

Capitolo 15

Plasmi non-collisionali

15.1 Introduzione

In questo Capitolo approfondiamo lo studio dei fenomeni di plasma non-collisionali per mezzo dell'equazione di Vlasov. Come già discusso, l'espressione "non-collisionale" intende che si considerano fenomeni collettivi dominati dai campi medi a lungo raggio, mentre si trascurano gli effetti delle collisioni a corto raggio. Si parte peraltro sempre da una situazione di equilibrio termodinamico che è raggiunta presumibilmente attraverso alle collisioni a corto raggio, anche se si considerano solo fenomeni collettivi nei quali le collisioni non hanno importanza. Ciò è lecito per esempio quando si studino onde di alta frequenza, molto maggiore della frequenza di collisione. Allo stesso tempo va notato, che gli ioni, possedendo un'inerzia molto più grande degli elettroni, possono essere considerati a riposo, costituendo un fondo di carica positiva uniformemente distribuita che serve a mantenere la neutralità del sistema senza partecipare altrimenti alla dinamica dei fenomeni. Essendo in condizioni di equilibrio termodinamico, sembra quindi lecito utilizzare le equazioni macroscopiche del modello a due fluidi del precedente Capitolo, riducendoci peraltro al caso del solo fluido di elettroni per quanto riguarda la dinamica. Tuttavia vedremo come sia necessario in specifici problemi ritornare all'equazione di Vlasov, da cui scaturiscono fenomeni altrimenti non contemplati dalla teoria macroscopica.

15.2 Oscillazioni elettromagnetiche in plasmi freddi

Con tale espressione, come detto nel precedente Capitolo, si intendono plasmi in cui gli effetti della pressione siano trascurabili, $p = 0$. Useremo le equazioni per il solo moto degli elettroni, costituenti un sistema omogeneo e uniforme; gli ioni sono considerati fermi e hanno la funzione di mantenere la neutralità di carica. Corrispondentemente non vi siano campi elettromagnetici all'equilibrio perché il plasma ha raggiunta la neutralità di carica.

Perturbiamo linearmente il sistema delle equazioni (14.51) e (14.53) e delle

equazioni di Maxwell, ottenendo (le quantità con indice "0" sono all'equilibrio, quelle con indice "1" sono le perturbazioni considerate piccole, cioè $n_1 \ll n_0$ e così via):

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (15.1)$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -en_0 \mathbf{E}_1 \quad (15.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = -\frac{4\pi e}{c} n_0 \mathbf{u}_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \quad (15.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} . \quad (15.4)$$

In realtà la prima equazione, cioè l'equazione di continuità linearizzata, può essere trattata a parte, in quanto il sistema è chiuso indipendentemente da essa. Pertanto \mathbf{u}_1 può essere considerato indipendente dalle coordinate spaziali, e le perturbazioni di densità non intervengono nel problema.

Analizziamo ora le perturbazioni in componenti di Fourier nel tempo $\propto \exp(-i\omega t)$; dalla (15.2) si ottiene

$$\mathbf{u}_1 = \frac{e}{i\omega m_e} \mathbf{E}_1 \quad (15.5)$$

dove le grandezze dipendono solo più dalle coordinate spaziali. Sostituendo nella (15.3):

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = -\frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \mathbf{E}_1 \quad (15.6)$$

dove

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \quad (15.7)$$

è la già incontrata *frequenza di plasma elettronica*. Nella notazione usuale dell'elettromagnetismo classico per mezzi dielettrici non conduttori si ha:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

dove $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ è l'induzione elettrica e ϵ la costante dielettrica del mezzo non conduttore. Per estensione possiamo quindi dire che

$$\epsilon = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \quad (15.8)$$

è la *costante dielettrica del plasma*.

Derivando rispetto al tempo la (15.6) e utilizzando la (15.4) si ottiene:

$$\frac{\omega^2}{c} \epsilon \mathbf{E}_1 = c \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) .$$

Se il plasma all'equilibrio è omogeneo possiamo analizzare le quantità perturbate in onde piane, per cui tutte le quantità perturbate sono $\propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \mathbf{E}_1. \quad (15.9)$$

Se si sceglie l'asse z come direzione del vettore di propagazione dell'onda piana, $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_z$, si può scrivere l'equazione nella forma:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_{pe}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15.10)$$

Le direzioni x e y sono ovviamente simmetriche, mentre la direzione z si comporta diversamente; ciò suggerisce che esistono due distinti tipi di perturbazioni possibili nel sistema.

