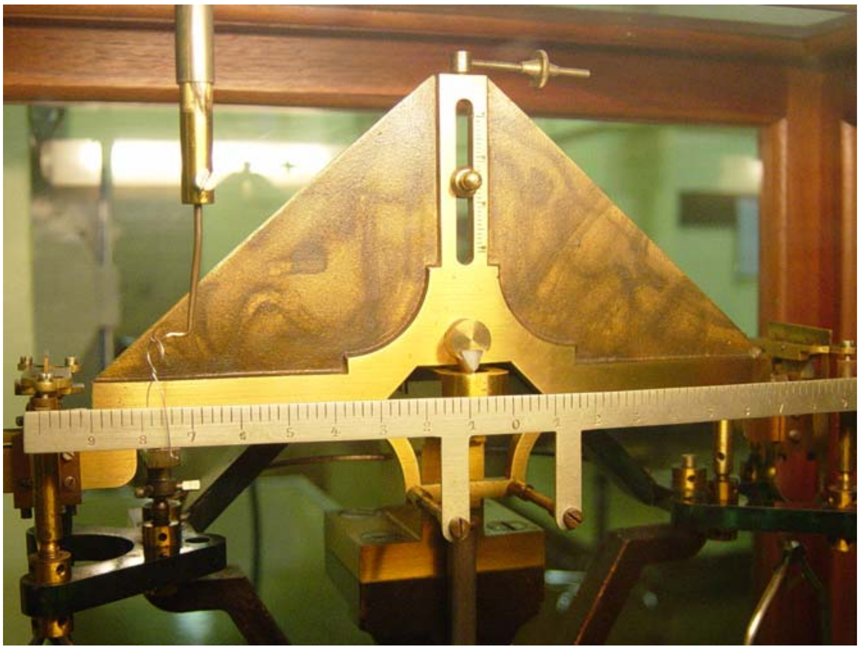
Misura di masse mediante l’uso di una bilancia analitica.


Bilancia in uso presso il laboratorio


Particolari: cavalierino e scala; fulcro; attacchi dei piattelli

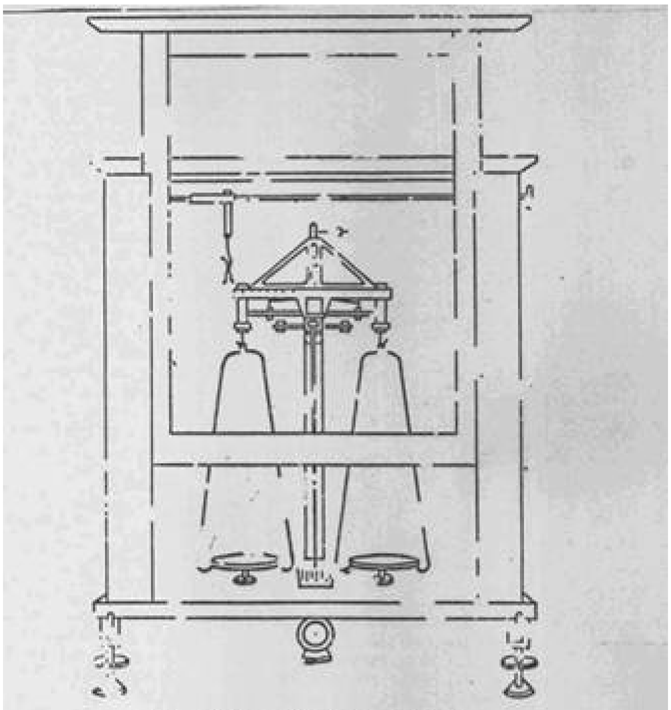


Fig. 2/1 - Bilancia analitica.

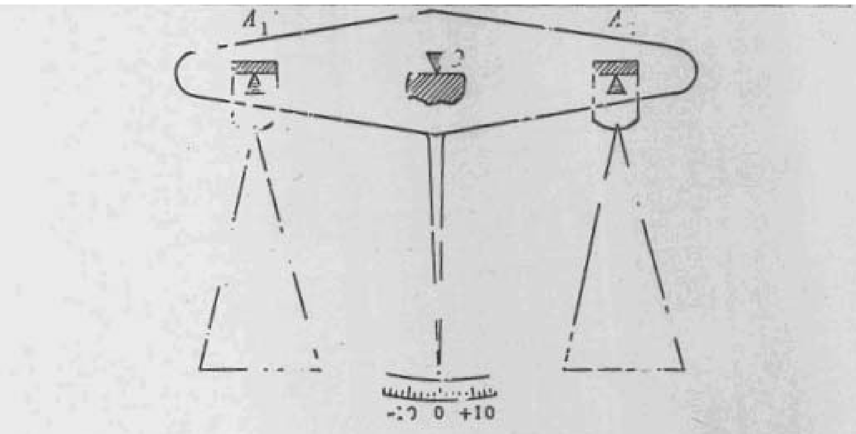


Fig. 2,2/2 - Schematizzazione della bilancia con l'indice scorrente sulla scala graduata.

