Geometria e Algebra Lineare I

E. Abbena, A.M. Fino, G.M. Gianella

14 settembre 2007

Questi appunti, insieme con il testo consigliato, completano il programma svolto nei corsi di Geometria e Algebra Lineare I, per il Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008.

Gli argomenti fondamentali, oggetto delle lezioni, sono suddivisi in vari capitoli la cui sequenza rispetta l'andamento del programma svolto. Sono previsti, inoltre, alcuni capitoli dal titolo "Per saperne di piú" che contengono precisazioni, dimostrazioni, esempi particolari che, pur non essendo oggetto del programma, contribuiscono alla sua chiarezza e ne completano l'esposizione. Al termine di ogni argomento compariranno dei capitoli di esercizi, tutti tratti dalle prove d'esame assegnate negli anni precedenti a Fisica, tutti gli esercizi sono risolti, a volte appare solo la loro soluzione, a volte é inserito il procedimento di risoluzione ottenuto mediante l'uso del programma di calcolo simbolico *Mathematica*, versione 5.2.

Per una esposizione approfondita e accurata degli argomenti esposti si rimanda ai testi classici di Algebra Lineare in commercio, queste note non intendono infatti sostituire un testo, ma solo fornire un rapido aiuto agli Studenti per la preparazione dell'esame.

Per chiarimenti, approfondimenti, suggerimenti non si esiti a scrivere a: elsa.abbena@unito.it, o a: annamaria.fino@unito.it, o a: gianmario.gianella@unito.it.

Indice

Capitolo 1

Sistemi Lineari

In questo capitolo si introducono le nozioni di sistema lineare, matrici associate e teorema di Rouchè–Capelli senza dimostrare alcuni teoremi citati. I dettagli e le dimostrazioni sono rimandate al Capitolo 11.

1.1 Equazioni Lineari

Definizione 1.1 *Un'equazione* **lineare** *nelle incognite* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *è un'espressione del tipo:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

dove i **coefficienti** $a_i, i = 1, \dots, n$, *e il* **termine noto** b *sono numeri reali. L'equazione si dice lineare in quanto ogni incognita compare a primo grado.*

Nel Corso di Geometria e Algebra Lineare II saranno studiate anche equazioni a coefficienti complessi.

Definizione 1.2 *Una* **soluzione** *dell'equazione (1.1) è una* n*-upla di numeri reali* $(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n)$ *che, sostituita alle incognite, verifica l'equazione.* **Risolvere** *un'equazione significa determinarne tutte le soluzioni.*

.

Esempio 1.1 L'equazione:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5$$

ammette infinite soluzioni, che dipendono da 3 parametri reali, date da:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = -5 + 2t_1 + 3t_2 + 4t_3 \\ x_4 = t_3, \qquad\qquad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si osservi che, risolvendo l'equazione rispetto ad un'altra incognita, si ottiene lo stesso insieme di soluzioni (rappresentato in modo diverso).

Definizione 1.3 *Un'equazione lineare si dice* **omogenea** *se il termine noto è nullo.*

È chiaro che un'equazione lineare è omogenea se e solo se ammette la soluzione formata da tutti zeri.

Esempio 1.2 L'equazione omogenea:

$$2x - 3y = 0$$

ammette infinite soluzioni che dipendono da un parametro, date da:

$$\begin{cases} x = t \\ \\ y = \dfrac{2}{3}t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si osservi che la soluzione $(0,0)$ si ottiene ponendo $t = 0$.

1.2 Sistemi lineari

Un **sistema lineare** di m equazioni in n incognite è un insieme di equazioni lineari del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m, \quad a_{ij} \in \mathbb{R},\ b_i \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.2}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le **incognite**. I **coefficienti** a_{ij} sono dotati di due indici per agevolare il riconoscimento della loro posizione nel sistema lineare. L'indice i (indice di riga) stabilisce il numero dell'equazione in cui il coefficiente compare, l'indice j (indice di colonna) stabilisce il numero dell'incognita di cui a_{ij} è il coefficiente. Per esempio a_{23} è il coefficiente della terza incognita nella seconda equazione. I **termini noti** b_i hanno solo un'indice essendo unicamente riferiti al numero dell'equazione in cui compaiono. Il sistema considerato è lineare in quanto ogni equazione che lo compone è di primo grado. Analogamente al caso delle equazioni, un sistema lineare si dice **omogeneo** se tutte le equazioni che lo compongono hanno termine noto nullo, cioè se $b_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Anche in questo caso vale la:

Definizione 1.4 *Una* **soluzione** *di un sistema lineare di m equazioni in n incognite è una n-upla di numeri reali $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ che sostituita ordinatamente alle incognite verifica tutte le equazioni del sistema.* **Risolvere** *un sistema lineare significa determinarne tutte le soluzioni.*

È chiaro che ogni sistema lineare è omogeneo se e solo se ammette la soluzione formata da tutti zeri: $(0, 0, \ldots, 0)$.

Un sistema lineare si dice **compatibile** se ammette soluzioni, altrimenti è **incompatibile**.

Vi sono metodi diversi per risolvere i sistemi lineari, in questo corso si darà ampio spazio al **metodo di riduzione** di Gauss in quanto più veloce (anche dal punto di vista computazionale). Iniziamone la spiegazione con un esempio.

Esempio 1.3 Risolvere il seguente sistema lineare di due equazioni in due incognite usando il metodo di riduzione:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$$

Il sistema lineare dato è equivalente a:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2(x + y) - (2x - 3y) = 2 \cdot 4 - 7 \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5y = 1 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione: $\left(\dfrac{19}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

Il metodo usato per risolvere l'esempio precedente segue dalla:

Definizione 1.5 *Due sistemi si dicono* **equivalenti** *se ammettono le stesse soluzioni.*

e dal:

Teorema 1.1 *Due sistemi lineari sono equivalenti se e solo se l'uno è ottenuto dall'altro eseguendo le quattro operazioni sotto elencate:*

1. *scambiare tra di loro due equazioni;*
2. *moltiplicare un'equazione per un numero diverso da zero;*
3. *sostituire ad una equazione la somma di se stessa con un'altra equazione moltiplicata per un qualsiasi coefficiente;*
4. *una qualsiasi combinazione delle operazioni 2. 3. prima elencate.*

Dimostrazione. Dimostriamo che il sistema (1.2) é equivalente al sistema che si ottiene sostituendo alla prima equazione se stessa moltiplicata per un coefficiente $\lambda \neq 0$. Si osservi che se tale sostituzione avviene per la i-esima equazione é sufficiente operare con la prima operazione per ricondurci al caso in esame. In altri termini dimostriamo che (1.2) é equivalente a:

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n) = \lambda b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m, \qquad \lambda \neq 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Si deve procedere in due passi.

i) Hp: $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ è soluzione di (1.2); Ts: $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ è soluzione di (1.3).

ii) Hp: $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ è soluzione di (1.3); Ts: $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ è soluzione di (1.2).

i) Ovvio, per ogni valore di $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) É sufficiente dimostrare la tesi per la prima equazione. Per ipotesi si ha:

$$\lambda(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n^0) = \lambda b_1,$$

essendo $\lambda \neq 0$ si possono dividere ambo i membri dell'identitá precedente per λ, da cui segue la tesi.

