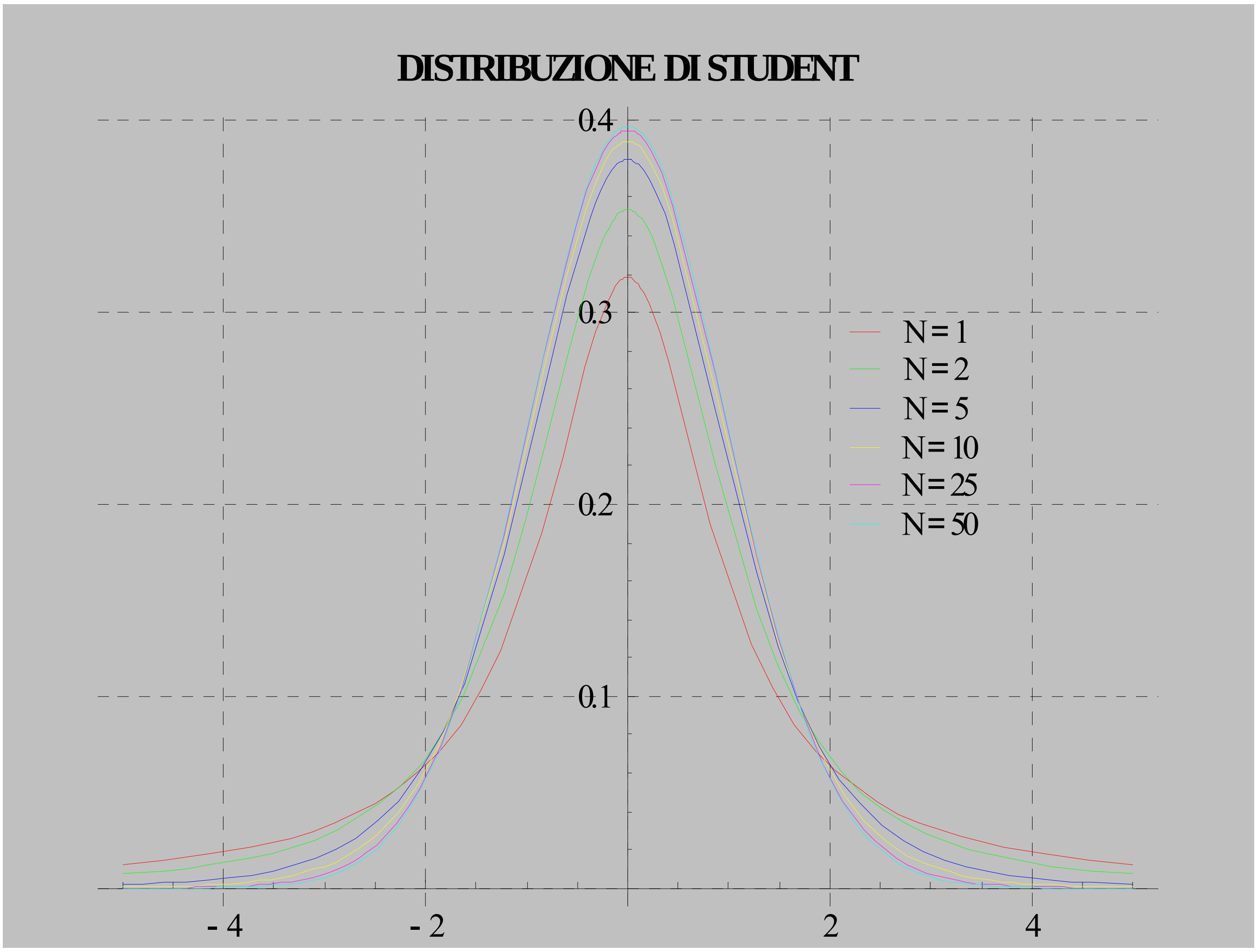
PICCOLI CAMPIONI. TEST di STUDENT. INTERVALLI di CONFIDENZA:



Intervalli confidenza $P[\,|\bar{x} - \mu| \le t_c \bullet S_{\bar{x}}\,] = W_{DF}(t_c) = \int_{-t_c}^{t_c} f_{DF}(t)dt = 1 - \alpha.$

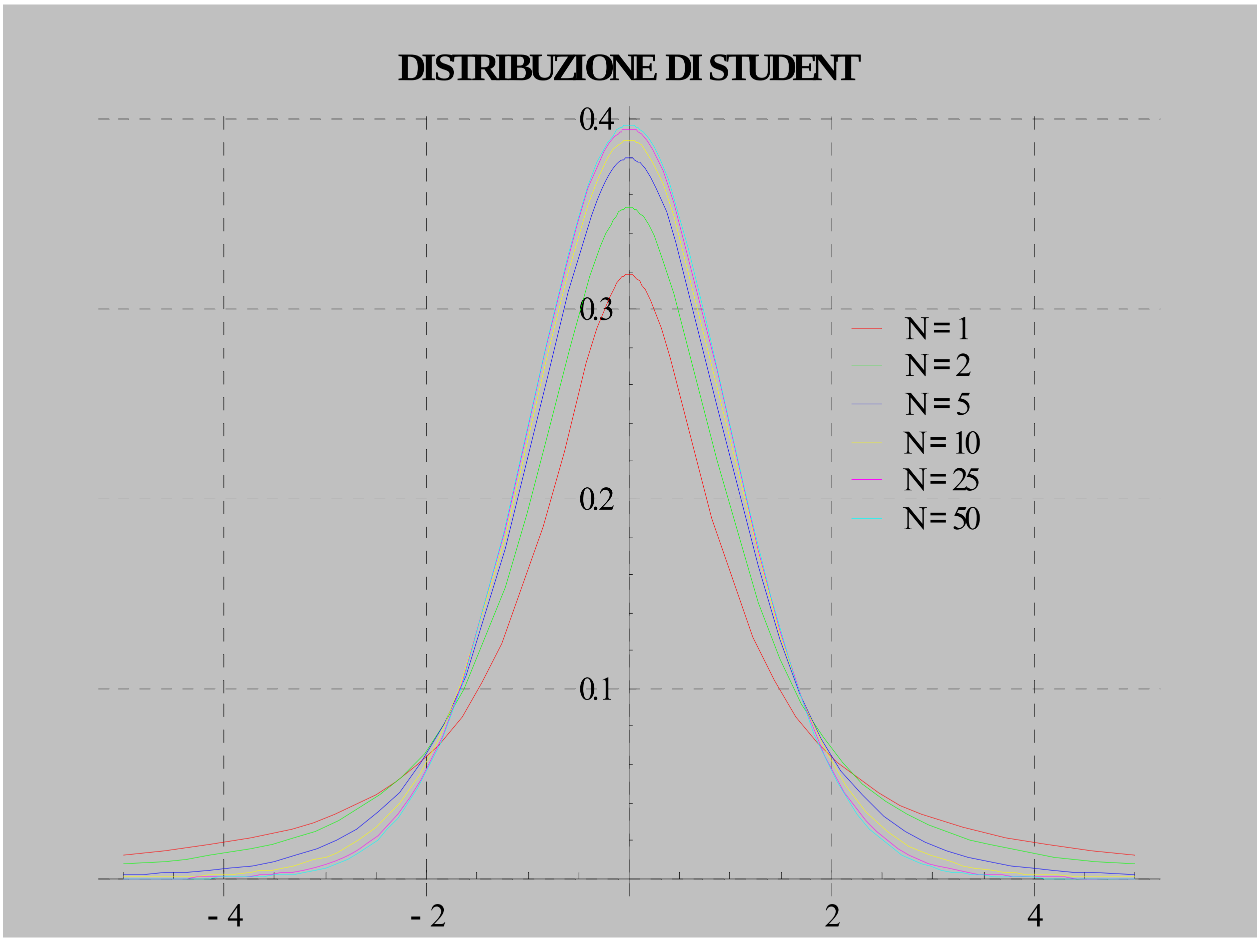
Compatibilità di un valore medio empirico con un valore prefissato: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n}}} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}}$, DF = n - 1

Compatibilità di due valori medi misurati: $t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$, $DF = n_1 + n_2 - 2$

Verifica di ipotesi nell'interpolazione lineare : $t = \dfrac{a - A_0}{S_a}$ e $t = \dfrac{b - B_0}{S_b}$, DF = n – 2

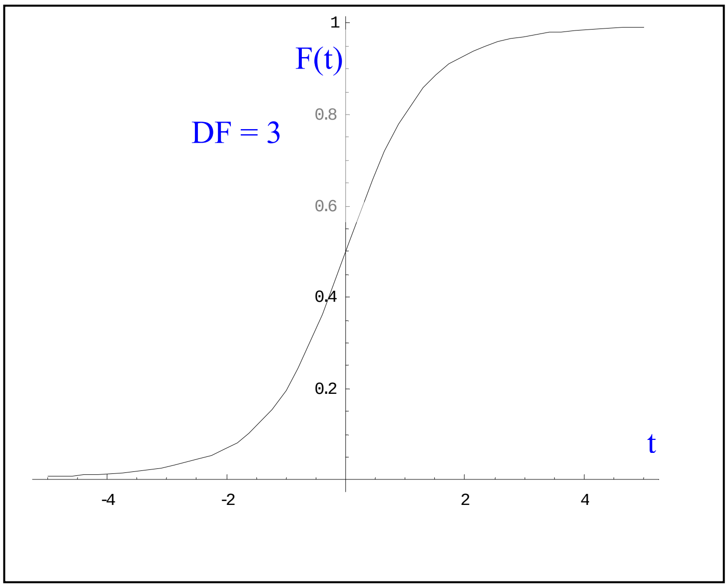
Esempio di applicazione del test di Fisher : $F = W1 / W2 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$, DF = (4,5).

