = GM/[r^2 + z^2]$ . Vi sarà anche una forza magnetica  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  che tuttavia non ha componente lungo la linea di forza. Per valutare la direzione della spinta alla particella di plasma lungo la linea di forza occorre calcolare le componenti delle forze agenti lungo la direzione  $PQ$ . È più comodo lavorare con il potenziale:

$$\phi(r, z) = -\frac{GM}{r_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{r_0}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]. \quad (17.26)$$

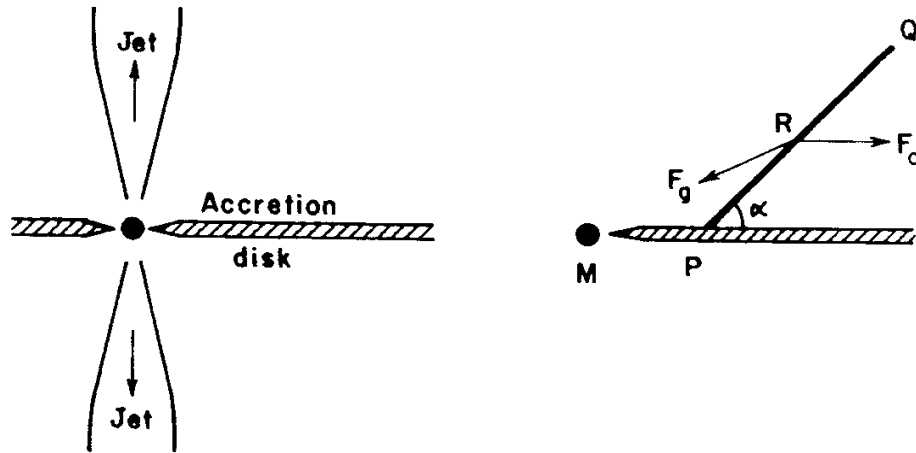


Fig. 17.5: Modello di Blandford e Payne per l'accelerazione dei getti supersonici dai dischi di accrescimento

Nell'ipotesi di lavorare nelle vicinanze del disco possiamo porre  $r = r_0 + r'$ , sviluppare il potenziale per  $r'$  e  $z < r_0$  e tenere solo i termini dell'ordine di  $1/r_0^2$ :

$$\phi(r, z) \approx -\frac{GM}{r_0} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left( \frac{r'}{r_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (17.27)$$

Se  $s$  è la distanza da  $P$  lungo la linea di forza si ha che  $r' = s \cos \alpha$  e  $z = s \sin \alpha$ . Per ottenere la forza lungo  $PQ$  dobbiamo usare queste relazioni e derivare  $\phi$  rispetto a  $s$ :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{GMs}{r_0^3} (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (17.28)$$

Pertanto se  $\alpha < 60^\circ$  la particella di plasma è spinta via lungo la linea di forza, per angoli maggiori è catturata dal buco nero. È possibile una semplice analogia della forza agente su una pallina infilata su un filo rotante. Oltre a individuare la sorgente di energia, questo schema di Blandford e Payne indica anche che il flusso sarà collimato lungo le linee di flusso magnetico. Gli autori sviluppano il calcolo della velocità di un flusso continuo che raggiunge velocità superalfveniche ad un punto singolare lungo la linea di flusso, analogamente a quanto visto per il caso del vento solare.