Per le altre due dimostrazioni si procede allo stesso modo . ▮

Esempio 1.4 I due sistemi seguenti non sono equivalenti:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 4 \\ 0(2x - 3y) + 2(x + y) = 0 \cdot 7 + 2 \cdot 4. \end{cases}$$

Si osservi che le operazioni descritte nel Teorema 1.1 operano solo sui coefficienti del sistema lineare e non sulle incognite. Ciò suggerisce di sostituire ad un sistema una "tabella" dei coefficienti e dei temini noti ed operare solo su questa. Illustriamo questo procedimento mediante l'Esempio 1.3.
Al sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

associamo la tabella:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right)$$

e operiamo su di essa per il passaggio successivo sostituendo alla seconda riga se' stessa a cui sottraiamo il prodotto di due volte la prima: $R_2 \to R_2 - 2R_1$, ottenendo così:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

che corrisponde al sistema **ridotto**:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5y = 1. \end{cases}$$

Benchè la definizione intuitiva di sistema ridotto sia chiara, ne daremo la definizione formale più avanti.

La tabella usata prende il nome di **matrice completa** del sistema lineare, o matrice dei coefficienti e termini noti, il tratto verticale prima dell'ultima sua colonna intende solo distinguere i coefficienti del sistema dai termini noti. La trattaziane generale sulle matrici è rimandata al capitolo successivo, qui introduciamo solo alcune nozioni elementari. È evidente che il numero delle righe della matrice completa associata ad un sistema lineare corrisponde al numero delle equazioni del sistema, il numero delle colonne è pari al numero delle incognite aumentato di una unità, ossia della colonna formata dai termini noti. Le operazioni di riduzione che permettono di trasformare un sistema lineare in un sistema ridotto ad esso equivalente si traducono sulle **righe** della matrice in modo ovvio e si possono riassumere, rispettivamente nelle seguenti:

1. $R_i \leftrightarrows R_j$;
2. $R_i \to \lambda R_i, \ \lambda \neq 0$;
3. $R_i \to R_i + \lambda R_j, \ \lambda \in \mathbb{R}$;
4. una qualsiasi combinazione delle operazioni 2. 3. elencate: $R_i \to \mu R_i + \lambda R_j, \ \mu \neq 0$.

In generale, al sistema (1.2) si associano due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

detta **matrice dei coefficienti**: matrice di m righe e n colonne,
e

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.5}$$

detta **matrice completa** di m righe e $n + 1$ colonne.

Esempio 1.5 Nel sistema lineare seguente formato da tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

la matrice completa (formata da tre righe e quattro colonne) è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Procedendo alla riduzione mediante le tre operazioni consentite si ottiene:

$$\underset{\substack{R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to 3R_1 - R_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 0 & -3 & 11 & 27 \end{array}\right) \underset{R_3 \to 3R_2 - 2R_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

da cui si perviene al sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ -2y + 7z = 17 \\ -z = -3 \end{cases} \tag{1.6}$$

che ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases}$$

Esempio 1.6 Nel sistema lineare seguente formato da tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

la matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Procedendo alla riduzione mediante le tre operazioni consentite si ottiene:

$$\underset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

da cui si perviene al sistema ridotto:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

che è chiaramente incompatibile.

Esempio 1.7 Nel sistema lineare seguente formato da tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

la matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Procedendo alla riduzione mediante le tre operazioni consentite si ottiene:

$$\underset{\substack{R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_1 - R_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_2 - R_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

da cui si perviene al sistema ridotto:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_3 = 2 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni che dipendono da un parametro:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} - t \\ \\ x_2 = t \\ \\ x_3 = -\dfrac{2}{3}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Gli esempi studiati impongono la definizione formale dell'ultima matrice che si ottiene, ossia della matrice associata al sistema ridotto:

Definizione 1.6 *Una matrice si dice* **ridotta per righe** *se in ogni sua riga non nulla esiste un temine non nullo al di sotto del quale vi sono tutti zeri.*

Segue, in modo naturale, la definizione annunciata di sistema lineare ridotto:

Definizione 1.7 *Un sistema lineare si dice* **ridotto** *se la matrice dei coefficienti ad esso associata è ridotta per righe.*

Risolvere un sistema lineare con il metodo di riduzione comporta pervenire, mediante le operazioni consentite, alla matrice dei coefficienti ridotta per righe. Dai teoremi che seguono sarà chiaro che tra tutte le matrici complete ridotte per righe, dovremmo considerare solo quelle in cui anche la matrice dei coefficienti è ridotta per righe. Si possono allora presentare queste possibilità:

a. quella illustrata nell'esempio 1.5. Il numero delle righe non nulle della matrice completa ridotta per righe è uguale al numero delle righe non nulle della matrice dei coefficienti ridotta per righe ed è uguale al numero delle incognite, quindi l'ultima riga non nulla della matrice dei coefficienti contiene *soltanto un numero non nullo*, allora il sistema ridotto associato è compatibile e ha una sola soluzione.

b. Quella illustrata nell'esempio 1.7. Il numero delle righe non nulle della matrice completa ridotta per righe è uguale al numero delle righe non nulle della matrice dei coefficienti ed è minore del numero delle incognite; l'ultima riga non nulla della matrice dei coefficienti contiene *almeno un numero non nullo*; allora il sistema ridotto è compatibile e ammette infinite soluzioni che dipendono da un parametro.

c. Quella illustrata nell'esempio 1.6. Il numero delle righe non nulle della matrice completa ridotta per righe è maggiore (di una unità) del numero delle righe non nulle della matrice dei coefficienti ridotta per righe e pertanto il sistema ridotto associato è incompatibile.