15.2.1 Oscillazioni di plasma

Una delle soluzioni dell'equazioni matriciale (15.10) è:

$$E_{1x} = E_{1y} = 0 \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 \quad (15.11)$$

che corrisponde a onde piane in cui il campo elettrico oscilla nella direzione del vettore d'onda \mathbf{k} , per cui si tratta di onde longitudinali. La velocità di gruppo

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0 \quad (15.12)$$

indica che queste onde non si propagano, ma sono semplicemente oscillazioni alla frequenza di plasma ω_{pe} , spesso anche indicate come *oscillazioni di Langmuir*, che fu il primo ad osservarle e interpretarle nei gas ionizzati. Abbiamo già brevemente discusso queste oscillazioni nel Capitolo 12. La loro origine fisica è facilmente interpretata pensando ad un gas di elettroni omogeneamente distribuito in uno sfondo omogeneo di ioni positivi immobili; se una nuvola di elettroni viene spostata dalla posizione di equilibrio, la carica spaziale creata genererà un campo elettrostatico che tenderà a portare il sistema in equilibrio, eccitando oscillazioni in fase su tutto il sistema. Va tenuto presente che, essendo $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$, la (15.4) comporta che le oscillazioni di plasma non siano accompagnate da perturbazioni magnetiche, cioè sono elettrostatiche.

15.2.2 Onde elettromagnetiche

L'altra soluzione della (15.10) è:

$$E_{1z} = 0 \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (15.13)$$

che corrisponde a onde trasverse. Si tratta in realtà delle normali onde elettromagnetiche modificate dalla presenza del plasma; infatti per $n_0 = 0$ e $\omega_{pe} = 0$ si

ottiene la nota relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche nel vuoto $\omega^2 = k^2 c^2$. Si noti tra l'altro che gli effetti plasma sono importanti solo a basse frequenze, quelle cioè prossime alla frequenza tipica di oscillazione del plasma di elettroni (gli ioni hanno una frequenza ancora minore). Onde elettromagnetiche di alta frequenza non risentono praticamente della presenza del plasma.

La velocità di fase delle onde elettromagnetiche è:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}} \quad (15.14)$$

che è maggiore della velocità della luce, ed è reale solo per $\omega \geq \omega_{pe}$. Un plasma ha dunque un indice di rifrazione:

$$\mu = \frac{c}{v_f} = \sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}. \quad (15.15)$$

La velocità di gruppo è invece:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2} \quad (15.16)$$

che mostra come i segnali si propagano sempre a velocità minore della velocità della luce. Ancora per $\omega \leq \omega_{pe}$ l'onda è evanescente. Se si manda un'onda elettromagnetica contro un plasma con frequenza minore della sua frequenza di plasma essa verrà riflessa integralmente. Ciò è quanto succede alle onde radio che vengono riflesse dalla ionosfera terrestre e rimangono intrappolate tra la superficie conduttrice della Terra e la ionosfera, propagandosi quindi seguendo la curvatura della superficie verso stazioni anche non direttamente visibili.

La frequenza tipica degli elettroni entro un metallo corrisponde all'ultravioletto, per cui la luce visibile viene riflessa dai metalli. Va detto che con considerazioni di questo tipo e misurando l'indice di rifrazione di un gas ad alta temperatura, Lorentz nel 1878 concluse che gli atomi dovessero contenere cariche elettriche con massa dell'ordine di quella degli elettroni, prima ancora che Thomson nel 1897 scoprisse gli elettroni.

15.3 Oscillazioni elettromagnetiche in plasmi caldi

È possibile estendere le precedenti considerazioni al caso di un plasma in cui gli effetti termici non siano del tutto trascurabili, in particolare sia presente l'effetto della pressione. Ci riferiremo ancora al caso di un plasma di elettroni con uno sfondo di ioni positivi immobili e useremo un'equazione di stato adiabatica per studiare fenomeni che avvengono su tempi scala più brevi del trasporto termico, coerentemente con l'assunzione di fenomeni collisionali trascurabili.