Fig 1 e 2

Misura di massa.

L'intervallo di misure di massa che sono state eseguite fino ad ora si estende per almeno 60 ordini di grandezze, poiché si va dalla massa dell'elettrone pari a 9,109534 $^{10-31}$ kg a quella del sole pari a 2 10^{30} kg. Esiste una varietà molto grande di bilance , cioè di strumenti per ottenere misure dirette di massa, a seconda dell'uso che se ne deve fare; tuttavia qui ci si occuperà solo di un tipo frequentemente usato in laboratorio.

Principio di funzionamento di una bilancia di precisione.

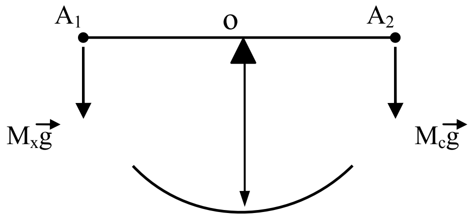


Fig 3: schema del principio di funzionamento di una bilancia analitica

Si tratta di uno strumento che consente il confronto diretto tra la massa incognita di un corpo e masse campione. In linea di principio tale confronto potrebbe essere realizzato sospendendo il corpo in misura all'estremità A1 di una sbarra rigida, e all'altra estremità, A2, le masse campione (figura). La sbarra rigida, detta giogo, è libera di ruotare intorno ad un asse orizzontale O detto fulcro.
Se sulle masse agisce la forza di gravità , M ***g,*** se la massa del giogo e' trascurabile rispetto alle altre, se non sono presenti forze di attrito apprezzabili, le forze agenti sono solo le forze peso sulle masse in A1 e A2 e la reazione vincolare del fulcro. Quest'ultimo e' assunto come polo a cui riferire i momenti delle forze. La condizione di equilibrio soddisfa allora la relazione:
$Mx\ g\ A_1O - Mc\ g\ A_2O = 0$ da cui $Mx = (A_1O/A_2O)\ Mc$
Questa semplice relazione, se Mx e' la massa incognita ed Mc e' quella campione, fornisce il confronto voluto che e' indipendente da g (supposto g abbia lo stesso valore in A_1 e A_2).
La massa m del corpo è una costante: ha lo stesso valore in qualsiasi luogo, mentre la forza peso dipende da g . I campioni della pesiera , interpretati come campioni di forza peso, risultano esatti solamente nei luoghi ove g ha il valore per il quale furono tarati. Interpretati come campioni di massa sono esatti dappertutto. La bilancia serve quindi per misurare le masse dei corpi. I pesi vengono misurati col dinamometro.
La bilancia (figura 1)è contenuta in una custodia provvista di sportello per protezione, per evitare correnti d'aria che turbano l'equilibrio e per assicurare una migliore costanza di temperatura fra le varie parti. La bilancia appoggia su di un piano orizzontale mediante tre viti calanti con le quali si esegue il livellamento controllabile col filo a piombo annesso. Al giogo, A1 e A2 (figura 2)sono fissati tre coltelli, generalmente di acciaio, con gli spigoli netti e paralleli fra di loro, rotanti su appoggi piani di agata. Quello in O e' il fulcro del gioco. Quelli in A1 e A2 sostengono delle staffe alle quali sono attaccati i piatti della bilancia mediante sospensioni che consentono rotazioni in modo che le verticali condotte per i baricentri dei carichi passino sempre per gli spigoli dei coltelli. Un indice solidale col giogo ne indica la posizione scorrendo sopra una scala che di solito è divisa in 20 divisioni, con lo 0 al centro. Il cavalierino di Berzelius, che può essere spostato su di una scala graduata, solidale col giogo, mediante una manopola esterna , e' costituito da un filo di alluminio da 10 mg piegato a forcella. Esso ha la funzione di ottenere la determinazione di masse inferiori a 10 mg . Quando esso viene depositato in posizione (+ 4) o (– 4)della scala graduata, divisa in 20 tacche con lo 0 al centro, esso equivale ad una massa campione di 4 mg sul piatto destro, o sinistro. La massiera comprende campioni di masse nell'intervallo : 10- 200 mg . Una manopola girevole comanda un dispositivo che permette di bloccare il giogo e i piatti, staccando i coltelli dal piano di appoggio. Le manovre di caricamento e scaricamento delle masse vanno eseguite a bilancia bloccata.

Determinazione della Posizione di equilibrio.

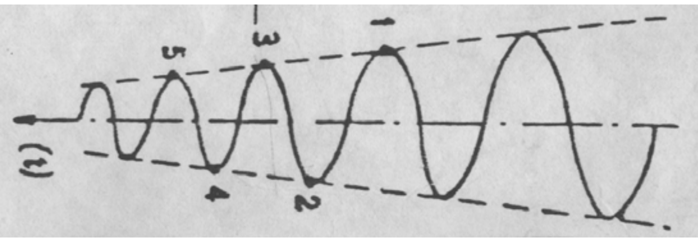


Fig 4: determinazione della posizione di equilibrio effettuata con la bilancia in moto.