La definizione seguente (che avrà un ruolo cruciale in tutto il corso) permette, in modo elementare, di distinguere le situazioni prima esposte.

Definizione 1.8 *Si dice* **rango** *di una matrice ridotta per righe il numero delle righe non nulle.*

In letteratura, le notazioni più comuni per indicare il rango di una matrice sono: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{r}(A) = \rho(A)$.
I tre esempi prima elencati possono essere riscritti, quindi, nel modo seguente:

a. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = 3$; il rango delle due matrici è uguale e coincide con il numero delle incognite;

b. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = 2$; il rango delle due matrici è uguale ma è inferiore di una unità al numero delle incognite;

c. $\text{rank}(A) = 3, \text{rank}(A|B) = 4$; i due ranghi sono diversi, quindi il sistema é incompatibile.

Abbiamo così "quasi" dimostrato il famoso:

Teorema 1.2 Teorema di Rouchè–Capelli. *Un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa.*

Si osservi, infatti, che il Teorema di Rouchè -Capelli è banalmente dimostrato solo nel caso dei sistemi ridotti; per completare la dimostrazione è necessario introdurre la definizione di rango di una matrice qualsiasi e provare che le operazioni di riduzione per righe di una matrice non ne alterano il rango; ciò sarà oggetto del Capitolo 11.

Osservazione 1.1 I sistemi lineari omogenei. Si osservi che il Teorema di Rouchè Capelli è sempre verificato nel caso dei sistemi lineari omogenei, che sono, quindi, sempre compatibili. Perciò è solo interessante capire se essi ammettano una sola soluzione (quella nulla) o infinite, e ciò dipende dal rango della matrice dei coefficienti. Per la loro soluzione è sufficiente ridurre per righe la matrice dei coefficienti (questo caso sarà esaminato in dettaglio nel Paragrafo 1.2.1).

Osservazione 1.2 Anche se è già intuitivamente chiaro, si dimostrerà formalmente che il rango della matrice dei coefficienti di un sistema lineare è un numero inferiore o uguale al minore tra il numero delle equazioni e il numero delle incognite.

Osservazione 1.3 Al più il rango della matrice completa differisce di una unità dal rango della matrice dei coefficienti.

Esercizio 1.1 Discutere e risolvere, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2. \end{cases}$$

Iniziamo con la riduzione per righe della matrice completa, sono riportati i passaggi essenziali.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to 3R_1 - R_2 \\ R_3 \to 4R_1 - R_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 7 & 2 - a^2 & 14 - a \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_2 - R_3}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{array}\right).$$

La matrice dei coefficienti è ridotta per righe, quindi si presentano i seguenti casi:

1. $\text{rank}(A) = 3$ se e solo se $a^2 - 16 \neq 0$ ossia se e solo se $a \notin \{-4, 4\}$;
2. $\text{rank}(A) = 2$ se e solo se $a = -4$ oppure $a = 4$.

Per determinare le soluzioni del sistema dobbiamo considerare tre casi:

1. $a \notin \{-4, 4\}$: poichè $\text{rank}(A) = 3$ anche $\text{rank}(A|B) = 3$. Il sistema è compatibile e ammette una sola soluzione, che si determina o a partire dal sistema ridotto associato, oppure procedendo all'ulteriore riduzione della matrice completa nel modo seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a-4}{(a+4)(a-4)} \end{array}\right) \underset{R_2 \to \frac{1}{7}R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+4} \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_3 \\ R_1 \to R_1 + 3R_3}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \dfrac{4a+19}{a+4} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{10a+54}{7(a+4)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+4} \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 - 2R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{8a+25}{7(a+4)} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{10a+54}{7(a+4)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{a+4} \end{array}\right).$$

In questo modo si leggono, ordinatamente in colonna, i valori delle tre incognite.

2. $a = -4$. Sostituendo nell'ultimo passaggio di riduzione della matrice completa $(A|B)$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

da cui segue che $\operatorname{rank}(A) = 2$ mentre $\operatorname{rank}(A|B) = 3$, il sistema è, quindi, incompatibile.

3. $a = 4$. Sostituendo nell'ultimo passaggio di riduzione della matrice completa $(A|B)$ si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2 \to \frac{1}{7}R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

da cui segue che $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = 2$ ($2 < 3$, con 3 numero delle incognite) il sistema è, quindi, compatibile e ammette infinite soluzioni che dipendono da un parametro date da:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{7} - t \\ y = \dfrac{10}{7} + 2t \\ z = t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Osservazione 1.4 Le soluzioni del sistema precedente possono essere riscritte nel modo seguente:

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{7} - t, \frac{10}{7} + 2t, t\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{10}{7}, 0\right) + t(-1, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

mettendo cosí meglio in evidenza la dipendenza dal parametro t.

Esempio 1.8 A maggior chiarimento di quanto esposto nell'esempio precedente osserviamo che si può procedere in modo leggermente diverso per determinare le soluzioni di un sistema lineare. Quando si perviene alla matrice completa ridotta per righe, anzichè continuare l'esercizio scrivendo il sistema ridotto associato si può, in modo equivalente, procedere allo stesso calcolo mediante un'ulteriore riduzione della matrice completa allo scopo di pervenire alla lettura nell'ultima colonna (quella dei termini noti) delle soluzioni del sistema. Questo metodo, molto efficace quando si ha una sola soluzione, può presentare alcune difficoltà di calcolo negli altri casi. Lo illustriamo con un esempio e precisamente partiamo dall'ultima passaggio di riduzione nell'Esempio 1.5. Quando la matrice dei coefficienti è ridotta per righe si inizia con il far comparire 1 sulla sua diagonale principale e poi, partendo dall'ultima riga e risalendo verso la prima, si annullano i numeri sopra la diagonale principale.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2 \\ R_3 \to -R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{2} & -\dfrac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + \frac{7}{2}R_3 \\ R_1 \to R_1 - 2R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_1 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Si osservi che sull'ultima colonna, si legge, in ordine, proprio la soluzione del sistema.