Perturbiamo le equazioni del fluido di elettroni:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (15.17)$$

$$m_e n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -en_0 \mathbf{E}_1 - \gamma \frac{p_0}{n_0} \nabla n_1 \quad (15.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -4\pi en_1 \quad (15.19)$$

da cui si ottiene che in questo caso la perturbazione di densità n_1 è legata alle altre perturbazioni. Sviluppriamo ora le perturbazioni in onde piane $\propto \exp[i(kx - \omega t)]$ scegliendo quindi l'asse x come direzione del vettore d'onda. Considereremo in questo paragrafo soltanto le onde longitudinali. Pertanto la componente x della (15.18) e le (15.17) e (15.19):

$$-i\omega m_e n_0 u_{1x} = -en_0 E_{1x} - i\gamma \frac{p_0}{n_0} k n_1 \quad (15.20)$$

$$-i\omega n_1 + in_0 k u_{1x} = 0 \quad (15.21)$$

$$ik E_{1x} = -4\pi en_1 . \quad (15.22)$$

Combinando queste equazioni si ottiene la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \gamma \frac{p_0}{m_e n_0} \quad (15.23)$$

che mostra come le oscillazioni di plasma ora siano dotate di velocità di gruppo non nulla, cioè si propagano. Una considerazione va fatta sull'equazione adiabatica usata. Essendo noto che l'esponente adiabatico dipende dai gradi di libertà del sistema $\gamma = (N + 2)/N$ ed essendo il fenomeno studiato unidimensionale, si ha che $\gamma = 3$, per cui si può passare ad un'espressione della relazione di dispersione in funzione della temperatura:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \frac{3k_B T}{m_e} \quad (15.24)$$

con velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3k_B T}{m_e} \frac{k}{\omega} . \quad (15.25)$$

15.4 Soluzione di Landau dell'equazione di Vlasov

I fenomeni non collisionali studiati nei precedenti paragrafi possono essere studiati anche per mezzo dell'equazione di Vlasov; è importante approfondire tale aspetto perchè in tal modo si ottengono effetti che sono fuori della portata del modello fluido.

Landau ha dato la soluzione dell'equazione di Vlasov per un plasma di elettroni immerso in una distribuzione uniforme di ioni a riposo, nel limite lineare e in assenza di campi elettromagnetici all'ordine zero. Poichè dunque l'unica forza deriva dal campo elettrostatico potenziale generato dalle fluttuazioni f' degli elettroni stessi:

$$-e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \int \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} f'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} , \quad (15.26)$$

essa risulta un termine di prim'ordine, e qualunque funzione di distribuzione stazionaria e omogenea $f_0(\mathbf{v})$ all'ordine zero soddisfa identicamente l'equazione di Vlasov.

Scriviamo dunque la funzione di distribuzione come:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) ;$$

l'equazione di Vlasov (15) in forma linearizzata risulta:

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 . \quad (15.27)$$

Applicando le trasformate di Fourier sullo spazio $\propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, si ha:

$$\frac{\partial f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) - \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)}{m_e} \cdot \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = 0 . \quad (15.28)$$

Essendo il campo \mathbf{E} puramente potenziale:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (15.29)$$

e quindi il campo risulta parallelo al vettore d'onda. Pertanto, con la definizione $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = kv$ (le altre due componenti della velocità perpendicolari a \mathbf{k} sono w e z), l'equazione cinetica diventa:

$$\frac{\partial f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + ikv f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) - \frac{eE(\mathbf{k}, t)}{m_e} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v} = 0 . \quad (15.30)$$

Per studiare come evolva nel tempo una perturbazione iniziale di data lunghezza d'onda, cioè per trattare un problema ai valori iniziali, conviene applicare la trasformata di Laplace sul tempo. Si moltiplica per e^{-pt} e si integra su t tra 0 e ∞ , ottenendo:

$$(p + ikv)f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, p) - \frac{eE(\mathbf{k}, p)}{m_e} \frac{\partial f_0(\mathbf{v}_1)}{\partial v} = f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t = 0) , \quad (15.31)$$

dove:

$$f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, p) = \int_0^\infty f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) e^{-pt} dt \quad (15.32)$$

$$E(\mathbf{k}, p) = \int_0^\infty E(\mathbf{k}, t) e^{-pt} dt . \quad (15.33)$$

Si prende la divergenza dell'equazione (19.13) per \mathbf{E} con $\phi = e/r$ e $\nabla^2(1/r) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$; se ne opera quindi la trasformata di Laplace ottenendo:

$$ikE(\mathbf{k}, p) = -4\pi e \int f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, p) d\mathbf{v} . \quad (15.34)$$

Eliminando f' tra le due equazioni trasformate (15.31) e (15.34), si ottiene l'equazione per la sola $E(\mathbf{k}, p)$:

$$ikE(\mathbf{k}, p) = \frac{4\pi ie}{kD(\mathbf{k}, p)} \int \frac{f'(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t = 0)}{p + ikv} d\mathbf{v} \quad (15.35)$$