Si voglia equilibrare una massa su di un piattello con i campioni della massiera posti sull'altro. La ricerca dei campioni della massiera avviene per successivi tentativi nei quali i pezzi si devono scegliere procedendo ordinatamente dai maggiori ai minori senza saltarne nessuno, fino a che, sbloccando la bilancia, le oscillazioni dell'indice sono contenute entro la scala. Per raggiungere la posizione di zero, si continua con le masse più piccole, o con il cavalierino per masse inferiori a 10 mg . Quando la bilancia e' equilibrata e la si sblocca le oscillazioni debbono smorzarsi lentamente e regolarmente.
La lettura della posizione dell'indice all'equilibrio si fa mentre la bilancia e' in moto. Infatti la ricerca della posizione di equilibrio e' influenzata dagli attriti. Nel momento in cui l'indice si arresta in corrispondenza di un'elongazione massima intervengono attriti statici che, per un elongazione sufficientemente piccola e quindi per un momento di richiamo sufficientemente piccolo, potrebbe bloccare la bilancia in una posizione diversa da quella di equilibrio quale si troverebbe in assenza di tali attriti. Per ridurre tale effetto, ovviamente casuale, si deve leggere la posizione dell'indice in corrispondenza a 5 elongazioni massime consecutive. Tale procedimento evita inoltre perdite di tempo nell'attendere l'arresto dell'indice.
Dopo qualche oscillazione della bilancia appena sbloccata, si leggono le posizioni di escursioni massima dell'indice eseguendo le letture per un numero dispari di posizioni da una parte e un numero pari dall'altra, e poi si fa la media aritmetica fra le medie delle due serie.
Esempio: siano letti 5 massimi x1,x3,x5 a sinistra(assunte negative) e x2, x4 a destra (assunte positive); la posizione di equilibrio:
$X_{eq} = \frac{1}{2}[\ 1/3(x1 + x2 + x3) + \frac{1}{2}(x2 + x4)]$ divisioni
Es: x1=-5,x2=3, x3=-4.5,x4=2.5,x5=-4. $X_{eq} = \frac{1}{2}[1/3(-5 - 4.5 - 4.0) + \frac{1}{2}(3.0 + 2.5)] = -0.8$ div
Come unità di misura della posizione Xeq si assume l'ampiezza della divisione della scala graduata che chiamiamo **divisione.** Essa rappresenta anche l'errore di sensibilità di lettura della scala:
($\delta x = 1$ div). La lettura di frazioni di divisione della scala non va fatta perchè induce a letture fuori della sensibilità dello strumento. Si tollerano al più le letture della mezza divisione: in tale caso ($\delta x = 0.5$ div).
L'errore della posizione di equilibrio può essere calcolata con la formula di propagazione dell'errore su $X_{eq,}$ assumendo come errore su ogni lettura X_i l'errore di sensibilità.
$\sigma_{Xeq} = \sqrt{(\sum(\partial X_{eq}/\partial X_i)^2}$; i = 1,5
Nell'esempio $\sigma_{Xeq} = 0.3$div.Il risultato della posizione di equilibrio si indica: $X_{eq} = (\ -0.8 \pm 0.3)$ div