PICCOLI CAMPIONI. TEST di STUDENT. INTERVALLI di CONFIDENZA:

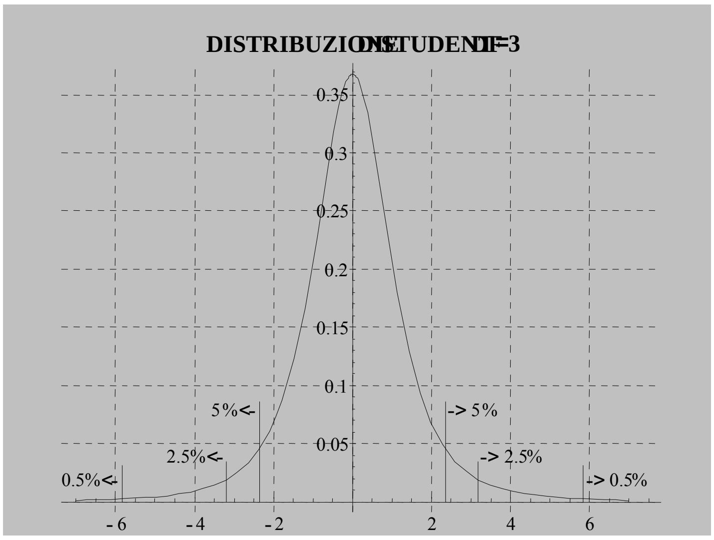


Andamento della distribuzione ***t*** di ***Student*** al variare dei gradi di libertà ***: DF = N.***

Per **N grande tende** alla distribuzione **normale** standardizzata.



Funzione cumulativa $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{DF=3}(x)dx$



Valori critici tc per livelli di fiducia α del (10, 5, 1) %.

Tabella dei valori critici di t per due livelli α di fiducia.				
	banda di sinistra		Entrambe le bande	
DF	α=.05	α=.01	α=.05	α=.01
1	6.31	31.82	12.71	63.66
2	2.92	6.97	4.30	9.93
3	2.35	4.54	3.18	5.84
4	2.13	3.74	2.78	4.60
5	2.02	3.37	2.57	4.03
6	1.94	3.14	2.45	3.71
7	1.90	3.00	2.37	3.50
8	1.86	2.90	2.31	3.36
9	1.83	2.82	2.26	3.25
10	1.81	2.76	2.23	3.17
11	1.80	2.72	2.20	3.11
12	1.78	2.68	2.18	3.06
13	1.77	2.65	2.16	3.01
14	1.76	2.62	2.15	2.98
15	1.75	2.60	2.13	2.95
16	1.75	2.58	2.12	2.92
17	1.74	2.57	2.11	2.90
18	1.73	2.55	2.10	2.88
19	1.73	2.54	2.09	2.86
20	1.73	2.53	2.09	2.85
21	1.72	2.52	2.08	2.83
22	1.72	2.51	2.07	2.82
23	1.71	2.50	2.07	2.81
24	1.71	2.49	2.06	2.80
25	1.71	2.49	2.06	2.79
26	1.71	2.48	2.06	2.78
27	1.70	2.47	2.05	2.77
28	1.70	2.47	2.05	2.76
29	1.70	2.46	2.05	2.76
30	1.70	2.46	2.04	2.75
∞	1.64	2.33	1.96	2.58

F = W1/W2 ; W1: DF = n ; W2: DF = m

Tabella dei valori critici di F con n e m gradi di liberta', per regione critica limitata a destra e per livello di fiducia del 5%.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
m											
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	254
2	18.5	19.	19.	19.	19.	19.	19.	19.	19.	19.	19.
3	10.1	9.5	9.3	9.1	9.0	8.9	8.9	8.8	8.8	8.8	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	6.1	6.0	6.0	5.9	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.0	4.9	4.9	4.8	4.8	4.7	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.2	4.1	4.1	4.1	3.7
7	5.6	4.7	4.3	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.4	3.3	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.2	3.1	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	3.1	3.1	3.0	3.0	2.5
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.

Tabella dei valori critici di F con n e m gradi di liberta', per regione critica limitata a destra e per livello di fiducia del 1%.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
m											
1	4.05	5.0	5.4	5.0	5.7	5.9	5.9	6.0	6.0	6.1	6.4
2	98.5	99.	99.	99.	99.	99.	99.	99.	99.	99.	99.5
3	34.1	31.	29.	29.	28.	28.	28.	28.	27.	27.	26.1
4	21.2	18.	16.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	14.	13.
5	10.2	13.	12.	11.	11.	11.	10.	10.	10.	10.	9.0
6	13.7	11.	10.	9.	9.	8.	8.	8.	8.	8.	6.9
7	12.2	9.6	8.0	7.8	7.4	7.2	7.0	6.8	6.7	6.6	5.0
8	11.2	8.0	7.6	7.0	6.6	6.4	6.2	6.0	5.9	5.8	4.9
9	10.5	8.0	7.0	6.4	6.0	5.8	5.6	5.5	5.3	5.2	4.3
10	10.0	7.5	6.5	6.0	5.6	5.4	5.2	5.1	4.9	4.8	3.91
∞	6.6	4.6	3.8	3.3	3.0	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	1.

TEST di STUDENT . TEST NORMALE. *Pccoli e grandi* CAMPIONI.
Si supponga di eseguire una misura e si supponga nota la risoluzione σ dell'apparato, e quindi l'errore sulla singola misura .
Si supponga , per esempio,di misurare una massa il cui valore risulta essere 13.5 g, usando una bilancia della quale e' nota la risoluzione di 0.1 g, allora si riporta il valore come: m = (13.5±0.1)g e l'intervallo (13.4÷13.6) viene interpretato , per una distribuzione gaussiana, come l'intervallo di confidenza del 68% di contenere il valore vero. Questo e' vero se conosciamo la risoluzione dell'apparato. Questo quando si eseguono misure accade spesso, ma a volte questo non e' il caso, specie nelle scienze sociali dove la dispersione dei valori deriva da una dispersione intrinseca dei valori della popolazione, piuttosto che da una misurazione. Nel caso di piccoli campioni , e quando non siano note le varianze delle popolazioni, si fa uso della distribuzione di Student. Per quanto detto , essa e' un argomento piu' familiare ai dottori e agli economisti che non a fisici e chimici.

Una singola misura puo' fornire una onesta stima , ma non e' sufficiente per dare da informazioni sulla precisione. Se la risoluzione non e' nota a priori, allora si devono effettuare piu' misure, e stimare la dispersione dal campione di n misure: non si ha il valore di σ, ma la sua stima s.

Se e' noto μ si usa : $S^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \mu)^2$

Se μ non e' noto si usa: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$

Invece della variabile gaussiana $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ si ha a che fare con la variabile $t = \frac{x-\mu}{s}$.

La variabile t non e' distribuita normalmente; la significativita' della discrepanza $(x - \mu)$ e' minore, se invece di σ si conosce la sua stima *S*, a causa della incertezza addizionale associata ad *S*. In pratica, specie per piccoli n , essa e' una stima poco precisa di σ.

<u>Intervallo di confidenza</u>
Da un campione di n valori {xi} estratti da una popolazione gaussiana (μ,σ) si ottengano i valori della media e varianza:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$ e $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$. S_x rappresenta la deviazione standard empirica e $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$ la deviazione standard empirica del valore medio.

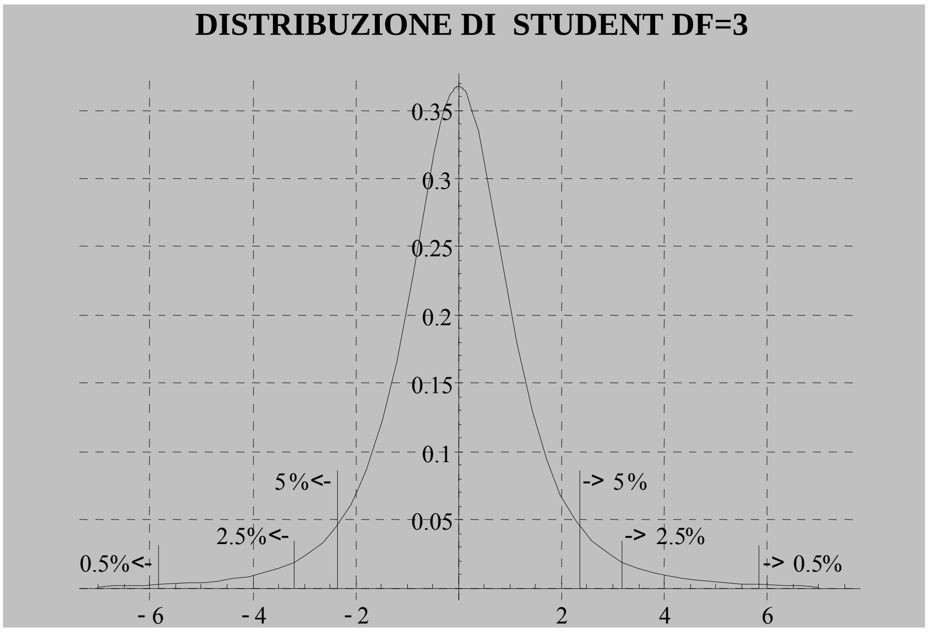
Si costruisca la variabile di Student : $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}}$ che ha DF = n-1 gradi di liberta'.