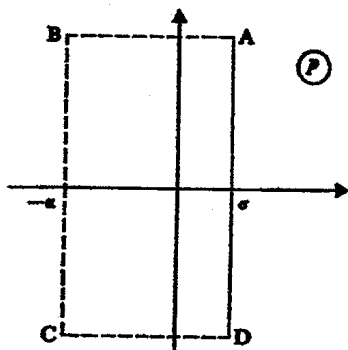


Fig. 15.1: Cammino d'integrazione per il calcolo della trasformata di Laplace

$$D(k, p) = 1 - \frac{4\pi i e^2}{m_e k} \int \frac{\partial f_0(\mathbf{v})/\partial v}{p + ikv} d\mathbf{v}, \quad (15.36)$$

dove $D(k, p)$ è detta *funzione dielettrica del plasma*. Si noti che la funzione dielettrica è indipendente dalle condizioni iniziali sulla perturbazione.

Il problema si risolve prendendo le trasformate inverse di Laplace sul tempo e di Fourier sullo spazio della (20.23): la difficoltà sta nella scelta del cammino d'integrazione dell'antitrasformata di Laplace. Formalmente, seguendo la teoria delle trasformate di Laplace, si sceglie:

$$E(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E(\mathbf{k}, p) e^{pt} dp \quad (15.37)$$

dove il cammino d'integrazione è parallelo all'asse p immaginario alla destra di tutte le singolarità dell'integrando, che sono i punti di zero della $D(k, p)$. Gli eventuali infiniti del numeratore non sono rilevanti in quanto nascono solo dalle caratteristiche della perturbazione iniziale e quindi sono eliminabili.

Il metodo analitico utilizzato è quello di integrare nel piano complesso chiudendo il cammino secondo la linea ABCDA (Fig. 15.1); pertanto l'integrale su DA risulta dalla somma dei residui dei poli racchiusi nel cammino, cui si sottragga la parte di cammino non pertinente (spezzata tratteggiata ABCD):

$$E(\mathbf{k}, t) = \sum_j R_j e^{p_j t} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCD} E(\mathbf{k}, p) e^{pt} dp \quad (15.38)$$

dove

$$R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) E(\mathbf{k}, t) \quad (15.39)$$

sono i residui dei poli p_j della (15.36) che con $F_0(v) = \int f_0(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ diventa:

$$\frac{4\pi e^2}{m_e k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_0(v)/\partial v}{p + ikv} dv = 1. \quad (15.40)$$

Poiché i poli sono in generi complessi si pone:

$$p_j(\mathbf{k}) = -i\omega_j(\mathbf{k}) - \gamma_j(\mathbf{k}). \quad (15.41)$$

I contributi all'integrale sulla linea ABCD sono peraltro nulli quando il contorno sia portato all'infinito in quanto gli integrandi si annullano per p o $t \rightarrow \infty$. Pertanto:

$$E(\mathbf{k}, t) = \sum_j R_j e^{-i\omega_j t - \gamma_j t}. \quad (15.42)$$

I valori di $\gamma_j < 0$ corrispondono a soluzioni in cui il campo cresce esponenzialmente e quindi a soluzioni instabili. I valori invece $\gamma_j > 0$ portano a oscillazioni smorzate o in genere a perturbazioni stabili. In tale senso la soluzione di Landau ci permette, ancorchè nel caso lineare, di avere una valutazione dell'eventuale saturazione di modi del sistema; è questo un risultato ottenibile solo con l'equazione di Vlasov e non con il modello fluido.

Tornando allo studio del problema matematico, analizziamo anzitutto il caso di grandi lunghezze d'onda $k \rightarrow 0$. Un'integrazione per parti della (15.40) fornisce:

$$-\frac{4\pi e^2}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv F_0(v)}{(p + ikv)^2} = 1, \quad (15.43)$$

che, ponendo $\int f_0 d\mathbf{v} = \int F_0 dv = n_0$, ha, appunto, nel limite $k \rightarrow 0$, la soluzione $p = \pm i\omega_{pe}$, cioè si ritrovano le oscillazioni di plasma elettroniche non smorzate. Se si sviluppa invece il denominatore in potenze di (ikv/p) e si integra per parti:

$$-\frac{4\pi e^2}{m_e p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv F_0(v) \left[1 - \frac{2ikv}{p} - \frac{3k^2 v^2}{p^2} + \dots \right] = 1. \quad (15.44)$$

Per una funzione di distribuzione iniziale isotropa, i termini dispari dello sviluppo non danno contributo all'integrale; in particolare, all'ordine di v^2 e per una distribuzione maxwelliana, la soluzione è:

$$p = \pm i\omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_D^2 \right) \quad (15.45)$$

che ancora rappresenta le oscillazioni di plasma inclusi gli effetti di temperatura non nulla. Non compaiono termini immaginari che sarebbero associati ai termini dispari.