Da cosa dipende la posizione di equilibrio
Condizioni di equilibrio

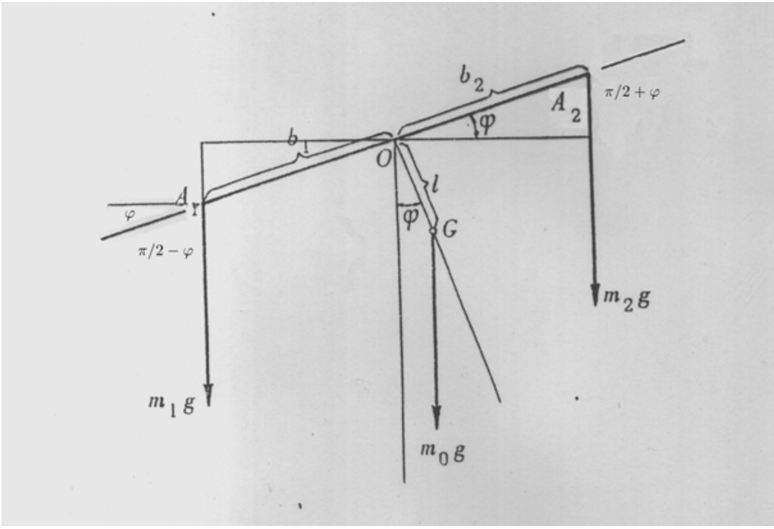


Fig5: condizioni di equilibrio

Il Giogo della bilancia e' un solido girevole ruotante attorno ad un asse passante per il fulcro O. Supponiamo che tale asse sia ⊥ al foglio.
Indichiamo con G il baricentro del giogo: OG = l
Indichiamo con $OA_1 = b_1$; $OA_2=b_2$ le lunghezze dei bracci. A_1, O, A_2 sono allineati. OG ⊥ A_1A_2
m_1g e m_2g indicano le forze peso applicate agli spigoli dei coltelli A_1 ed A_2.
L'insieme di tutte le forze peso delle masse costituenti il giogo e' equivalente al peso totale del giogo m_0g applicato in G
La condizione di equilibrio comporta che la somma dei momenti delle forze agenti sul giogo calcolati rispetto ad O sia nulla ; $\sum \boldsymbol{M_i} =0$
La posizione di equilibrio e' determinata dall'angolo φ che l'indice OG forma con la verticale ed e' determinata dall'equazione $\sum \boldsymbol{M_i} =0$.
I momenti $\boldsymbol{M_i}$ delle forze hanno direzione ⊥ al foglio e verso (individuato per esempio dalla regola della mano destra) che può essere entrante (-) o uscente (+). Riferendoci alle condizioni di fig. 5, scriviamo quindi la condizione di equilibrio tra i moduli dei momenti:
$(m_1g)\ (b_1)\ |\sin(\pi/2 - \varphi)| - (m_0g)\ (l)\ |sen\ \varphi| - (m_2g)(b_2)|\sin(\pi/2 +\varphi)|= 0$
$(m_1g)\ (b_1)\ \cos\varphi - (m_0g)\ (l)\ |sen\varphi| - (m_2g)(b_2)\cos\varphi = 0$
Se φ e' inferiore a ≈10° valgono le approssimazioni : cosφ ≈ 1; sin φ ≈ φ
$m_1\ b_1 - m_0\ l\ \varphi - m_2\ b_2 = 0 \rightarrow m_0 l\varphi = m_1b_1 - m_2\ b_2$
$\boldsymbol{\varphi =(m_1b_1 - m_2b_2)/(m_0\ l)}$
Se $b_1 = b_2$ e $m_1 = m_2$ → φ =0 indice verticale
Le relazioni scritte sono valide nel **vuoto.** Non si e' tenuto conto della **spinta di Archimede** agente su tutti i corpi immersi in aria. Ciò introduce un errore sistematico che vedremo come correggere.

Sensibilità della bilancia e sua determinazione

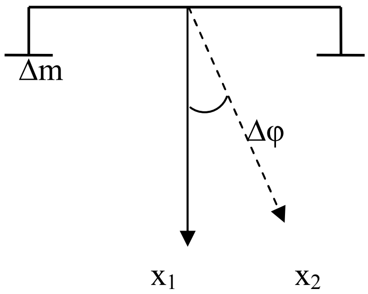


Fig6: determinazione della sensibilità della bilancia

Diamo una definizione di Sensibilità che dipenda dalle caratteristiche della bilancia e non dal modo di osservazione.
Supposta la bilancia in equilibrio aggiungiamo una massa Δm su di un piatto, essa produrrà una rotazione del giogo $\Delta\varphi$.
La ***sensibilità*** e' definita come *:* $S = \Delta\varphi / \Delta m$ [rad/mg]
È più pratico osservare il numero di divisioni Δx:
$S = \Delta X / \Delta m$ [div/mg]
Si usa anche l'inverso ε:
$\varepsilon = 1/S = \Delta m / \Delta X$ [mg / div]
Esempio. **S=2** :rappresenta il numero di divisioni (***ΔX=2div)*** di cui si sposta l'indice quando si varia di ***Δm*** = 1 mg la massa su di un piattello della bilancia.
ε = 0.5 :rappresenta la massa (***Δm= 0.5 mg)*** che occorre aggiungere per produrre uno spostamento dell'indice ***ΔX*** pari ad 1 div.
La ***determinazione di S*** si effettua nel seguente modo:
Supponiamo che sotto un certo carico la bilancia sia in equilibrio nella posizione X1. Spostiamo il cavalierino di un tratto corrispondente a (Δm = 3-4 mg) sul piatto sinistro o sul piatto destro.
Si raggiungerà una nuova posizione di equilibrio X2.
Sia $\Delta X = |X1 - X2|$ div . I valori di S ed ε (sensibilità a sinistra S_s o a destra S_d)saranno:
$S = \Delta X / \Delta m$ [div/mg]
$\varepsilon = 1/S = \Delta X / \Delta m$ [mg / div]
Es: $\Delta m = 3$ mg ; $\Delta x = |X1 - X2| = 6$ div → $\varepsilon = 1/S = (3 \text{ mg})/(6 \text{ div}) = 0.5$ [mg/div]
L'errore su ε può essere valutato per es: $\sigma\varepsilon/ \varepsilon = \sqrt{[(\sigma\Delta x/\Delta x)^2 + (\sigma\Delta m/\Delta m)^2]}$.
Se l'errore su Δm e' trascurabile allora : $\sigma\varepsilon/ \varepsilon = (\sigma\Delta x/\Delta x)$.
L'errore su $\Delta x = | X1 - X2|$ vale :$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{(\sigma^2_{X1} + \sigma^2_{X2})}$
- La conoscenza del valore della sensibilità e' utile se si deve riequilibrare la bilancia in una ben definita posizione $X\alpha$.