1.2.1 I sistemi lineari omogenei

Ricordiamo che un sistema lineare omogeneo è un sistema lineare avente tutti i termini noti nulli, del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.7}$$

la cui matrice dei coefficienti coincide con (1.4) e quella completa è:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right); \tag{1.8}$$

quindi i loro ranghi coincidono, infatti un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno la soluzione nulla. È molto interessante distinguere il caso di una sola soluzione da quello di infinite soluzioni, si ha:

i) se $\operatorname{rank}(A) = n =$numero delle incognite, esiste solo la soluzione nulla.

ii) Se $\operatorname{rank}(A) = k < n$ esistono infinite soluzioni che dipendono da $n-k$ parametri.

Esempio 1.9 Il seguente sistema lineare omogeneo di quattro equazioni e cinque incognite:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

è associato alla matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Procedendo alla sua riduzione per righe (si osservi che è inutile ridurre per righe la matrice completa) si ha:

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrows R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_1 + R_3 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_3 \to -\frac{1}{3}R_3 \\ R_4 \to \frac{1}{3}R_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_4 \to R_2 - R_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Si deduce che $\operatorname{rank}(A) = 3$, esistono, quindi, infinite soluzioni che dipendono da $5 - 3 = 2$ parametri.
Il sistema ridotto associato è:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 - t_2 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = -t_1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t_1, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Osservazione 1.5 Le soluzioni del sistema precedente si possono scrivere come:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t_1 - t_2, t_2, -t_1, 0, t_1) = t_1(-1, 0, -1, 0, 1) + t_2(-1, 1, 0, 0, 0), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.6 Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 5 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

che ha la matrice dei coefficienti coincidente con il sistema lineare omogeneo (1.9). Le sue soluzioni sono:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t_1 - t_2 + 7, t_2, -t_1 + 1, 3, t_1) = t_1(-1, 0, -1, 0, 1) + t_2(-1, 1, 0, 0, 0) + (7, 0, 1, 3, 0), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che $(7, 0, 1, 3, 0)$ é soluzione del sistema dato, mentre $t_1(-1, 0, -1, 0, 1) + t_2(-1, 1, 0, 0, 0)$ é soluzione del sistema omogeneo associato.

Analogamente, il sistema lineare, dello stesso tipo del precedente,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

ha soluzioni:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t_1 - t_2 + 7, t_2, -t_1 + 3, -1, t_1) = t_1(-1, 0, -1, 0, 1) + t_2(-1, 1, 0, 0, 0) + (7, 0, 3, -1, 0), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Capitolo 2

Sistemi Lineari – Esercizi

2.1 Esercizi

Discutere e risolvere, al variare degli eventuali parametri reali, i seguenti sistemi lineari:

[1] $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

[2] $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

[3] $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ 4x_1 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 9x_4 = 18. \end{cases}$

[4] $\begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x + y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0. \end{cases}$

[5] $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + bz = 3 \\ y + cz = 2. \end{cases}$

[6] $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ x - y + z = k. \end{cases}$

[7] $\begin{cases} ax - y + z = 2 \\ x - ay + z = 3 - a^2 \\ x - y + az = a + 1. \end{cases}$

[8] $\begin{cases} x + y + z = a \\ x - ay - z = 1 \\ 2x + y + az = a + 1. \end{cases}$

[9] $\begin{cases} x + y + \lambda z = 2\lambda - 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1. \end{cases}$

[10] $\begin{cases} 2x + az = 1 \\ 3x + ay - 2z = 2 \\ ax + 2z = 1. \end{cases}$

[11] $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = h. \end{cases}$

[12] $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = h. \end{cases}$

[13] $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y + 2z = b \\ -3x - 3y + az = 1. \end{cases}$

[14] $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ 4x - y + az = b. \end{cases}$

[15] $\begin{cases} (3 - k)x - y - z = a \\ 2x - (4 - k)y - 2z = b \\ 3x - 3y - (5 - k)z = c. \end{cases}$

[16] $\begin{cases} (2 - k)x - ky + (1 - k)z = 1 - 2k \\ (4 - 2k)x - 3ky + (1 - 2k)z = 1 - k \\ (2 - k)x - 2ky + kz = -5k. \end{cases}$

[17] $\begin{cases} (h + 1)x - hy + (2h + 1)z = 3 + 2h \\ (h + 1)x - hy + 2hz = 1 + 3h \\ (-h - 1)x - (2h + 1)z = -3(h + 1). \end{cases}$

[18] $\begin{cases} (m - 1)x + y + mz = 0 \\ m(1 - m)x + (1 - m)y - 2m^2 z = 2 \\ (m - 1)x + 2y - 2z = m + 3. \end{cases}$

[19] $\begin{cases} (k+1)x + (k+1)y + 2z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ (1-k)x + (k-1)z = 0. \end{cases}$

[20] $\begin{cases} kx - 2(k+1)y + z = 4 - 2k \\ (k+1)y + z = k + 3 \\ 2kx - 5(k+1)y + 2z = 8 - 9k. \end{cases}$

[21] $\begin{cases} kx + 2y + 2kz = 1 \\ kx + (3-k)y + 3kz = 1 \\ kx + (k+1)y + 2kz = 2. \end{cases}$

[22] $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

[23] $\begin{cases} x - y + z - t = a^2 \\ 2x + y + 5z + 4t = a \\ x + 2z + t = 2. \end{cases}$

[24] $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a. \end{cases}$

[25] $\begin{cases} x + z + 2t = 2 \\ -x - y + z + t = a^2 \\ 4x + y + 2z + 5t = a. \end{cases}$

[26] $\begin{cases} 2x - y + 3z + t = 0 \\ 4x + y - 2z - t = 0 \\ 2x + 5y + az - 5t = 0. \end{cases}$

[27] $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ -x_1 + (\lambda - 2)x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0. \end{cases}$

[28] $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + (2\lambda + 1)y - (\lambda + 1)z = 2\lambda + 1 \\ x + \lambda y - z = \lambda - 1. \end{cases}$

[29] $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + \lambda y = 0. \end{cases}$

[30] $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$

[31] $\begin{cases} x + y + hz = 2h \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - hy + 4z = -2. \end{cases}$

[32] $\begin{cases} hx + y + hz = -1 \\ 2x - y + 2z = -h - 1 \\ 3x + 3y + (h + 2)z = -h - 2. \end{cases}$

[33] $\begin{cases} x - ay + z = a \\ ax - 2y + 3z = -1 \\ 3x - 2y + az = 5a. \end{cases}$