Gli effetti propriamente cinetici compaiono quando si integri l'equazione (15.40) senza alcuna approssimazione. Esiste un problema in quanto l'integrando contiene un polo a $v = ip/k$ che, per le soluzioni appena viste (15.45), sta proprio sul cammino di integrazione. La teoria delle funzioni analitiche insegna

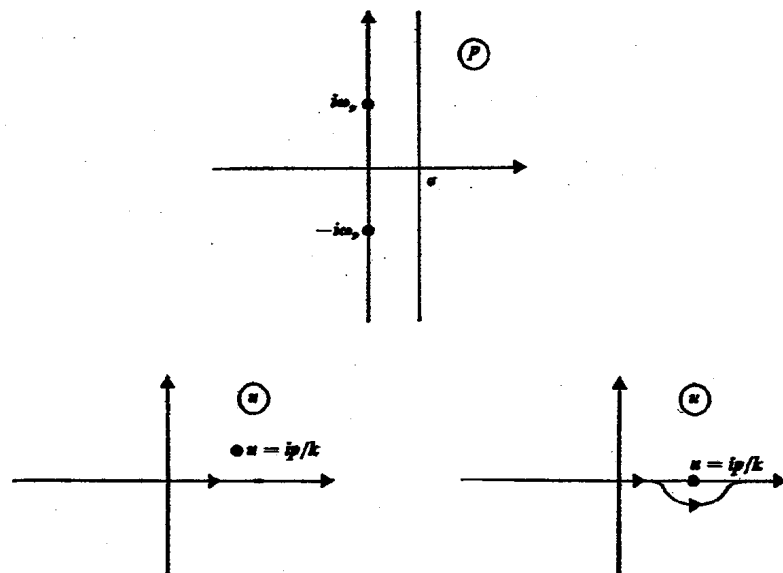


Fig. 15.2: Cammino d'integrazione per il calcolo della relazione di dispersione

che in tal caso si può utilizzare la continuazione analitica della funzione e integrare al di fuori dell'asse reale nel piano complesso. Secondo le prescrizioni delle trasformate di Laplace, la $E(\mathbf{k}, p)$ è stata definita nel piano $\Re p > 0$ alla destra di tutti i poli, e di conseguenza l'integrando (15.40) è definito per $\Re p > 0$. L'integrazione lungo l'asse reale è fatta al di sotto dei poli nel piano v (Fig. 15.2). Il cammino d'integrazione andrà quindi sempre esteso al di sotto dei poli nel piano $\Im v < 0$. In genere si sceglie il cammino semi-circolare (di raggio $\epsilon \rightarrow 0$) intorno al polo, il quale produce $i\pi$ volte il residuo, mentre il resto dell'integrazione può essere trattato sempre con lo sviluppo in serie già visto. Sempre per una distribuzione di equilibrio maxwelliana, si ricava infine:

$$1 = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{3k^2 k_B T}{p^2 m_e} \right] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{m_e}{k_B T} \right)^{3/2} \frac{\omega_{pe}^2 p}{k^3} e^{m_e p^2 / 2k^2 k_B T}. \quad (15.46)$$

(k_B costante di Boltzmann). Risolvendo per p si ottiene ancora la parte immaginaria già vista, mentre il termine reale che dà lo smorzamento, nel limite \Re

$\omega \simeq \omega_{pe}$, e quindi $k \ll \lambda_D^{-1}$, risulta:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_D^3} \exp \left[-1/(2k^2 \lambda_D^2) - 3/2 \right], \quad (15.47)$$

e prende il nome di *smorzamento di Landau* ("Landau damping"). Nell'ipotesi adottata di una funzione di distribuzione maxwelliana, il risultato ottenuto indica che le oscillazioni di plasma sono smorzate, perchè $\Re \epsilon p < 0$, e quindi stabili.

Per una funzione di distribuzione qualsiasi, ma sempre negli stessi limiti, il risultato è:

$$1 = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{3k^2}{p^2} \frac{k_B T}{m_e} - i \frac{\pi \omega_{pe}^2}{k^2 n_0} \left(\frac{dF_0}{dv} \right)_{v=ip/k} \right] \quad (15.48)$$

da cui:

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2 n_0} \left(\frac{dF_0}{dv} \right)_{v=ip/k}. \quad (15.49)$$

Questo risultato è molto interessante, in quanto indica come le oscillazioni di plasma siano smorzate o amplificate a seconda della forma della funzione di distribuzione delle particelle risonanti col modo considerato. Se la derivata della funzione F_0 a $v = ip/k$ è negativa si avrà smorzamento, se positiva amplificazione.