Si sia già raggiunta ad es. una posizione X_β vicina ad X_α di 2-3 div. Sia $\Delta x=|X_\beta - X_\alpha|$. La massa Δm che aggiunta o tolta porterebbe alla posizione di equilibrio X_α si può calcolare senza ulteriori tentativi di equilibramento e vale :
$\Delta m = \varepsilon \, | X_\beta - X_\alpha| = \varepsilon \, \Delta x$
Esempio: se $\varepsilon = 0.5$ [mg/div]; se $\Delta x = 3.0$ div allora $\Delta m = (0.5 \text{ mg/div})(3.0 \text{ div}) = 1.5$ mg
-La suddivisione della scala viene scelta dal costruttore in modo che l'errore di sensibilità risulti adeguato alla precisione dello strumento. Supponiamo sia δx l'errore di sensibilità di lettura (es: 0.5 div)
Ricordando, dalla definizione di sensibilità, che: $\mathbf{\Delta m = \Delta x/S = \varepsilon \, \Delta x}$, l'errore su M_x in una singola determinazione di equilibrio si può assumere : $\mathbf{\delta_{Mx} = \delta x/S = \varepsilon \, \delta x}$

Se δx =1div $\rightarrow \delta M_x = \varepsilon\ (\delta x) = \varepsilon$ [mg]; se δx = 0.5 div $\rightarrow \delta M_x = 0.5\ \varepsilon$ [mg]
Trascurando eventuali errori sistematici sulle masse campione M_c, all'equilibrio M_x sarà determinata con una incertezza : **($M_x \pm \delta M_x$)**

Misura della curva di sensibilità della bilancia in funzione del carico

Si dispone di due massiere.
1) Si pone su un piatto della bilancia una massa campione M_c e sull'altro piatto una massa campione eguale; si cerca la posizione di equilibrio: X_{eq1}
2) Si sposta il cavalierino di Berzelius di 3-4 divisioni rispetto alla posizione in cui esso si trova in 1); sia Δm la massa corrispondente alla nuova posizione del cavalierino.
Si ricerca la posizione di equilibrio: X_{eq2}
La sensibilità della bilancia caricata con la massa M_c vale : $\varepsilon\ (M_c) = \Delta m\ /\ |X_{eq2-}\ X_{eq1}|$
3) Partendo da piatti scarichi (Mc= 0), variare M_c e ripetere la prova con masse M_c di valore sempre crescente spostando una volta il cavalierino verso destra ed un'altra volta verso sinistra. Si ottengono due serie di dati (ε_d ; ε_s) e la sensibilità (andamento in funzione del carico) e' data dalla media dei valori ottenuti a destra e sinistra.
4) Riportare su un grafico i valori di sensibilità in funzione del carico $\varepsilon(M_c)$ con i propri errori $\pm\sigma_{\varepsilon i.}$
Studiare l'andamento: **la sensibilità dipende dal carico ?**.
Con il metodo dei minimi quadrati si trova la retta che meglio interpola i dati (M_{ci}, $\varepsilon_i \pm \sigma_{\varepsilon i}$):
ε = a + b m ; si ricavano gli errori sui parametri σ_a e σ_b .Tale retta rappresenta la curva di sensibilità.
- Per verificare se la sensibilità dipende dal carico si può calcolare il coefficiente di correlazione lineare ρ sulle coppie di valori (M_{ci},ε_i); oppure con un ***test normale*** verificare se $b \pm \sigma_b$ e' compatibile con lo 0.

Studio della Dipendenza della sensibilità dal carico.