La probabilta' W_{DF} che $\bar{x}$ si discosti da μ meno di ($t_c \bullet S_{\bar{x}}$),e che la variabile t cada nell'intervallo

$-t_c \le \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}} \le t_c$ vale: $P[\,|\bar{x} - \mu| \le t_c\, S_{\bar{x}}\,] = W_{DF}(t_c) = \int_{-t_c}^{t_c} f_{DF}(t)dt = 1-\alpha$.

Si supponga σ incognita, si vuole stimare il valore della grandezza μ mediante $\bar{x}$. Si stimano dal campione S_x e $S_{\bar{x}}$ e il risultato della misura e' fornito da $X = \bar{x} \pm S_{\bar{x}}$.
Cosa si puo' dire circa il valore della grandezza μ?

Si e' confidenti , con probabilita' $W_{DF}(1) = \int_{-1}^{1} f_{DF}(t)dt$, che l'intervallo ($\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$) contenga il valore vero μ.



L'area compresa tra le linee verticali corrisponde a :$W_{DF=3}$ =90%, $W_{DF=3}$ =95%, $W_{DF=3}$ =99%

Nota: I valori critici di t per diversi DF e livelli di fiducia α sono riportati in apposite tabelle.

Esempi

- Siano {xi} = { 3.9, 4.5, 5.5, 6.1} valori di un campione di dati estratti da una popolazione normale con valore medio μ = 4.9. Si ottenga in una successiva misura un valore : 7.1. Esso appartiene alla stessa popolazione?.

La σ della popolazione e' incognita, la stimiamo con $S^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \mu)^2$. Il valore di S risulta:

S= 0.86.

Si valuta il valore di t osservato : $t_M = \frac{7.1 - 4.9}{0.86} = 2.7$. I gradi di liberta' sono DF= n-1 = 4 . Fissato il valore del livello di fiducia α : α=5%, il valore critico t_c risulta*:* t_c*= 2.77* . Il valore di $|t_M| < |t_c|$, e di conseguenza, al livello di fiducia del 5% non si ha motivo di dubitare che il valore x = 7.1 appartenga alla stessa popolazione.

- Si valuta l'IQ di N= 25 studenti , ottenendo : $\overline{IQ} = 128$ e $S_{IQ} = 15$.

  Si vogliono trovare, al livello di confidenza del W_{DF} =95% , i limiti dell'intervallo nel quale si presume cada il valore vero del IQ.

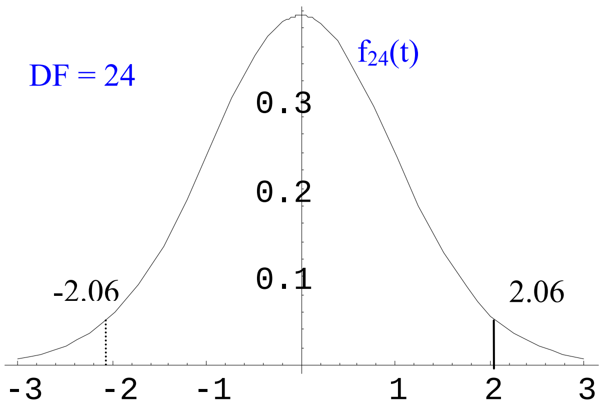
I gradi di liberta' sono DF = n-1 = 25 -1 =24, la deviazione standard empirica del valore medio e'

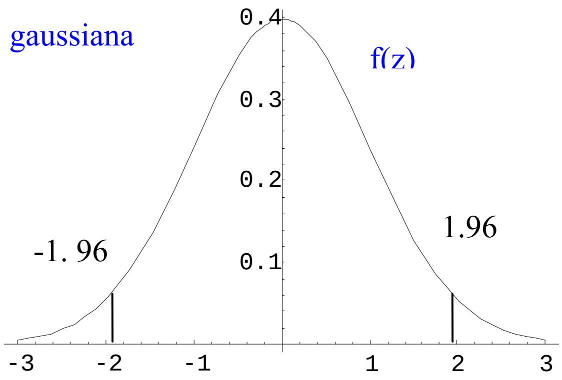
$S_{\overline{IQ}} = \frac{S_{IQ}}{\sqrt{N}} = \frac{15}{5} = 3$. Il valore di t vale: $t = \frac{IQ - 128}{\frac{S_{IQ}}{\sqrt{N}}} = \frac{IQ - 128}{3}$

Per un dato valore W_{DF} , il valore del limite superiore dell'intervallo t_c , puo' essere espresso nella forma $W_{DF}(t_c) = \int_{-t_c}^{t_c} f_{DF}(t)dt$ =1-α. Dalle tabelle, per α =5%, si ottiene un valore di t_c = 2.06

La probabilita'che la variabile t cada nell'intervallo [-2.06 , 2.06] vale :

$P[|IQ - \overline{IQ}| \leq 2.06 \cdot S_{\overline{IQ}}] = P[-t_c \leq t \leq t_c] = 95\%$.





Si e' pertanto confidenti , con probabilita' del 95%, che il valore vero di IQ cada nell'intervallo :
[128- 2.06·3; 128 + 2.06·3] = [121.8; 134.2]
Se si fosse assunta una distribuzione gaussiana , i valori critici sarebbero $z_c = \pm 1.96$, ed il corrispondente intervallo di confidenza sarebbe risultato minore in ampiezza: [122.1;132.9]

TEST di Student.

Come già evidenziato , nel caso dei test che fanno uso della distribuzione normale, è necessario avere dei test da eseguire sui valori misurati per verificare la natura della differenza fra due serie di misure affette da errori casuali.
Un caso frequente è quello in cui si hanno a disposizione due campioni di misure, e si vuole verificare l'ipotesi statistica che essi provengano da popolazioni aventi lo stesso valore medio, e appartengano quindi alla stessa popolazione: un caso particolare è quello dell'ipotesi che consiste nel ritenere i due campioni composti da misure della stessa grandezza fisica, e che le differenti stime siano prodotte come effetto della presenza in entrambi degli errori accidentali; errori che si assume seguano la legge normale(Caso della verifica della compatibilità di due valori misurati).
Un altro caso che si presenta di frequente è quello ove si vuole controllare se un determinato valore numerico, a priori attribuibile alla grandezza fisica in esame, sia o no confermato dai risultati della misura; cioè se quel valore sia o no compatibile coi risultati della misura, piu' precisamente , a che livello di probabilità (livello di fiducia) è con essi compatibile (Caso della verifica della compatibilità con un valore prefissato).
Un altro esempio consiste nel chiedersi se la somministrazione di un certo farmaco abbia effetto su qualche parametro clinico di una popolazione di individui.

La procedura di test si basa sull'assunzione , ipotesi nulla H_0, che per esempio non ci sia differenza tra i parametri (esempio: le medie) dei due campioni ad un certo livello di fiducia.. La validità del test presuppone che i campioni siano indipendenti , e provenienti da popolazioni normali. La soluzione di questo problemi si e' gia trattata , facendo uso della distribuzione normale, mediante il **test normale**, nel caso in cui fossero **note le varianze** delle popolazioni o nel caso che i campioni fossero costituiti da un numero di dati elevato : **grandi campioni**.
Cosa si può fare ne caso di campioni costituiti da un numero di dati esiguo(**piccoli campioni**) , tale da farci ritenere che non si possa ottenere da essi una buona stima delle **varianze , incognite**, delle popolazioni (sempre supposte normali)?

<u>**Test di Student** per il confronto tra un valore medio empirico ed medio teorico, noto a priori.</u>
Si desidera stabilire se il valore di una grandezza fisica, determinato tramite un piccolo campione di misure , sia compatibile, ad un certo livello di significatività, con un valore noto a priori.
Sia x una variabile casuale di valore medio μ_0 noto.
Si estragga un campione di n elementi [x1, x2, …, xn] .
Si stimino μ e σ_x^2 teorici mediante i valori empirici ottenuti dal campione:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$ e $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2$.

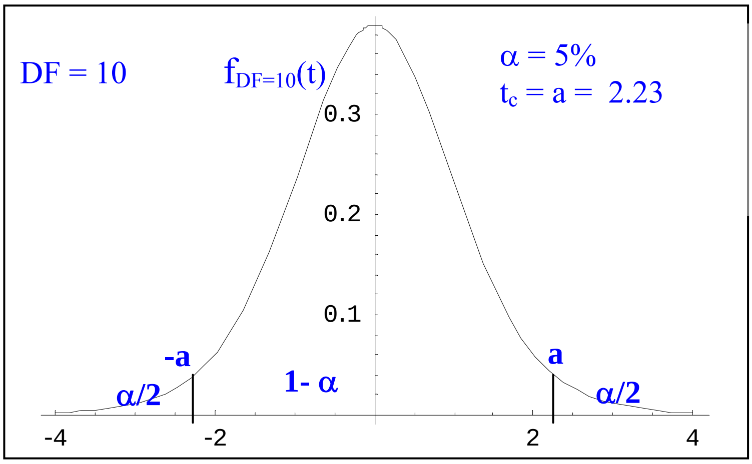
Ci si chiede se è possibile accettare come stima di μ il valore $\bar{x}$ trovato e con quale grado di fiducia; ci si chiede se la discrepanza | $\bar{x}$ - μ_0 | sia significativa o meno.
<u>Costruzione della variabile t per il test.</u>
La variabile:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_x}\sqrt{n}}{\frac{S_x}{\sigma_x}} = \frac{\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}}{\frac{S_x}{\sigma_x}} = \frac{z}{r}$$

risulta il rapporto tra una variabile casuale normale standardizzata con DF= 1 e una variabile r con DF = n -1 gradi di liberta’, ed e’ pertanto una variabile t con DF = n -1 gradi di liberta’.