Ciò può essere compreso intuitivamente introducendo un concetto tipico in realtà dei fenomeni non-lineari, secondo i quali uno scambio energetico tra onde e particelle può avvenire quando si verificano condizioni di risonanza tra velocità di fase e velocità delle particelle. Così, quando viene eccitata un'oscillazione di plasma di data velocità di fase, $v_f = ip/k$, le particelle con velocità v prossima a v_f vengono forzate a oscillare in fase: le particelle di velocità minore di v_f saranno accelerate, cioè sottrarranno energia all'onda, viceversa quelle di velocità maggiore saranno rallentate, cioè cederanno energia all'onda. Pertanto, se il numero di particelle con velocità minore è superiore a quelle con velocità maggiore ($dF_0/dv < 0$), l'onda perderà energia globalmente (smorzamento), nel caso opposto ($dF_0/dv > 0$) guadagnerà energia (amplificazione).

Nelle Fig. 15.3 sono rappresentati due casi di funzione di distribuzione, la prima che smorza le onde e la seconda che le amplifica rispettivamente. Naturalmente nel secondo caso l'amplificazione dell'onda va a scapito dell'energia delle particelle corrispondenti all'eccesso ad alte velocità: l'eccesso verrà quindi progressivamente spianato e si raggiungerà un effetto di saturazione quando la coda della distribuzione sarà piatta. È questo un tipico effetto cinetico, naturalmente non incluso nelle soluzioni fluide.

15.5 Instabilità di fascio

È possibile derivare un criterio generale per le instabilità cinetiche, dette spesso anche *microinstabilità*. La relazione di dispersione di un plasma nel modello

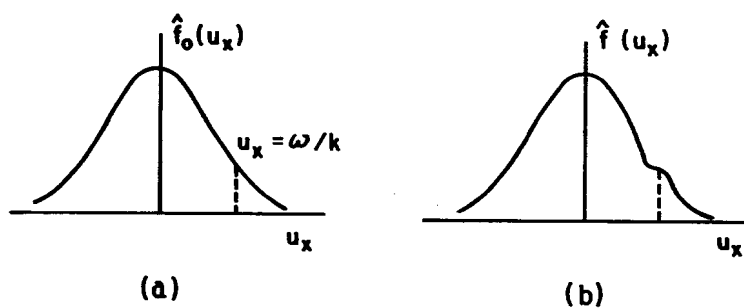


Fig. 15.3: Landau damping. (a) Distribuzione maxwelliana con coda alla velocità di fase ω/k . (b) Evoluzione della distribuzione maxwelliana per effetto del damping.

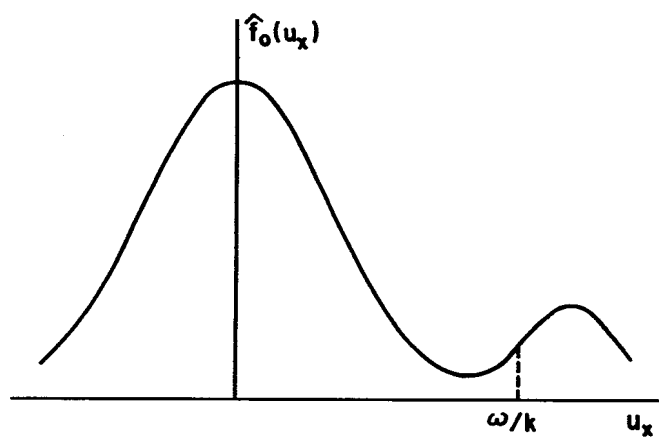


Fig. 15.4: Distribuzione con fascio ad alta velocità e onde instabili per Landau damping.

cinetico di Landau è la relazione $D(k, p) = 0$ che si riscrive formalmente:

$$Z(\zeta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0'(v)}{v - \zeta} dv = \alpha^2 k^2 \quad (15.50)$$

con $\zeta = ip/k, \alpha^2 = m_e/4\pi e^2$. Plasmi con data distribuzione iniziale F_0 danno luogo a oscillazioni instabili se per $k > 0$ esistono $Z(\zeta)$ con parte reale positiva corrispondenti a $\Im \zeta > 0$.