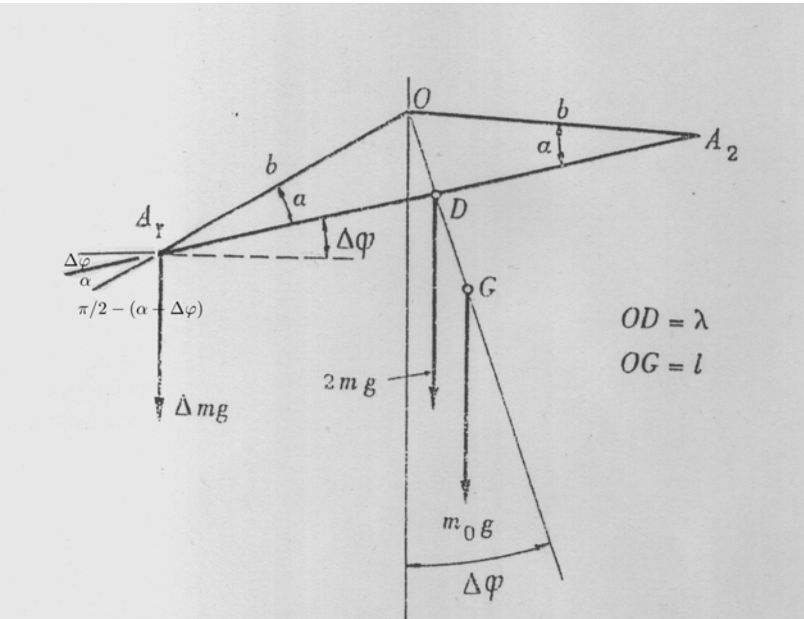


Fig 7

In figura e' schematizzata la bilancia**.**
Si assume che la lunghezza dei due bracci sia eguale:OA1 = OA2 = b
Sia G il baricentro del giogo. In G, a distanza l =OG dal fulcro O, e' applicata la forza peso (m_0 g) del giogo.
La congiungente A1A2 non passa per il fulcro O ed e' $\perp$ ad OG intersecandola sotto O in D.
Sia OD = λ. **λ >0** se D sotto O; λ< 0 se D sopra O.
La massa di ciascuno dei due piatti vale ***m.***
Le due forze eguali di intensità applicate agli spigoli dei coltelli in A1 ed A2 possono essere sostituite da una unica forza di intensità ***2 m g*** applicata in D.
Se α e' piccola e se A1 ed A2 sono egualmente caricati, il giogo e' in equilibrio con A1A2 orizzontale ed OG verticale.
Aggiungendo un ***Δm*** di sovraccarico a sinistra l'indice solidale col giogo raggiungerà una nuova posizione di equilibrio in cui OG formerà un angolo $\Delta\varphi$ con la verticale.
All'equilibrio $\sum$***M***i =0 la somma dei momenti delle forze applicate rispetto ad O e' nulla. I momenti ***Mi*** sono diretti lungo l'asse $\perp$ al foglio, sono tra loro paralleli, assumono segno + se hanno verso uscente e – se hanno verso entrante rispetto al foglio. La condizione di equilibrio si riduce a $\sum$Mi=0: la somma algebrica delle componenti lungo l'asse e' nulla. Riferendoci alle condizioni di ***figura 7*** si ottiene:
$\Delta m\, g\, b\, |\sin [\pi/2 - (\alpha + \Delta\varphi)]| - 2mg\, \lambda / \mathrm{sen}\, \Delta\varphi / - m_0\, g\, l\, |\, \mathrm{sen}\, \Delta\varphi\, | = 0$
$\Delta m\, g\, b\, |\, \cos (\alpha + \Delta\varphi)| - 2mg\, \lambda / \mathrm{sen}\, \Delta\varphi / - m_0\, g\, l\, |\, \mathrm{sen}\, \Delta\varphi\, | = 0$
Se si assume che : $\alpha \approx 0$; $\Delta\varphi \approx 0$ si ha $\cos (\alpha + \Delta\varphi) \approx 1$ e $\mathrm{sen}\, \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$
$\Delta m\, g\, b - 2mg\, \lambda\, \Delta\varphi - m_0\, g\, l\, \Delta\varphi = 0 \rightarrow \Delta m\, b - (2m\, \lambda + m_0\, l\,)\, \Delta\varphi = 0$
Ricordando la definizione di sensibilità si ottiene;

$$\mathbf{S} = \Delta\varphi / \Delta m = b/(2m\,\lambda + m_0\, l\,) \quad \text{e} \quad \varepsilon = (2m\,\lambda + m_0\, l\,)/\, b$$

Appare subito evidente che la sensibilità dipende da: b, λ, m_0, l . Essa non e' costane ma dipende dal carico m.
Se la congiungente A1A2 passa per O allora : $\lambda = 0$, quindi:
$\mathbf{S} = \Delta\varphi / \Delta m = b/(\, m_0\, l\,)$ non dipende più dal carico , e' inversamente proporzionale alla massa del giogo m_0 ed alla distanza del suo baricentro dal fulcro O (si suppone che G sia sempre sotto O).
In pratica però i bracci si possono flettere leggermente allorché si caricano i piatti , quindi λ = OD varia.
Se A1A2 passa sotto il fulcro(λ >0) S diminuisce al crescere del carico totale 2m sui piatti e della distanza λ; se passa sopra il fulcro (λ <0)essa cresce al crescere di 2m e di λ. In tale modo S dipende dal carico. Considerazioni analoghe si possono fare per ε.
Altro motivo concomitante e' l'aumento del carico che produce un aumento dell'attrito.
Per questo motivo e' opportuno determinare la curva di sensibilità variando il carico sui piattelli.