[34] $\begin{cases} 2x + ay = 1 \\ x + y - z = -2 \\ ax - y + z = 2. \end{cases}$

[35] $\begin{cases} x + y + (h - 1)z = 2h - 2 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x + (-h + 1)y + (h - 1)^2 z = -2. \end{cases}$

[36] Verificare che per $a = -1$ il seguente sistema lineare è incompatibile:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + z = 1 \\ x + 4y + az = 0. \end{cases}$$

[37] Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$. Determinare esplicitamente le soluzioni, quando è possibile:

$$\begin{cases} -hx + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k. \end{cases}$$

[38] Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$. Determinare esplicitamente le soluzioni, quando è possibile:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (2 - h)x_2 + (2 + h)x_3 = 2 \\ x_1 + (2 + 3h)x_2 - 2hx_3 = k. \end{cases}$$

[39] Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$. Determinare esplicitamente le soluzioni, quando è possibile:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ (2-h)x_1 + (2+h)x_2 - x_3 = 1 \\ (2+3h)x_1 - 2hx_2 - x_3 = k. \end{cases}$$

[40] Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ (2-h)x_1 + (2+h)x_2 - x_3 = 0 \\ (2+3h)x_1 - 2hx_2 - x_3 = k, \quad h, k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) determinare tutte le soluzioni nel caso di $h = k = 0$;
ii) discutere l'esistenza delle soluzioni e determinarle (quando è possibile) al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

[41] Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 - kx_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k, \quad k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

i) determinare tutte le soluzioni nel caso di $k = -1$.
ii) Discutere l'esistenza delle soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

[42] Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, determinare le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3+k)x_2 - 3x_3 = 0 \\ (k-1)x_1 + 4x_2 - 3x_3 = h. \end{cases}$$

[43] Discutere e risolvere il seguente sistema di equazioni lineari, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (a-1)x + y - z = 1 \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + z = 2a. \end{cases}$$

[44] Discutere e risolvere al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - hx_3 = 0, \\ hx_1 + 3x_2 + (1-h^2)x_3 = h + 1, \\ (6-2h^2)x_2 + 2x_3 = h^2 + 3h + 2. \end{cases}$$

[45] Discutere e risolvere al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + hx_3 = 1 \\ x_1 + hx_2 - x_3 = -h \\ (h-1)x_1 - 2hx_2 + (h^2+1)x_3 = 2h \end{cases}$$

[46] Discutere e risolvere al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} tx_1 + (1-t)x_2 - 2tx_3 = 2 \\ x_1 + tx_2 + tx_3 = 0 \\ 2x_1 + tx_2 + tx_3 = t \end{cases}$$

[47] Discutere e risolvere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -k \\ 2x_1 - kx_2 - x_3 = 1 \\ kx_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

[48] Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 6 \\ hx - 2y - z = 2 \\ x + y = h. \end{cases}$$

[49] Discutere e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare, al variare di a in campo reale:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x + 3y - 2az = -3 \\ x + ay - 3z = a. \end{cases}$$

[50] Discutere e determinare le soluzioni del seguente sistema lineare, al variare di k in campo reale. Determinare esplicitamente le soluzioni, quando é possibile:

$$\begin{cases} x + ky + z = 0 \\ kx - y + 2z = -1 \\ x - y + 2z = -k. \end{cases}$$

2.2 Soluzioni

[1]

```
A = {{1, 1, -1}, {2, 2, 1}, {1, 1, 2}}; X = {x1, x2, x3}; B = {1, 0, -1};
Solve[A.X == B, X]
Solve ::'' svars'' : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → 1/3 - x2, x3 → -2/3}}
```

$x_1 = -\lambda + \dfrac{1}{3}, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = -\dfrac{2}{3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

[2]

```
A = {{-2, 1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 1, -2}};
X = {x1, x2, x3}; B = {1, -2, 4};
Reduce[A.X == B, X]
False
```

Il sistema è incompatibile.

[3]

```
A = {{2, -1, -1, -4}, {4, 0, -3, -1}, {8, -2, -5, -9}};
X = {x1, x2, x3, x4}; B = {9, 0, 18};
Solve[A.X == B, X]
Solve::"svars": Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → 3 x3/4 + x4/4, x2 → -9 + x3/2 - 7 x4/2}}
```

$x_1 = \frac{3}{4}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2,\ x_2 = -9 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{7}{2}\lambda_2,\ x_3 = \lambda_1, \quad x_4 = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

[4]

```
A = {{2, -2, 1, 4}, {1, -1, -4, 2}, {-1, 1, 3, -2}, {3, -3, 1, 6}};
NullSpace[A]
{{-2, 0, 0, 1}, {1, 1, 0, 0}}
```

$x = \lambda_1 - 2\lambda_2, \quad y = \lambda_1, \quad z = 0, \quad t = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$

[5]

```
A = {{1, 1, a}, {1, 2, b}, {0, 1, c}}; X = {x, y, z}; B = {1, 3, 2};
Reduce[A.X == B, X]
a == b - c&&x == -1 - b z + 2 c z&&y == 2 - c z||
  x == -1&&y == 2&&z == 0&&a - b + c ≠ 0
```

Se $a \neq b - c$: $\quad x = -1,\ y = 2,\ z = 0;$
se $a = b - c$: $\quad x = -1 + (2c - b)\lambda,\ y = 2 - c\lambda,\ z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

[6]

```
A = {{2, 1, -1}, {1, 2, -2}, {3, -1, 2}, {1, -1, 1}};
X = {x, y, z}; B = {1, 0, -1, k};
Reduce[A.X == B, X]
k == 1&&x == 2/3&&y == -11/3&&z == -10/3
```

Se $k \neq 1$: non esistono soluzioni;
se $k = 1$: $\quad x = \frac{2}{3},\ y = -\frac{11}{3},\ z = -\frac{10}{3}.$

[7]

```
A = {{a, -1, 1}, {1, -a, 1}, {1, -1, a}};
X = {x, y, z}; B = {2, 3 - a^2, a + 1};
Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&x == 2 + y - z||a == -2&&x == -1 + z&&y == -z||
  x == 1&&y == a&&z == 2&& - 1 + a ≠ 0&&2 + a ≠ 0
```