Penrose ha dimostrato che esiste una condizione sufficiente per l'instabilità, detta appunto *criterio di Penrose*: modi crescenti esponenzialmente si realizzano se, e solo se, la $F_0(v)$ ha un minimo a un valore $v = \xi$ e inoltre in tale punto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0(v) - F_0(\xi)}{(v - \xi)^2} dv > 0. \quad (15.51)$$

Con questo metodo si possono studiare non solo i fenomeni del tipo Landau damping; ma anche microinstabilità dovute a particolari funzioni di distribuzione, per esempio quando vengano iniettati nel plasma fasci ("streams") di particelle. Come esempio si consideri il caso dell'*instabilità a due fasci*, in cui due fasci di elettroni viaggiano alla stessa velocità V in direzioni opposte entro un background uniforme di ioni a riposo. Per un plasma freddo senza moti termici (Fig. 15.5):

$$F_0(v) = \frac{1}{2}[\delta(v - V) + \delta(v + V)]. \quad (15.52)$$

La funzione ha un minimo a $v = 0$, e l'applicazione del criterio di Penrose richiede per l'instabilità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0(v)}{v^2} dv > 0,$$

che è senz'altro verificata. Si può dunque passare al calcolo del tempo scala di crescita, risolvendo la relazione di dispersione di cui si è precedentemente parlato. Integrando per parti si ottiene:

$$-\frac{\omega_{pe}^2}{n_0} \int \frac{F_0}{(p + ikv)^2} dv = 1$$

e quindi:

$$-\frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[\frac{1}{(p + ikv)^2} + \frac{1}{(p - ikv)^2} \right] = 1. \quad (15.53)$$

Nel limite $kV/\omega \rightarrow 0$ si ricavano oscillazioni plasma con frequenza $\pm i\omega_{pe}$ e, al prim'ordine, un'amplificazione su tempi caratteristici $\Re p = kV$.

L'interpretazione fisica di questa microinstabilità è illustrata in Fig. 15.5. Se uno dei due fasci viene perturbato da un eccesso di densità elettronica, gli elettroni dell'altro fascio sentiranno, incontrandolo, una crescita di potenziale e ne verranno frenati; passeranno cioè una maggior parte del tempo in queste

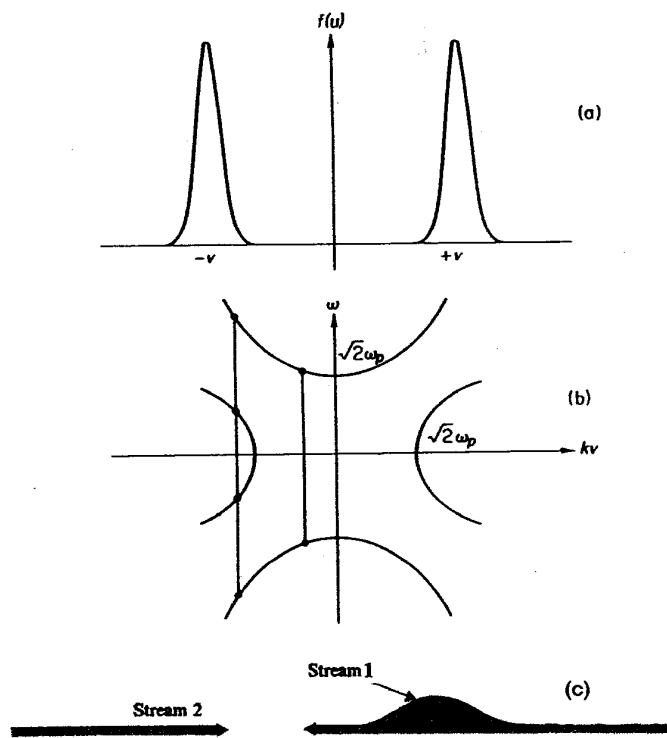


Fig. 15.5: Instabilità di fascio: (a) funzione di distribuzione; (b) relazione di dispersione; (c) schema di interpretazione fisica.

regioni che altrove, accrescendo progressivamente l'eccesso di carica. Come ovvio da questa interpretazione fisica, l'instabilità esiste anche con un solo fascio di elettroni che attraversi un plasma di ioni a riposo; la frequenza delle oscillazioni instabili corrisponde alla frequenza di plasma del fascio.