Si calcola la statistica $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S_{\bar{x}}}$. I gradi di libertà sono DF = n -1.

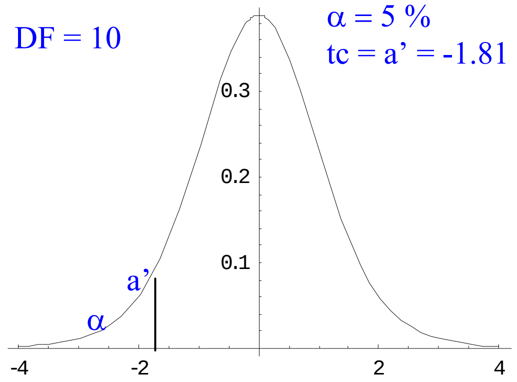
Si fissano l’ipotesi nulla $H_0 : \mu = \mu_0$ e $H1: \mu \neq \mu_0$
Si fissa il livello di fiducia α , dalle tabelle di t, con $DF = n\text{-}1$, si ricava il valore limite $t = a$.
In generale si prendono in considerazione delle deviazioni negative e positive da μ <u>(test a due code)</u>
Si usa la regione critica limitata dalle due bande, tale che $\int_{-\infty}^{-a} f_{DF}(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f_{DF}(t)dt = \alpha$.

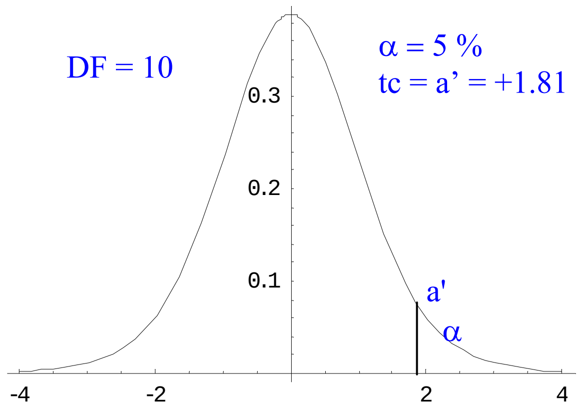


Se **|t| < a e P[|t $_{DF}$| ≥ | t_M|] > α,** allora t cade entro l’intervallo di accettazione dell’ipotesi, e si accetta l’ipotesi che $\bar{x}$, al livello di fiducia prescelto, stimi correttamente $\mu=\mu_0$. La discrepanza | $\bar{x} - \mu_0$| non e' significativa ma dovuta unicamente a fluttuazioni statistiche che dipendono dal campionamento.

Se **|*t*| > *a*** e ***P[* |*t* $_{DF}$| ≥| *t*$_M$|*]* < *α*,** allora t cade entro l'intervallo di rigetto dell'ipotesi e si rigetta H_0, al livello di fiducia prescelto.
La discrepanza non è giustificabile con le sole fluttuazioni statistiche.

Nel caso di deviazioni solo in un verso, si limita la regione critica solo ad una banda :
<u>test ad una coda.</u>





$\int_{-\infty}^{a'} f_{DF}(t)dt = \alpha$ $H_0 : \mu = \mu_0$; $H1: \mu < \mu_0$

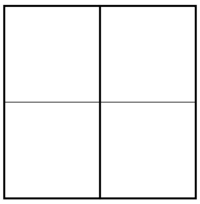
$\int_{a'}^{\infty} f_{DF}(t)dt = \alpha$ $H_0 : \mu = \mu_0$; $H1: \mu > \mu_0$

Se σ_x è nota, anziché usare la distribuzione di Student, si potrà usare il test normale:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Se σ_x non è nota , per grandi campioni (n > 30) *z* e *t* tendono ad approssimarsi e si può usare il test normale. All'aumentare di n la stima di σ mediante S empirica è sempre piu' corretta (per n= 30 : σ_s/s = 13%).
Per piccoli campioni si usa la distribuzione di Student che naturalmente è anche valida per grandi campioni.

Esempio.



Il dispositivo di lancio di un proiettile centra un bersaglio [x = 0; y = 0] in un piano ⊥ all'asse di tiro (x e y siano indipendenti).
Si vuole stabilire se esistano effetti sistematici nel sistema di mira del dispositivo.
Le coordinate xi di **10 lanci** siano :
[xi] = [2.2, -0.1, 1.0, 0.2, -1.5, -0.2, -0.3, 0.8, 0.6, -0.5]

Il valore medio lungo x dei lanci risulta $\bar{x} = \sum_{1}^{n} x_i = 0.22$;

La deviazione standard e la deviazione standard del valore medio

risultano: $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = 1,\ S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 0.33$

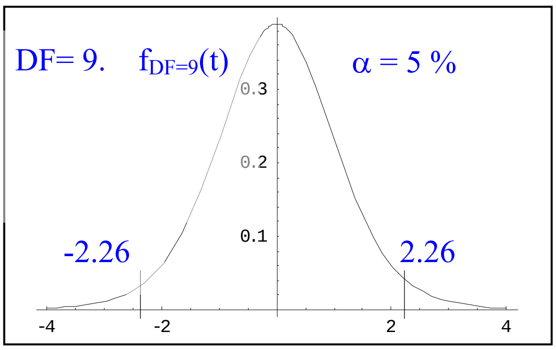
Nell'ipotesi nulla: H0 : $\mu x = \mu_0 = 0$; H1 : $\mu x \neq 0$,
e che la discrepanza |0.22 – 0 | sia casuale,

la variabile t risulta $t_M = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 0}{S_{\bar{x}}} = \frac{0.22 - 0}{0.33} = 0.66$.

I gradi di liberta' sono :DF = n -1 = 10 – 1 = 9 .
Fissato il livello di fiducia del test $\alpha = 5\%$, per un test a due code, il t critico risulta tc = 2.26.
Il valore | t_M| =|0.66| < 2.26 ; $P[|t_9| > 0.66] = 0.25$ (25 %)
L'effetto e' casuale, la discrepanza non e' significativa.
Se lo stesso risultato, $\bar{x} = 0.22$ e Sx = 1 , si fosse ottenuto con **n = 100 lanci**, si avrebbe

n = 100, Sx =1 , $S_{\bar{x}} = 0.1$, $t_M = \frac{\bar{x} - 0}{S_{\bar{x}}} = \frac{0.22 - 0}{0.1} = 2.2$, DF = 9 9

Per $\alpha = 5\%$ il valore di tc per un test a due code risulta tc = 1.96 .
Il valore | t_M| = |2.2| > 1.96 e la $P[|t_9| > 2.2] = 0.01$ (1 %).
Il valore è abbastanza piccolo per ritenere molto probabile, anche se non certo, un'effetto sistematico nel sistema di mira del dispositivo di lancio.



Test di Student per il confronto di valori medi
Si disponga di due piccoli campioni di misure della stessa grandezza che diano luogo a due diversi valori medi. Si desidera stabilire se la diversita' delle medie dei campioni sia imputabile unicamente a fluttuazioni casuali; in tal caso esse, e i due campioni, appartengono a popolazioni aventi lo stesso valore medio.
<u>Costruzione della variabile t di Student</u> <u>per il test</u>.
Siano dati due campioni indipendenti di grandezza $\mathbf{n_1, n_2}$ appartenenti a due popolazioni identiche con valori valori medi μ_1, μ_2 e varianze teoriche eguali: $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2 = \sigma^2$.

Siano $\overline{x_1} = \frac{1}{n_1}\sum_1^n x_{1i}$, $S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_1^{n_1}(x_{1_i} - \overline{x}_1)^2$,

$\overline{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_1^{n_2} x_{2i}$, $S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_1^{n}(x_{2_i} - \overline{x_2})^2$,

i valori medi empirici e le varianze empiriche relative ai due provini.

Il rapporto : $\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/\sigma^2} = \frac{W_1}{W_2} = F$ e' distribuito come una variabile di Fischer con (n_1 -1) e (n_2 -1) gradi di liberta', essendo il rapporto di due variabili W con DF = (n_1 -1) e DF= (n_2 -1) gradi di liberta'. **F** e' detta : rapporto di varianze, ed e' usata per verificare se $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$..

Inoltre la variabile $\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}$ e' una variabile $\chi 2$ con DF= ($(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$ gradi di liberta'.