Se $a \notin \{-2, 1\}$: $\quad x = 1,\ y = a,\ z = 2;$
se $a = -2$: $\quad x = -1 + t,\ y = -t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R};$
se $a = 1$: $\quad x = 2 + \lambda - \mu,\ y = \lambda,\ z = \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

[8]

```
A = {{1, 1, 1}, {1, -a, -1}, {2, 1, a}}; X = {x, y, z}; B = {a, 1, a + 1};

Reduce[A.X == B, X]
a == 0&&x == 1 + z&&y == -1 - 2 z||a == 1&&x == 1&&y == -z||
  x == a&&y == 1&&z == -1&& - 1 + a ≠ 0&&a ≠ 0
```

Se $a \notin \{0, 1\}$: $\quad x = a,\ y = 1,\ z = -1;$
se $a = 0$: $\quad x = 1 + t,\ y = -1 - 2t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R};$
se $a = 1$: $\quad x = 1,\ y = -t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$

[9]

```
A = {{1, 1, a}, {1, a, 1}, {a, 1, 1}}; X = {x, y, z}; B = {2a - 1, a, 1};

Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&x == 1 - y - z||
  x == -2/(2 + a)&&y == a/(2 + a)&&z == 2 (1 + a)/(2 + a)&& - 1 + a ≠ 0&&2 + a ≠ 0
```

Se $\lambda \notin \{1, -2\}$: $\quad x = -\dfrac{2}{\lambda + 2},\ y = \dfrac{\lambda}{\lambda + 2},\ z = \dfrac{2(\lambda + 1)}{\lambda + 2};$

se $\lambda = -2$: non esistono soluzioni;
se $\lambda = 1$: $\quad x = -h - k + 1,\ y = h,\ z = k, \quad h, k \in \mathbb{R}.$

[10]

```
A = {{2, 0, a}, {3, a, -2}, {a, 0, 2}}; X = {x, y, z}; B = {1, 2, 1};

Reduce[A.X == B, X]
a == 2&&x == 1/2 (1 - 2 z)&&y == 1/4 (1 + 10 z)||
  x == 1/(2 + a)&&y == (3 + 2 a)/(a (2 + a))&&z == 1/(2 + a)&& - 2 + a ≠ 0&&a ≠ 0&&2 + a ≠ 0
```

Se $a \notin \{-2, 0, 2\}$: $\quad x = \dfrac{1}{2 + a},\ y = \dfrac{2a + 3}{a(2 + a)},\ z = \dfrac{1}{2 + a};$

se $a = 0, a = -2$: il sistema è incompatibile;
se $a = 2$: $x = \dfrac{1}{2} - t,\ y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{2}t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$

[11]

```
A = {{1, 1, -1}, {2, 3, k}, {1, k, 3}}; X = {x, y, z}; B = {1, 3, h};

Reduce[A.X == B, X]
h == -3&&k == -3&&x == 0&&y == 1 + z||
  h == 2&&k == 2&&x == 5 z&&y == 1 - 4 z||
  x == 1 - 6/(6 - k - k^2) + 3 h/(6 - k - k^2) - 2 k/(6 - k - k^2) + h k/(6 - k - k^2)&&
    y == (-6 + 2 h - k + h k)/(-6 + k + k^2)&&z == (-h + k)/(-6 + k + k^2)&& - 2 + k ≠ 0&&3 + k ≠ 0
```

Se $k \notin \{-3, 2\},\ \forall h \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $k = -3,\ h = -3$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $k = -3,\ h \neq -3$: non esistono soluzioni;
se $k = 2,\ h = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $k = 2,\ h \neq 2$: non esistono soluzioni.

[12]

```
A = {{k, 1, 1}, {1, k, 1}, {1, 1, k}}; X = {x, y, z}; B = {1, 1, h};

Reduce[A.X == B, X]
```

$h == 1 \&\& k == 1 \&\& x == 1 - y - z \,||\, h == -2 \&\& k == -2 \&\& x == -1 + z \&\& y == -1 + z \,||\, x == \frac{-h+k}{-2+k+k^2} \&\& y == \frac{-h+k}{-2+k+k^2} \&\& z == \frac{-2+h+h\,k}{-2+k+k^2} \&\& -1 + k \neq 0 \&\& 2 + k \neq 0$

Se $k \notin \{1, -2\},\ \forall h \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $k = -2,\ h = -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $k = -2,\ h \neq -2$: non esistono soluzioni;
se $k = 1,\ h = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;
se $k = 1,\ h \neq 1$: non esistono soluzioni.

[13]

```
A = {{1, -1, 1}, {2, 1, 2}, {-3, -3, a}}; X = {x, y, z}; B = {5, b, 1};

Reduce[A.X == B, X]
```

$a == -3 \&\& b == 2 \&\& x == \frac{1}{3}(7 - 3\,z) \&\& y == -\frac{8}{3} \,||\, x == \frac{27 + 5\,a - 3\,b + a\,b}{3\,(3+a)} \&\& y == \frac{1}{3}(-10 + b) \&\& z == \frac{2\,(-2+b)}{3+a} \&\& 3 + a \neq 0$

Se $a \neq -3,\ \forall b \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -3,\ b = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $a = -3,\ b \neq 2$: non esistono soluzioni.

[14]

```
A = {{2, -3, 2}, {1, 1, -2}, {4, -1, a}}; X = {x, y, z}; B = {1, 2, b};

Reduce[A.X == B, X]
```

$a == -2 \&\& b == 5 \&\& x == \frac{1}{5}(7 + 4\,z) \&\& y == \frac{3}{5}(1 + 2\,z) \,||\, x == \frac{-6 + 7\,a + 4\,b}{5\,(2+a)} \&\& y == \frac{3\,(-8 + a + 2\,b)}{5\,(2+a)} \&\& z == \frac{-5+b}{2+a} \&\& 2 + a \neq 0$

Se $a \neq -2,\ \forall b \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -2,\ b = 5$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $a = -2,\ b \neq 5$: non esistono soluzioni.