15.6 Venti relativistici dalle pulsar

In condizioni astrofisiche, anche in plasmi relativamente rarefatti, l'instabilità a due fasci impedisce quindi la propagazione di fasci di particelle ad alta velocità, tendendo rapidamente a termalizzarle. Un meccanismo basato su questo effetto è stato proposto da Dobrowolny e Ferrari nel 1970 per spiegare la formazione dei *wisps* della nebulosa del Granchio, il resto dell'esplosione della supernova del 1054 che ha lasciato al centro la pulsar NP0531, una stella di neutroni che ruota con periodo di 33 millisecondi. La Fig. 15.6 mostra la regione della nebulosa intorno alla pulsar osservata nella banda visibile dallo Hubble Space Telescope con un inserto della stessa regione osservata nei raggi X dal satellite ROSAT. I *wisps* sono le strutture ad arco a distanza di circa 0.1 pc dalla pulsar che nel tempo appaiono muoversi e riformarsi come onde che si infrangono sui bordi interni della nebulosa. Dall'immagine a raggi X appare chiaro che gli archi appartengono ad un vero e proprio anello che circonda la pulsar. I modelli delle magnetosfere delle pulsar indicano che dalla loro superficie esterna al cosiddetto cerchio di luce $R_c = c/\Omega$, vengono emessi venti a velocità relativistica per accelerazione di elettroni e ioni dal campo elettrico indotto dalla rotazione del dipolo magnetico (vedremo questi modelli nel Capitolo 17). Le traiettorie delle cariche sono concentrate nel piano equatoriale della rotazione della pulsar. Le cariche vengono accelerate ad un fattore di Lorentz $\gamma \approx f$, dove $f = eB_c/(mc\Omega)$ è il rapporto tra la frequenza di girazione nel campo della pulsar a R_c e la frequenza angolare di rotazione; gli ioni hanno quindi un fattore di Lorentz circa 2000 volte inferiore a quello degli elettroni e di conseguenza si avrebbero due fasci di particelle con velocità differenti di circa $\Delta(v/c) \approx 1/(2\gamma_{ioni}^2)$. L'instabilità di fascio porta necessariamente ad un frenamento degli elettroni nel riferimento degli ioni; l'interazione avrà un tempo caratteristico $\approx \omega_{pe}^{-1}$ nel riferimento degli ioni e quindi $\approx \gamma_{ioni}^2 \omega_{pe}^{-1}$ nel riferimento dell'osservatore. Con i valori che si stimano nel caso della nebulosa del Granchio, $B_c \approx 10^5$ gauss, $\omega_{pe} \approx 10^8$ rad s^{-1} , $\gamma_{ioni} \approx 10^8$, si ottiene che l'interazione porta alla termalizzazione in un tempo dell'ordine di 10^7 s che corrisponde ad un percorso del vento relativistico di circa 10^{17} cm. I *wisps* rappresentano dunque in questo modello l'effetto di termalizzazione del fascio di elettroni rispetto agli ioni.

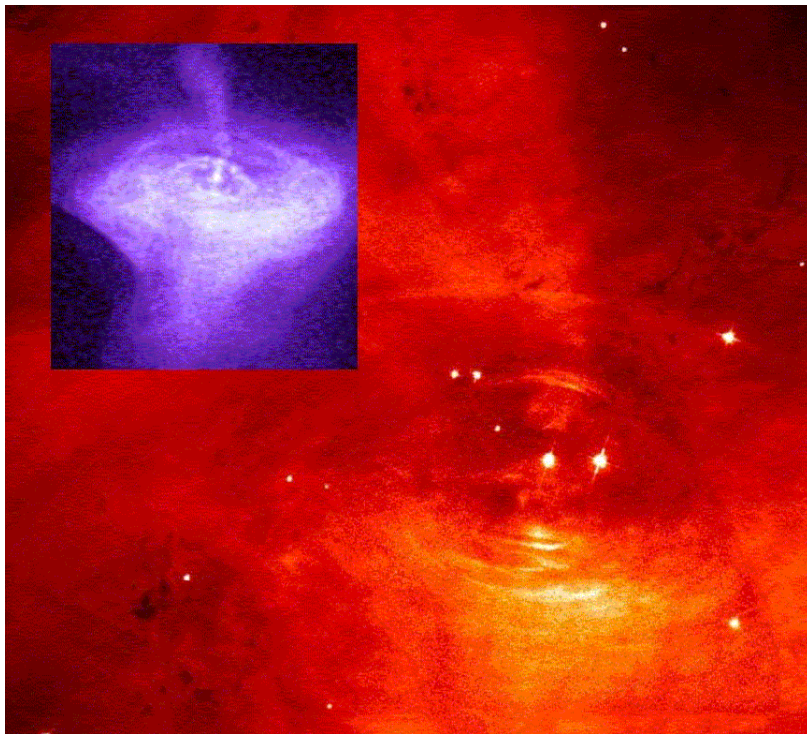


Fig. 15.6: I *wisps* della Nebulosa del Granchio osservati dallo Hubble Space Telescope e (insetto) dal satellite X Chandra. La pulsar è la stella al centro di simmetria dei wisps.