Alcune caratteristiche dello strumento

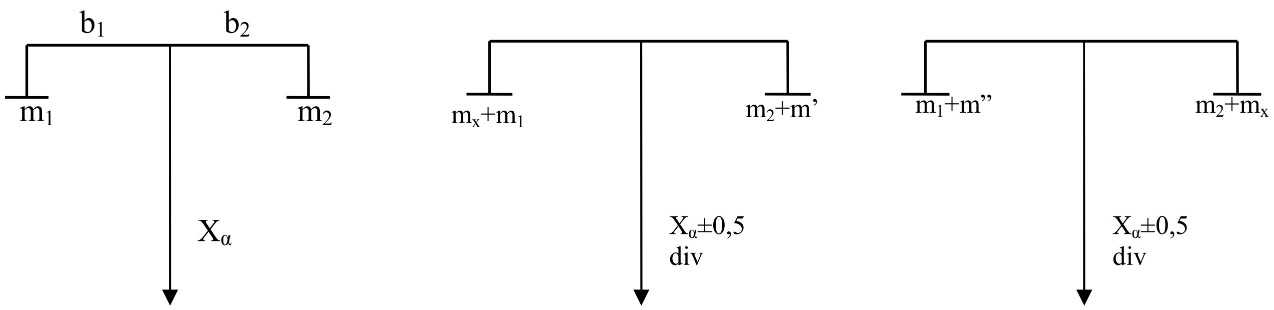
Sensibilità.
Assumiamo **λ = 0 ed** $\mathbf{S} = \Delta\varphi / \Delta m = b/(\, m_0\, l\,)$ **.** ***S*** risulta tanto maggiore quanto più lunghi sono i bracci, quanto minore e' la massa del giogo (per tale motivo si fa uso di leghe leggere), quanto più piccola e' la distanza l tra O e il baricentro G: il giogo deve essere compatto ma rigido ed ad elevato grado di resistenza alla flessione per evitare flessioni elastiche dei bracci prodotte dal carico stesso.
Si ottengono S $\approx$ 2-3 [mrad/mg]
Prontezza.
La bilancia e' un sistema oscillante (pendolo composto) . La prontezza dello strumento risulta legata al periodo di oscillazione T ed al coefficiente di smorzamento delle oscillazioni.
$T = 2\pi \sqrt{[\, Io / (m_0\, g\, l)]} = 2\pi \sqrt{[\, Io\, S / (\, g\, b)]}$

La prontezza, che e' inversamente proporzionale a T, e la sensibilità sono dipendenti. Elevati valori sensibilità S conducono a periodi di oscillazione più lunghi e a misure più lente e di prontezza minore. Per aumentare la prontezza alcune bilance di precisione sono dotate di sistemi di smorzamento dell'oscillazione mediante il quale si ottiene l'arresto della bilancia in un intervallo minore consentendo misure piu' celeri.

Principali errori sistematici della bilancia

A parte una taratura eventualmente errata delle masse campione , i principali errori sistematici in questo tipo di operazione di misura provengono da un'eventuale differenza dei bracci della bilancia e dalla cosiddetta spinta di Archimede.
Se si impone che l'effetto del primo di questi errori sia inferiore all'effetto sull' indeterminazione della misura prodotto dal corrispondente errore casuale, per una bilancia con portata 100g e con σ_M =1mg la differenza di lunghezza dei bracci , Δb , deve essere tale che($\Delta b/b$) < (σ_M / M) = $10^{-5.}$
Quindi se b = 10 cm deve essere $\Delta b < 10^{-4}$cm. Per quanto si cerchi, all'atto della costruzione, di rendere questa differenza più piccola possibile, non si puo' mai essere sicuri che l'appoggio dei tre coltelli garantisca questa condizione entro il limite citato.
Occorre fare quindi più di una misura per eliminare questo effetto.
Ci sono due procedimenti che si usa seguire: il **metodo della tara**; il **metodo della doppia pesata**. Entrambi richiedono di fare due pesate.

Determinazione di una massa incognita col metodo della doppia pesata



(I) **(II)** **(III)**
Fig8

Siano m_1 e m_2 le masse dei piattelli scarichi .
La posizione di equilibrio a piatti scarichi e' data da :
$m_1\, b_1 - m_0\, l\, \varphi - m_2 b_2 = 0$ (I)
Sia X_α la posizione di equilibrio.
Si pone la massa incognita m_x a sinistra e la si equilibra con la massa m' , riportando la bilancia nella medesima posizione X_α di equilibrio.
(Sfruttare la conoscenza del valore della sensibilità per riequilibrare la bilancia in una ben definita posizione X_α partendo da una posizione X_β)
Vale la relazione:
$(m_x + m_1)\, b_1 - m_0\, l\, \varphi - (m' + m_2) b_2 = 0$ (II)
Si ripete la pesata ponendo il corpo m_x a destra e si riequilibra la bilancia con una massa m" posta a sinistra in modo da ritornare nella medesima posizione di equilibrio X_α.
Vale la relazione :
$(m'' + m_1)\, b_1 - m_0\, l\, \varphi - (m_x + m_2) b_2 = 0$ (III)
Sottraendo la (I) dalla (II) : $m_x\, b_1 - m'\, b_2 = 0 \rightarrow m_x\, b_1 = m'\, b_2$