Nel caso si possa ritenere che i campioni provengano da popolazioni con la stessa varianza, $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2 = \sigma^2$, si puo' dare una stima di tale varianza mediante la media pesata delle varianze dei due provini. Essa si puo' assumere la varianza comune ottenuta combinando i dati dei due provini e risulta:

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} .$$

Il rapporto : $\frac{S^2}{\sigma^2} = W$ e' distribuito come una variabile W con DF = (n_1+n_2-2) gradi di liberta'.

Il rapporto: $\frac{S}{\sigma} = r$ e' distribuito come una variabile r con DF = (n_1+n_2-2) gradi di liberta'.

La differenza [($\overline{x_1} - \overline{x}_2$) - ($\mu 1 - \mu 2$)] ha varianza data da : $\sigma^2_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$.

$$z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x}2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}}$$

e' una variabile distribuita come una variabile normale standardizzata.

La variabile $t = \frac{z}{s/\sigma}$ e' una variabile t di Student.

$$t=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_2})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2}}\frac{S}{\sigma}}=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_2})-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

E' una variabile t di Student con DF = $n_1 + n_2 - 2$ gradi di liberta'.

Se si suppone inoltre che i due provini provengano dalla stessa popolazione H_0: $\mu_1=\mu_2$,allora E[$\overline{x_1}-\overline{x_2}$] = 0, e la variabile costruita diventa:

$$t=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_2})-0}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} ,$$

una variabile t di Student con DF = $n_1 + n_2 - 2$ gradi di liberta'.

Si puo' controllare l'ipotesi nulla che i due campioni provengano dalla stessa popolazione (H_0: $\mu_1=\mu_2$) e che la discrepanza $|\overline{x_1}-\overline{x_2}|$ non sia significativa.
Se $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ rappresentano le medie di due serie di misure della stessa grandezza , che possono essere ottenute in condizioni identiche o anche leggermente diverse, si desidera stabilire se la discrepanza sperimentale $|\overline{x_1}-\overline{x_2}|$ sia significativa o no, ossia, se essa possa unicamente attribuirsi a **fluttuazioni casuali** dovute agli errori di misura (ipotesi H_0) **o** se essa indichi la **presenza di errori sistematici** palesi in una o in entrambe le serie di misurazioni.

Fissato α e noto DF, dalle tabelle si determina il valore critico t_c . Si indichi con t_M il valore di t ottenuto, se vale:
$|t_M| < |t_c|$ e P[$|t_{DF}| > |t_M|$] $\geq \alpha$ si Accetta l'ipotesi nulla.
Se vale:
$|t_M| > |t_c|$ e P[$|t_{DF}| > |t_M|$] $\leq \alpha$ si Rigetta l'ipotesi nulla.

Ci si aspetta che la distribuzione delle $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ sia normale. Il TLC lo sostiene, ma non sempre e' vero . Il test di Student lavora bene anche se le distribuzioni non sono perfettamente normali: si dice che e' un test " robusto".
Si richiede che $\boldsymbol{\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \sigma^2}$: test di Fisher per la verifica.
Se si dispone di grandi campioni,la distribuzione delle differenze delle medie ($\overline{x_1}-\overline{x_2}$) e' approssimativamente normale con media E[$\overline{x_1}-\overline{x_2}$] =($\mu 1 - \mu 2$) e $\sigma^2_{\overline{x}_1-\overline{x}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$, allora

$$z=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_2})-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Permette di sottoporre a test l'ipotesi H_0: $\mu 1 - \mu 2 = 0$.
Se non si conoscono $\sigma 1$ e $\sigma 2$ esse si possono stimare con S1 ed S2.
La variabile t e' esatta sia per piccoli (n < 30) che per grandi campioni.

La validita' del test richiede che i due campioni analizzati siano indipendenti e tratti da popolazioni distribuite normalmente ; poiche' tali popolazioni possono essere descritte in modo esauriente mediante i due parametri media e deviazione standard , le procedure sono definite " metodi statistici parametrici" o " test parametrici".

Il test e' impiegato per esempio per ;

- Controllo che nell'esecuzione di una serie di misurazioni le condizioni si siano mantenute costanti. E' sufficiente , per questo, che le due medie si riferiscano a due insieme di misure separate nel tempo(esempio: confronto tra la media di alcune misure iniziali e la media di alcune misure finali nel viscosimetro, o nella misura della velocita' del suono). Questo e' un caso particolare del problema generale di evidenziare un eventuale **effetto sistematico** connesso a due valori differenti di una grandezza fisica diversa da quella cui si riferiscono le due medie.
- Confronto tra serie di misure della stessa grandezza ottenute da osservatori diversi ($\bar{t}_1$ e $\bar{t}_2$ ottenute nel viscosimetro)
- Confronto tra serie di misure della stessa grandezza ottenute in due diverse prove ($\bar{t}_1$ e $\bar{t}_2$ 0 $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ ottenute nella misura della velocita' del suono ; Per Stirling: confronti tra i valori ottenuti con diverse forze frenanti di: $\overline{M}_1$ e $\overline{M}_2$ $\overline{P}_1$ e $\overline{P}_2$ $\overline{\eta}_1$ e $\overline{\eta}_2$)
- Confronto tra valori medi di misure della stessa grandezza ottenute da campioni differenti ($\bar{l}_1$ e $\bar{l}_2$ delle misure di lunghezze di oggetti ottenute da campioni differenti)
- Confronto tra un valore medio ed il valore nominale ($\bar{l}_1$ della misura di un campione di lunghezze con un valore nominale)
- Confronto tra campioni per stabilire se appartengono alla stessa popolazione.
- Valutare se la discrepanza tra le misure di una stessa grandezza e' significativa o no, valutare se le misure sono o no consistenti, valutare **se esistono errori sistematici**.
- Verifica di ipotesi nell'interpolazione lineare. (Controllo se un valore di b è compatibile con l'ipotesi B = 0. Controllo se due valori b1 e b2 sono compatibili tra loro B1 = B2.)

Esempio.
Due macchine trafilano del ferro dello stesso diametro.
Durante la giornata si eseguono 6 misurazioni di controllo del diametro dei trafilati
Si ottengono le misure riportate in tabella

i	1	2	3	4	5	6
M1: Φ1(cm)	0.117	0.139	0.122	0.139	0.132	
M2:Φ2(cm)	0.120	0.127	0.133	0.115	0.137	0.126

Si vuole stabilire dall'analisi dei due campioni di misure, se le macchine trafilano tondini che hanno diametri identici : $\mu_{\Phi 1} = \mu_{\Phi 2}$.
Si applica il test di Student.
I gradi di liberta' sono : DF = (5 -1) + (6 -1) = 9
I dati relativi alla machina 1 sono:

$$\overline{\Phi}_1 = \frac{1}{5}\sum_1^5 \Phi_{1i} = 0.128cm \qquad S_1^2 = \frac{1}{5-1}\sum_1^5 (\Phi_i - \overline{\Phi}_1)^2 = \frac{0.000298}{5-1} = 0.0000745 \ \text{cm}^2 \quad .$$

I dati relativi alla macchina 2 sono:

$$\overline{\Phi}_2 = \frac{1}{6}\sum_1^6 \Phi_{2i} = 0.126 \text{ cm} \qquad S_2^2 = \frac{1}{6-1}\sum_1^6 (\Phi_{2i} - \overline{\Phi}_2)^2 = \frac{0.000328}{6-1} = 0.0000654 \ .\text{cm}^2$$

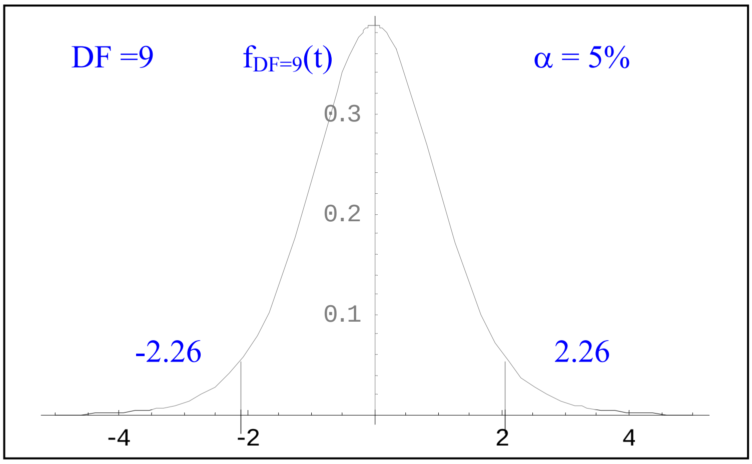
La stima della varianza comune ai due provini, nell'ipotesi che le varianze siano eguali, $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \sigma^2$,
risulta:

$$S^2 = \frac{(5-1)S_1^2 + (6-1)S_2^2}{5+6-2} = \frac{\sum_1^5 (\Phi_i - \overline{\Phi}_1)^2 + \sum_1^6 (\Phi_{2i} - \overline{\Phi}_2)^2}{5+6-2} = \frac{0.000298 + 0.000328}{5+6-2} = 0.00006956cm^2$$

La variabile t di Student risulta

$$t = \frac{|\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2| - 0}{S\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}} = \frac{0.02}{0.00505} = 0.396$$

Se si fa l'ipotesi che le due macchine trafilino identicamente e che le uniche differenze nei risultati siano dovute a fluttuazioni casuali si deve porre
$H_0 : \mu_{\Phi 1} = \mu_{\Phi 2}$.
Si delimita la regione di fiducia da entrambe le bande (test a due code) e si sceglie come limite di fiducia il 5 %. Allora l'intervallo di accettazione dell'ipotesi vale (-2.26 < t < +2.26)
Il valore di $t_M = 0.396$ cade entro la regione di accettazione. E' quindi ragionevole accettare l'ipotesi che le due macchine trafilino identicamente., cioe' al 5% di fiducia, non si puo' rigettare ragionevolmente l'ipotesi che le differenze siano dovute unicamente al caso.