[15]

```
A = {{3 - k, -1, -1}, {2, -4 + k, -2}, {3, -3, -5 + k}};
X = {x, y, z}; B = {a, b, c};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$3a == c \&\& 3b == 2c \&\& k == 2 \&\& x == \frac{1}{3}(c + 3y + 3z) \,||\, b == -a - c \&\& k == 8 \&\& x == \frac{1}{18}(-3a + c - 6z) \&\& y == \frac{1}{18}(-3a - 5c + 12z) \,||\, x == \frac{7a - b - c - ak}{16 - 10k + k^2} \&\& y == \frac{2a - 6b + 2c + bk}{16 - 10k + k^2} \&\& z == \frac{3a + 3b - 5c + ck}{16 - 10k + k^2} \&\& -8 + k \neq 0 \&\& -2 + k \neq 0$$

Se $k \notin \{2, 8\}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $k = 2$, $b = 2a$ e $c = 3a$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere;
se $k = 2$, $b \neq 2a$, o $c \neq 3a$: non esistono soluzioni;
se $k = 8$, $a + b + c = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $k = 8$, $a + b + c \neq 0$: non esistono soluzioni.

[16]

```
A = {{2 - k, -k, 1 - k}, {4 - 2k, -3k, 1 - 2k}, {2 - k, -2k, k}};
X = {x, y, z}; B = {1 - 2k, 1 - k, -5k};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$k == 0 \&\& x == 0 \&\& z == 1 \,||\, x == \frac{8(-1 + k)}{-2 + k} \&\& y == \frac{4 - 3k}{k} \&\& z == -3 \&\& -2 + k \neq 0 \&\& k \neq 0$$

Se $k \notin \{0, 2\}$: esiste una sola soluzione;
se $k = 0$: $x = 0$, $y = t$, $z = 1$, $\quad t \in \mathbb{R}$;
se $k = 2$: non esistono soluzioni.

[17]

```
A = {{h + 1, -h, 2h + 1}, {h + 1, -h, 2h}, {-h - 1, 0, -2h - 1}};
X = {x, y, z}; B = {3 + 2h, 1 + 3h, -3h - 3};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == 0 \&\& x == 1 \&\& z == 2 \,||\, x == \frac{1 + 2h^2}{1 + h} \&\& y == 1 \&\& z == 2 - h \&\& h \neq 0 \&\& 1 + h \neq 0$$

Se $h \notin \{-1, 0\}$: esiste una sola soluzione;
se $h = -1$: non esistono soluzioni;
se $h = 0$: $x = 1$, $y = t$, $z = 2$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

[18]

```
A = {{m - 1, 1, m}, {m(1 - m), 1 - m, -2m^2}, {m - 1, 2, -2}};
X = {x, y, z}; B = {0, 2, m + 3};
Reduce[A.X == B, X]
```

$$m == -1 \&\& x == 1 \&\& y == 2 + z \,||\, m == 1 \&\& y == 1 \&\& z == -1 \,||\, \frac{1}{2 - 3m + m^2} == \frac{1}{1 - m} - \frac{1}{2 - m} \&\& x == \frac{-4 - m}{-2 + m} \&\& y == \frac{-4 + 2m + m^2}{-2 + m} \&\& z == \frac{1}{-2 + m} \&\& -2 + m \neq 0 \&\& -1 + m \neq 0 \&\& 1 + m \neq 0$$

Se $m \notin \{-1, 1, 2\}$: esiste una sola soluzione;
se $m = -1$, $m = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $m = 2$: non esistono soluzioni.

[19]

```
A = {{k + 1, k + 1, 2}, {1, k, 1}, {1 - k, 0, k - 1}};
X = {x, y, z}; B = {1, 1, 0};
Reduce[A.X == B, X]
```

$x == -\frac{1}{-2+k+k^2}$ && $y == \frac{1+k}{-2+k+k^2}$ && $z == -\frac{1}{-2+k+k^2}$ && $-1+k \neq 0$ && $2+k \neq 0$

Se $k \notin \{-2, 1\}$: esiste una sola soluzione;
se $k = -2$, $k = 1$: non esistono soluzioni.

[20]

```
A = {{k, -2 (k + 1), 1}, {0, k + 1, 1}, {2k, -5 (k + 1), 2}};
X = {x, y, z}; B = {4 - 2k, k + 3, 8 - 9k};
Reduce[A.X == B, X]
```

$x == \frac{1+12k}{k}$ && $y == \frac{5k}{1+k}$ && $z == 3-4k$ && $k \neq 0$ && $1+k \neq 0$

Se $k \notin \{-1, 0\}$: esiste una sola soluzione;
se $k = -1$, $k = 0$: non esistono soluzioni.

[21]

```
A = {{k, 2, 2k}, {k, 3 - k, 3k}, {k, k + 1, 2k}};
X = {x, y, z}; B = {1, 1, 2};
Reduce[A.X == B, X]
```

$x == -\frac{2}{-1+k} + \frac{1}{k}$ && $y == \frac{1}{-1+k}$ && $z == \frac{1}{k}$ && $-1+k \neq 0$ && $k \neq 0$

Se $k \notin \{0, 1\}$: esiste una sola soluzione;
se $k = 0$, $k = 1$: non esistono soluzioni.

[22]

```
A = {{1, 1, 1}, {a, 1, 2}, {1, a, 1}}; X = {x, y, z}; B = {a, 2, 4};
Reduce[A.X == B, X]
```

$a == 2$ && $y == 2$ && $z == -x$ ||
$x == \frac{-1-2a}{-1+a}$ && $y == \frac{4-a}{-1+a}$ && $z == 3+a$ && $-2+a \neq 0$ && $-1+a \neq 0$

Se $a \notin \{1, 2\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = 1$: non esistono soluzioni;
se $a = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[23]

```
A = {{1, -1, 1, -1}, {2, 1, 5, 4}, {1, 0, 2, 1}};
X = {x, y, z, t}; B = {a^2, a, 2};

Reduce[A.X == B, X]

a == -3&&x == 2 - t - 2 z&&y == -7 - 2 t - z||
  a == 2&&x == 2 - t - 2 z&&y == -2 - 2 t - z
```

Se $a \notin \{-3, 2\}$: non esistono soluzioni;
se $a \in \{-3, 2\}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[24]

```
A = {{2, a, 1}, {1, 1, a}, {1, 1, 1}}; X = {x1, x2, x3}; B = {2, 4, a};

Reduce[A.X == B, X]

a == 2&&x1 == -x2&&x3 == 2||
  x1 == 3 + a&&x2 == (-1 - 2 a)/(-1 + a)&&x3 == (4 - a)/(-1 + a)&& - 2 + a ≠ 0&& - 1 + a ≠ 0
```

Se $a \notin \{1, 2\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = 1$: non esistono soluzioni;
se $a = 2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[25]