Sottraendo la (I) dalla (III) : $m'' b_1 - m_x b_2 = 0 \rightarrow m_x b_2 = m' b_1$
Moltiplicando membro a membro : $m_x^2 b_1 b_2 = m'm'' b_1 b_2 \rightarrow \boldsymbol{m_x^2 = m'm''}$
e $\boldsymbol{m_x = \sqrt{(m'm'')}}$ risulta la ***media geometrica*** delle due masse note ***m'*** e ***m''***
Se *m' ≈ m''* la media aritmetica approssima quella geometrica $: m_x = (m' + m'')/2$
Analogamente vale inoltre : $b_1/b_2 = \sqrt{m'/m''}$. Nei casi comuni tale rapporto vale: 1 + 1/2000.
Le incertezze su m'e m'' valgono : $\sigma_{m'} = \varepsilon\, \delta x$; $\sigma_{m''} = \varepsilon\, \delta x$
δx si può assumere pari a ± 0.5 div.
L'errore su m_x si ottiene dalla propagazione dell'errore di m' e m'' su $\boldsymbol{m_x = \sqrt{(m'm'')}}$

Determinazione di una massa incognita col metodo della tara.

Fig 9

Si rimedia agli effetti delle diversità dei bracci , ponendo il corpo e le masse campione sempre sul medesimo piatto.
Nella prima pesata si pone su un piattello, per esempio A, un corpo qualsiasi detto **tara**, la cui massa m_T sia > m_x. Aggiungendo poi sull'altro piattello, B, un opportuna massa campione, $\boldsymbol{m_a}$, si ottiene una posizione di equilibrio $X\alpha$.
Nella seconda pesata si sostituisce , in B, alla massa $\boldsymbol{m_a}$ il corpo in misura di massa $\boldsymbol{m_x}$ e un'altra massa campione $\boldsymbol{m_b}$ sino a riportare la bilancia alla stessa posizione di equilibrio X_α , con le operazioni descritte in precedenza. Si sfrutta la conoscenza del valore della sensibilità per riequilibrare la bilancia in una ben definita posizione X_α partendo da una posizione X_β.
E' allora evidente che : $\boldsymbol{m_a = m_b + m_x}$ e $\boldsymbol{m_x = m_a - m_b}$
$\boldsymbol{m_x}$ e' la differenza delle masse campione poste sullo stesso piattello. Con questo metodo non ha più rilevanza la disuguaglianza dei due bracci, o l'eventuale variazione del valore di g in A e B.
Calcolate le incertezze di $\boldsymbol{m_a}$ ed $\boldsymbol{m_b}$ si risale con la propagazione degli errori all'errore su $\boldsymbol{m_x}$

Riduzione della pesata a vuoto. Spinta di Archimede

Fig10

Su ogni corpo di massa m immerso in un fluido agisce oltre la forza peso m**g** una forza diretta in verso opposto e pari al peso della porzione di fluido occupata dal corpo.
Siano: ***m*** la massa del corpo; $\boldsymbol{\mu}$ la sua densità (gr/cm^3); ***V*** = m/μ il suovolume ;
$\boldsymbol{\mu_a}$ le densità dell'aria; $\boldsymbol{\mu_c}$ la densità delle masse campioni $\boldsymbol{m_c}$ di volume :***Vc*** = m_c/μ_c
La spinta di Archimede vale : $\mu_a V g$ per il corpo e $\mu_a Vc\, g$ per la massa campione.
Il confronto avviene tra $(m g - \mu_a V g)$ e $(m_c g - \mu_a Vc\, g)$
Per questo :$(m - \mu_a V) = (m_c - \mu_a Vc)$ da cui : $(m - \mu_a m/\mu) = (m_c - \mu_a m_c/\mu_c)$
e quindi $m(1 - \mu_a/\mu) = m_c(1 - \mu_a/\mu_c)$.
Si ottiene infine: $\boldsymbol{m = m_c(1 - \mu_a/\mu_c)/(1 - \mu_a/\mu)}$ che e' la massa corretta.
Esempio. Siano $\mu_c = 8.4$ g/cm^3 (ottone) ; $\mu_a = 1.205\ 10^{-3}$g/cm^3
Se $\mu = 1$ g/cm^3 (acqua) : $m = m_c\,(1 – 0.001) / (1 – 0.0001) = m_c\ 1.001$
Correzione del sistematico dell'ordine dello 0.1%, che agisce per difetto se $\mu<\mu_c$ e in eccesso se $\mu>\mu_c$