Nell'esempio si vuole, inoltre, valutare l'ipotesi che $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$.
Si usa il **test di Fisher**.
Per la prima macchina: $S_1^2 = 0.0000745$; DF = 5 – 1 = 4
Per la seconda macchina : $S_2^2 = 0.0000654$;DF = 6 -1 = 5
Scelto F = $\frac{S_1^2}{S_2^2}$, DF = (4,5). Prefissato 5% come limite di fiducia il valore critico risulta; b = 5.2
Scelto F' = $\frac{S_2^2}{S_1^2}$, DF = (5,4) . Prefissato 5% come limite di fiducia il valore critico risulta; b' = 6.3
Se si sceglie una zona di fiducia, delimitata, per F, da b tale che P[F≥ b] = 5% e per F', da b' tale che P[F' ≥ b'] = 5% entrambi i casi conservano simultaneo significato agli effetti del test . infatti dato che, per accettare l'ipotesi, si deve avere F≤b e contemporaneamente F' ≤ b'il test di significativita' si basa su una regione critica che divide equamente la la parte alta e la parte bassa della distribuzione. Infatti dato che F' = 1/F, si ha F' = 1/F ≤ b'da cui F ≥ 1/b', e la regione di accettanza, per la significativita' della variabile F, e' data da 1/b' ≤ F≤ b .
La regione di accettazione per la F e' data da 1/b' ≤ F ≤ b; 0.16 ≤ F ≤ 5.2
Il valore calcolato di F vale F = 1.14 . esso cade entro la regione di accettanza dell'ipotesi .
E' quindi giustificato , al 10% come livello di fiducia, supporre $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$.

Test t utilizzato nel confronto delle medie empiriche di coppie di osservazioni. Dati appaiati.

Quando si vuole esaminare l'efficacia di un farmaco su di un unico campione di individui , si prende in considerazione la variazione di un parametro clinico dopo la somministrazione del farmaco. Quando si vuole esaminare l'efficienza di un congegno sulla resa di un unico campione di macchine o di apparecchiature si prende in considerazione la variazione della resa dopo l'applicazione del congegno.
La variabile aleatoria e' rappresentata in questo caso dalla variazione del parametro clinico in ciascun individuo, o dalla variazione della resa di ciascuna macchina.
Cosi' e' piu' facile discernere l'efficacia del farmaco poiche' non si introduce la maggiore variabilita' esistente tra individui appartenenti a due campioni indipendenti: uno trattato ed uno no; oppure, dipendendo la resa da molti parametri con la differenza si sonda meglio il contributo del dispositivo studiato.
Si studiano gli stessi campioni eguali prima e dopo un trattamento.
Si vuole studiare la differenza di due medie quando i campioni non sono indipendenti e le due varianze delle popolazioni non sono necessariamente eguali.

Si dispone di n coppie indipendenti di misurazioni (x1,y1) , (x2,y2), …, (xn,yn)
L'ipotesi da sottoporre a test e' che la differenza dei relativi valori valga un valore prefissato δ, cioe' $|\bar{x} - \bar{y}| = \delta$.
Si pone : di = xi – yi con i = 1,2,… , n,
di rappresenta la variabile casuale, e δ il valore medio atteso.

Si calcola il valore medio della differenza $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_1^n d_i$ e

la deviazione standard $S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}}$.

Si costruisce la variabile $t = \frac{\bar{d} - \delta}{\sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(d_i - d_{\bar{d}})^2}{n(n-1)}}}$, che e' una variabile t con DF = n-1 gradi di liberta'.

Se si vuole testare l'ipotesi $H_0 : \delta = \mu_d = 0$ (il farmaco non ha effetto; il congegno no ha effetto) contro l'ipotesi $H1 : \delta \neq 0$

$t = \frac{\bar{d} - 0}{\sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(d_i - d_{\bar{d}})^2}{n(n-1)}}}$, che e' una variabile t con DF = n-1 gradi di liberta'.

<u>Esempio</u>

Si voglia controllare l'effetto di un dispositivo che aumenta la resa dei motori e quindi il risparmio di carburante.
Si misura la resa dei motori (km/litro carburante) per un campione di 7 auto differenti, prima e dopo l'inserimento del dispositivo.

Auto	A	B	C	D	E	F	G
Km/litro senza dispositivo : y_i	29	30	42	34	37	45	32
Km/litro con dispositivo : x_i	36	26	46	36	40	51	35
Differenza : d_i	7	-4	4	2	3	6	3

Se si calcola il valore medio della resa di tutte le 7 auto prima dell'inserimento del dispositivo si ottiene $\bar{y} = (35.6 \pm 3.1) km / litro$ e dopo l'inserimento $\bar{x} = (38.6 \pm 2.3) km / litro$

La differenza $\bar{d} = |\bar{x} - \bar{y}| = 3$ non e' significativa , e' compresa ampiamente nelle fluttuazioni casuali delle due medie, data dalla somma in quadratura delle due varianze. I dati mostrano una grande variabilita' poiche' la resa delle auto dipende da molti parametri. Analizzando le differenze *di* delle rese fra coppie di valori di resa , prima e dopo l'inserimento del dispositivo, si riesce ad isolare meglio il contributo alla resa del dispositivo.
Se si analizzano quindi le differenze $d_i = (x_i - y_i)$ fra le coppie di valori (xi,yi) si ottengono

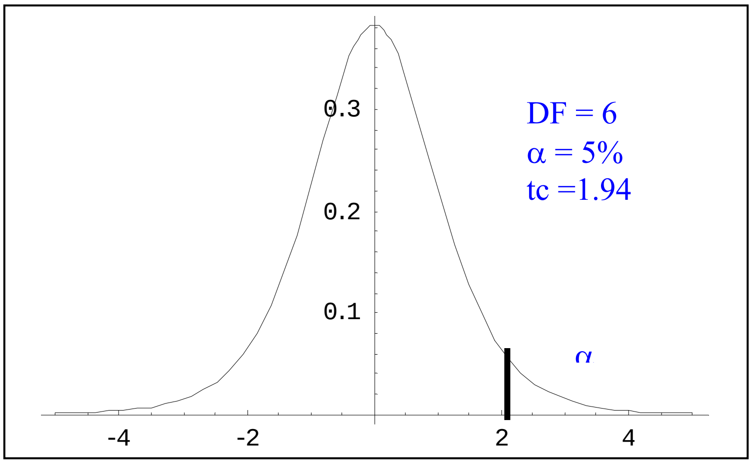
$$\bar{d} = \frac{1}{7}\sum_{1}^{7} d_i = \frac{1}{7}\sum_{1}^{7}(x_i - y_i) = 3 ,\ S_d = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{7}(d_i - \bar{d})^2}{(7-1)}} = 3.6 ,\ S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{7}(d_i - \bar{d})^2}{7(7-1)}} = \frac{3.6}{\sqrt{7}} = 1.3 .$$

Se si analizza la variabile t di Student si ottiene

$$t_M = \frac{\bar{d} - 0}{S_{\bar{d}}} = \frac{3}{1.3} = 2.3 .$$

I gradi di liberta' sono : DF = 7 – 1 = 6.
Si effettua il test ad una coda e si confrontano le due ipotesi
$H_0 : d = 0$ (non c'e' differenza nella resa) e $H_1 : d > 0$
Si vuole verificare se c'e un reale aumento di economia dopo l'inserimento del dispositivo e se le rese xi sono maggiori di quelle yi e quanto la differenza d e' maggiore di zero.
Si fissa il livello di fiducia α =5%, si valuta il valore critico tc per il test ad una coda che risulta essere tc = 1.94.
$t_M >$ tc; $P[\, t_{DF=6} > 2.3] < 5\ \%$

Al livello di significativita' del 5% , si scarta l'ipotesi H0 (non c'e' differenza nella resa) . La differenza e' significativa, non e' dovuta al caso . Il dispositiva aumenta la resa (d > 0) .



Verifica di ipotesi nell'interpolazione lineare

Date N coppie di valori (xi, yi ± σy) legati dalla relazione Y = a + b x, con il MMQ si ottengono i valori : a ± σ_a; b ±σ_b con:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_y^2 \sum_1^N x_i}{N\sum_1^n x_i^2 - (\sum_1^N x_i)^2} \ , \ \sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2 N}{N\sum_1^n x_i^2 - (\sum_1^N x_i)^2} .$$

E' richiesta la conoscenza dell'errore comune sulle ordinate: σ_y.

Se σ_y non e' noto viene stimato a posteriori mediante la relazione :

$$S_y^2 = \sum_1^N \frac{[y_i - (a+bx)]^2}{N-2} = \sum_1^N \frac{(\Delta y_i)^2}{N-2} ,$$

e le incertezze su a e b diventano:

$$S_a^2 = \frac{S_y^2 \sum_1^N x_i}{N\sum_1^N x_i^2 - (\sum_1^N x_i)^2} \ \text{ e } \ S_b^2 = \frac{S_y^2 N}{N\sum_1^N x_i^2 - (\sum_1^N x_i)^2} = \frac{S_y^2}{\sqrt{\sum_1^N (x_i - \bar{x})^2}} .$$

Assai di frequente e' necessario verificare delle ipotesi statistiche sui risultati dell'interpolazione lineare.

Vale la proprieta' : E[a + b x] = E[a] + x E[b] = A + B x.

I valori veri A e B sono stimati da a e b che si suppongono distribuiti normalmente, con varianze σ_a^2 e σ_b^2, attorno ai valori veri A e B. La varianza σ_y^2 si suppone nota.

Se si vuole confrontare il valore della stima ottenuta con un valore noto a priori ($H_0 : B = B_0$; $H_0 : A = A_0$) si possono costruire le variabili

$z = \dfrac{a - A_0}{\sigma_a}$ e $z = \dfrac{b - B_0}{\sigma_b}$, che nell'ipotesi H_0 seguono una distribuzione normale standardizzata. Cio' puo' essere utile per la verifica di H_0 nel caso di σ_y^2 nota.

Se σ_y^2 non e' nota, sostituendo σ_y^2 con S_y^2 si ottengono le variabili:

$t = \dfrac{a - A_0}{S_a}$ e $t = \dfrac{b - B_0}{S_b}$, che sono variabili che seguono la distribuzione di Student con D F = N – 2 gradi di liberta'.

Se ad un certo livello di fiducia α, i dati forniscono un valore | t_M| > | tc| l'ipotesi H_0 e'da rigettare.

Significativita' della differenza fra i coefficienti di due interpolazioni lineari.

Siano y1 = a1 + b1 x e y2 = a2 + b2 x determinate da due insiemi di dati con variabili comparabili.

Si puo' verificare l'ipotesi $H_0 : (B_1 - B_2) = \Delta$ (Δ prefissata)

o in particolare $H_0 : B_1 = B_2$ (Δ = 0); $H_0 : A_1 = A_2$.

Se le σ_{y1} e σ_{y2} sono note, le variabili

$$z = \frac{(a_1 - a_2) - \Delta}{\sigma_{a1-a2}} \quad \text{e} \quad z = \frac{(b_1 - b_2) - \Delta}{\sigma_{b1-b2}} \ \text{con} \ \sigma_{a1-a2} = \sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2} ,$$

sono normali standardizzate.

Se le σ_{y1} e σ_{y2} non sono note, esse vengono stimate da Sy_1 e Sy_2

$$S_{y1}^2 = \frac{\sum_1^{N1} (\Delta y_{1i})^2}{N_1 - 2}, \qquad S_{y2}^2 = \frac{\sum_1^{N2} (\Delta y_{2i})^2}{N_2 - 2} .$$

Nell'ipotesi :$\sigma^2_{y1} = \sigma^2_{y2} = \sigma^2_y$ la varianza comune σ^2_y puo' venire stimata dalla

$$S_y^2 = \frac{(N1-2)S_{y1}^2 + (N2-2)S_{y2}^2}{N1+N2-4}$$

La deviazione standard della differenza b1-b2 e' stimata dalla :

$$S_{b1-b2}^2 = S_{b1}^2 + S_{b2}^2 \quad \text{con } S_{b1}^2 = \frac{S_y^2}{\sqrt{\sum_1^{N1}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}} \text{ e } S_{b2}^2 = \frac{S_y^2}{\sqrt{\sum_1^{N1}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}}.$$

Per verificare l'ipotesi H_0 si costruisce la variabile t ;

$t = \frac{(b_1 - b_2) - \Delta}{S_{b1-b2}}$ che segue una distribuzione di Student con DF = $N_1+N_2 - 4$ gradi di liberta'.

Si rigetta l'ipotesi H_0 al livello di fiducia α se $|t_{DF}| > t$ critico.

USO DI MATHEMATICA PER LA DISTRIBUZIONE DI STUDENT *(by OLAVE J.)*

```
<<Statistics`NormalDistribution`
```

Rappresentazione simbolica della distribuzione di student con 3 gradi di libertà.

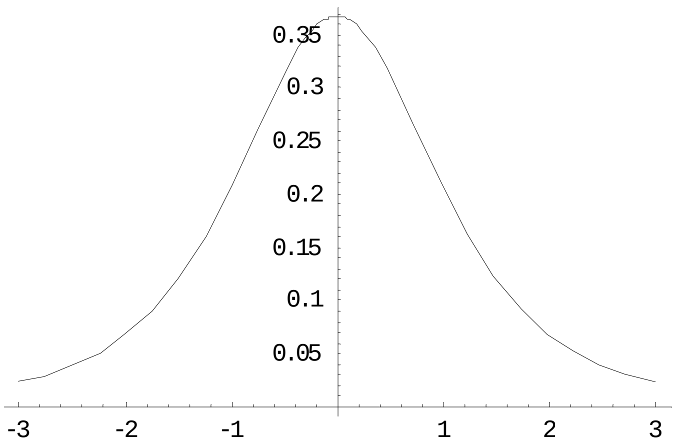
```
Sdist = StudentTDistribution[3]
StudentTDistribution[3]
```

Il comando PDF (Probability Density Function) genera la funzione della distribuzione di Student relativa a 3 gradi di libertà:

```
pdf = PDF[Sdist, x]
```

Rappresentazione grafica della funzione pdf

```
Plot[pdf,{x, -3, 3}]
```




```
Graphics
```

Esempio di calcolo di probabilità di avere valori minori di -2

```
CDF[Sdist, -2]
```

$$\frac{1}{2}\,\text{BetaRegularized}\,\frac{3}{7},\,\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}$$

```
N[CDF[Sdist,-2]]
0.069663
```

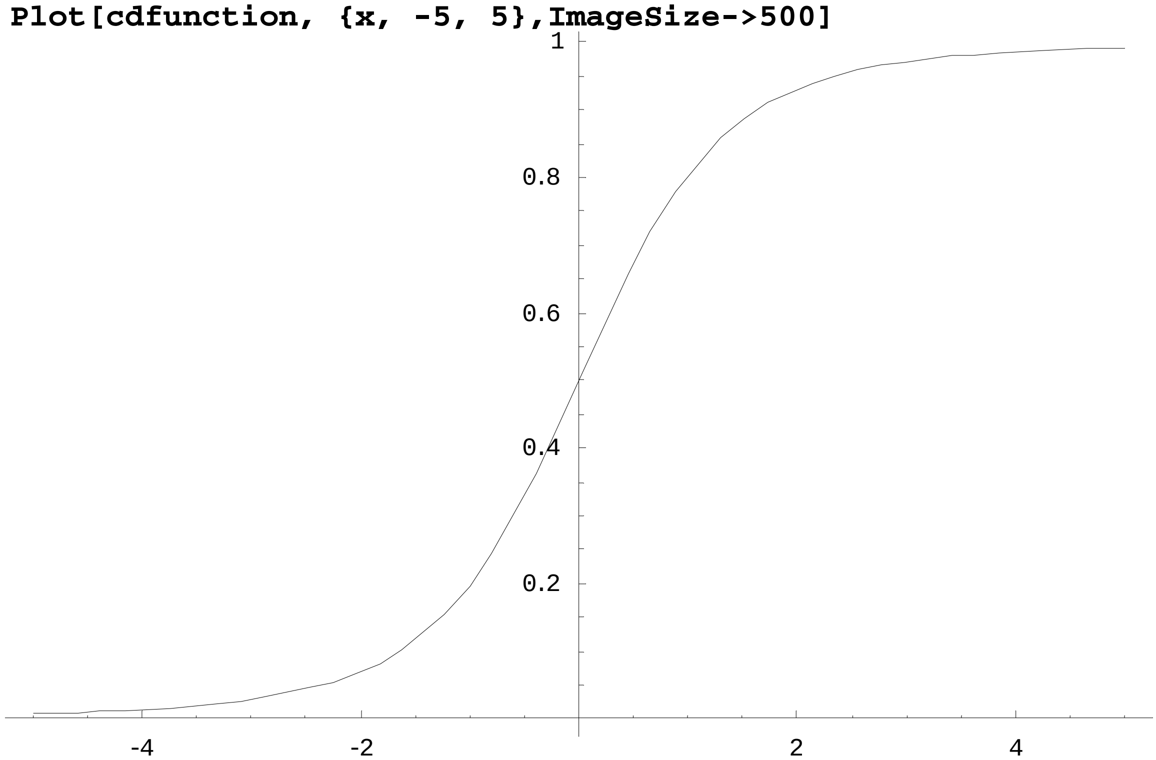
Per calcolare i valori relativi ai valori critici definiamo la funzione comulativa come segue:

```
cdfunction = CDF[Sdist, x]
```

$$\frac{1}{2}\;1+\text{BetaRegularized}\,\frac{3}{3+x^2},\,1,\,\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}\;\;\text{Sign}x$$

Graficamente la funzione comulativa ha il seguente andamento:

```
Plot[cdfunction, {x, -5, 5},ImageSize->500]
```




```
-Graphics-
```

Data la funzione comulativa è possibile ricavare il valore critico per 1 %

```
FindRoot[cdfunction-0.005==0,{x,2,-2}]  (* Si impone 0.005 perchè tale valore corrisponde a ciascuna coda *)
{x->-5.84091}
a=%[[1]][[2]]
-5.84091
```

Verifichiamo che questo è il valore critico relativo all'intervallo di confidenza del 1%:

$$\int_{-\infty}^{a} pdf dx + \int_{-\infty}^{a} pdf dx$$

0.01

Data la funzione comulativa è possibile ricavare il valore critico per 5 %

```
 FindRoot[cdfunction-0.025□0,{x,2,-2}]  (* Si impone 0.025 perchè
tale valore corrisponde a ciascuna coda *)
 {x→-3.18245}
 a=%[[1]][[2]]
 -3.18245
```

Verifichiamo che questo è il valore critico relativo all'intervallo di confidenza del 5%:

$$\int_{-\infty}^{a} pdf dx + \int_{-\infty}^{a} pdf dx$$

```
 0.05
```

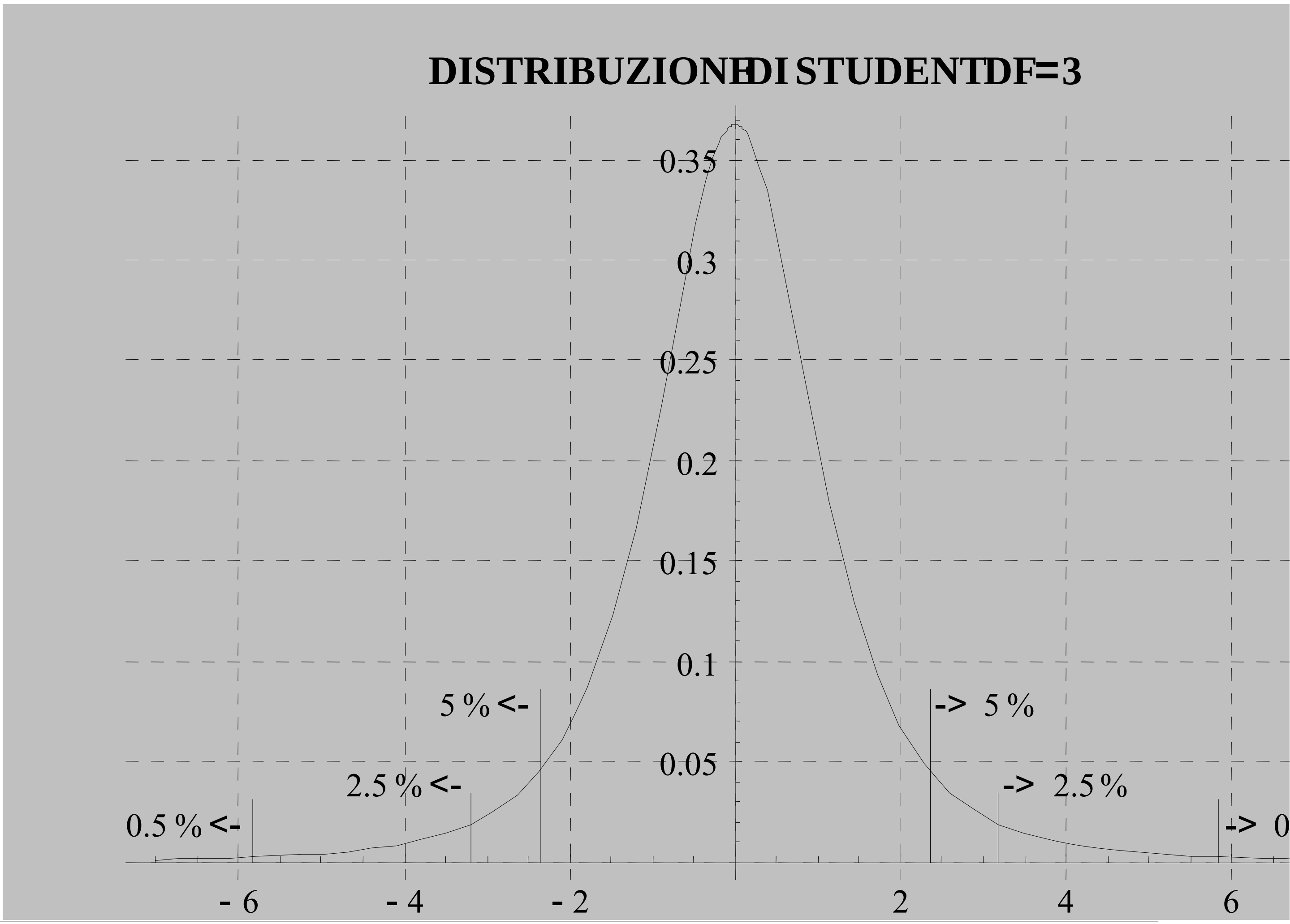
Data la funzione comulativa è possibile ricavare il valore critico per 10 %

```
 FindRoot[cdfunction-0.05□0,{x,2,-2}]  (* Si impone 0.05 perchè
tale valore corrisponde a ciascuna coda *)
 {x→-2.35336}
 a=%[[1]][[2]]
 -2.35336
```

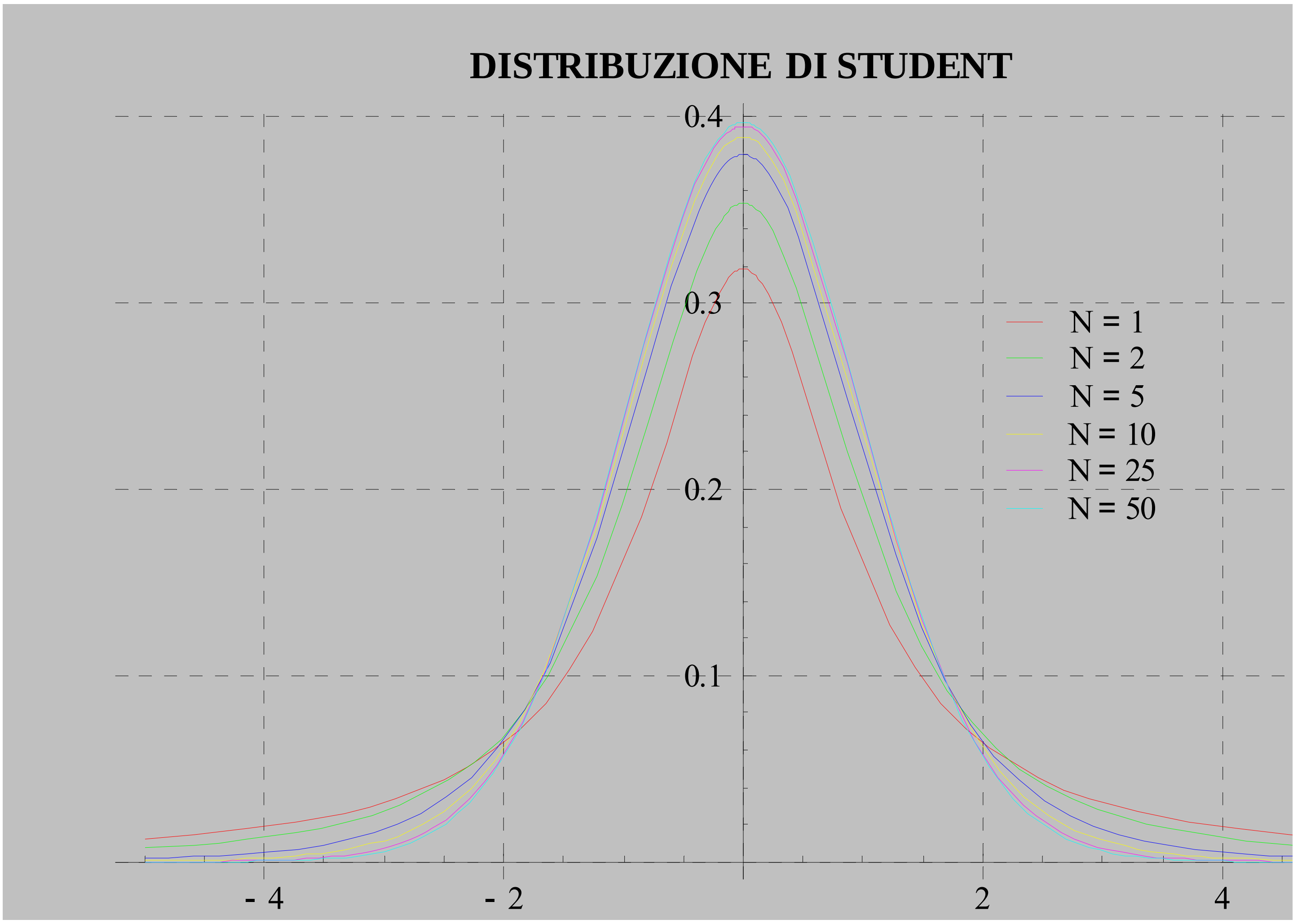
Verifichiamo che questo è il valore critico relativo all'intervallo di confidenza del 10%:

$$\int_{-\infty}^{a} pdf dx + \int_{-\infty}^{a} pdf dx$$

```
 0.1
```



Si riporta un grafico che rappresenta la distribuzione al variare dei gradi di libertà N


DISTRIBUZIONE DI STUDENT
0.4
0.3
0.2
0.1
- 4
- 2
2
4
N = 1
N = 2
N = 5
N = 10
N = 25
N = 50