```
A = {{1, 0, 1, 2}, {-1, -1, 1, 1}, {4, 1, 2, 5}};
X = {x, y, z, t}; B = {2, a^2, a};

Reduce[A.X == B, X]

a == -3&&x == 2 - 2 t - z&&y == -11 + 3 t + 2 z||
  a == 2&&x == 2 - 2 t - z&&y == -6 + 3 t + 2 z
```

Se $a \notin \{-3, 2\}$: non esistono soluzioni;
se $a \in \{-3, 2\}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[26]

```
A = {{2, -1, 3, 1}, {4, 1, -2, -1}, {2, 5, a, -5}};
X = {x, y, z, t}; B = {0, 0, 0};

Reduce[A.X == B, X]

a == -13&&x == -z/6&&y == 1/3 (3 t + 8 z)||
  x == 0&&y == t&&z == 0&&13 + a ≠ 0
```

Se $a \neq -13$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $a = -13$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[27]

```
A = {{1, 2, -1, a}, {-1, a - 2, 1, 0}, {0, 2, 1, 0}, {-1, -2, 1, a}};

Solve[Det[A] == 0]
{{a → 0}, {a → 0}}

NullSpace[A/.a → 0]
{{0, 0, 0, 1}, {4, -1, 2, 0}}
```

Se $a \neq 0$: esiste solo la soluzione nulla;
se $a = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due incognite libere.

[28]

```
A = {{1, 1, -1}, {1, 2a + 1, -a - 1}, {1, a, -1}};
X = {x, y, z}; B = {0, 2a + 1, a - 1};

Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&x == -3 + y&&z == -3 + 2 y||
  x == (-1 - a)/a&&y == 1&&z == -1/a&& - 1 + a ≠ 0&&a ≠ 0
```

Se $\lambda \notin \{0, 1\}$: esiste una sola soluzione;
se $\lambda = 0$: non esistono soluzioni;
se $\lambda = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[29]

```
A = {{1, -1, -1}, {3, 1, 2}, {4, a, 0}};

Solve[Det[A] == 0]
{{a → -4/5}}

NullSpace[A/.a → -4/5]
{{-1/4, -5/4, 1}}
```

Se $\lambda \neq -\dfrac{4}{5}$: $x = y = z = 0$;

se $\lambda = -\dfrac{4}{5}$: $x = -\dfrac{1}{4}t,\ y = -\dfrac{5}{4}t,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}$.

[30]

```
A = {{3, 2, 1}, {5, 3, 3}, {7, 4, 5}, {1, 1, -1}};
X = {x, y, z}; B = {1, 2, 3, 0};

Solve[A.X == B, X]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 1 - 3 z, y → -1 + 4 z}}
```

$x = -3t + 1,\ y = 4t - 1,\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}$.

[31]

```
A = {{1, 1, h}, {1, 1, 2}, {2, -h, 4}}; X = {x, y, z}; B = {2h, -1, -2};

Reduce[A.X == B, X]
```

$h == -2 \&\& x == \frac{1}{2}(-5-2y) \&\& z == \frac{3}{4} \,||$
$x == -\frac{5h}{-2+h} \&\& y == 0 \&\& z == \frac{1+2h}{-2+h} \&\& -2+h \neq 0 \&\& 2+h \neq 0$

Se $h \notin \{-2, 2\}$: $x = \dfrac{5h}{2-h}$, $y = 0$, $z = \dfrac{-1-2h}{2-h}$;

se $h = -2$: $x = -\dfrac{5}{2} - t$, $y = t$, $z = \dfrac{3}{4}$, $\quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = 2$: il sistema è incompatibile.

[32]

```
A = {{h, 1, h}, {2, -1, 2}, {3, 3, h + 2}};
X = {x, y, z}; B = {-1, -h - 1, -h - 2};

Reduce[A.X == B, X]
```

$h == -2 \&\& x == \frac{1}{3}(1-2z) \&\& y == \frac{1}{3}(-1+2z) \,||$
$h == 1 \&\& x == -1-z \&\& y == 0 \,||$
$x == 3 \&\& y == -1+h \&\& z == -4 \&\& -1+h \neq 0 \&\& 2+h \neq 0$

Se $h \notin \{-2, 1\}$: $x = 3$, $y = -1 + h$, $z = -4$;
se $h = -2$: $x = t$, $y = -t$, $z = \dfrac{1-3t}{2}$, $\quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = 1$: $x = -1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$.

[33]

```
A = {{1, -a, 1}, {a, -2, 3}, {3, -2, a}}; B = {a, -1, 5a}; X = {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
```

$a == 1 \&\& x == 3+z \&\& y == 2(1+z) \,||\, x == -\frac{2(1+9a)}{-12+a+a^2} \&\&$
$y == -1 + \frac{15}{12-13a+a^3} - \frac{20a}{12-13a+a^3} + \frac{5a^2}{12-13a+a^3} \&\&$
$z == 5 - \frac{62}{12-13a+a^3} + \frac{64a}{12-13a+a^3} - \frac{2a^2}{12-13a+a^3} \&\&$
$-3+a \neq 0 \&\& -1+a \neq 0 \&\& 4+a \neq 0$

Se $a \notin \{-4, 1, 3\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -4$: non esistono soluzioni;
se $a = 1$: $x = 3 + t, y = 2(1 + t), z = t$, $\quad t \in \mathbb{R}$;
se $a = 3$: non esistono soluzioni.

[34]

```
A = {{2, a, 0}, {1, 1, -1}, {a, -1, 1}}; B = {1, -2, 2}; X = {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
```

$a == -1 \&\& x == \frac{1+y}{2} \&\& z == \frac{1}{2}(5+3y) \,||$
$x == 0 \&\& y == \frac{1}{a} \&\& z == \frac{1+2a}{a} \&\& a \neq 0 \&\& 1+a \neq 0$

Se $a \notin \{-1, 0\}$: $x = 0, y = \dfrac{1}{a}, z = \dfrac{1+2a}{a}$;

se $a = -1$: $x = \dfrac{1+t}{2}, y = t, z = \dfrac{1}{2}(5+3t), \quad t \in \mathbb{R}$;

se $a = 0$: il sistema è incompatibile.

[35]

```
A = {{1, 1, h - 1}, {1, 1, 2}, {2, -h + 1, (h - 1)^2}};
B = {2h - 2, -1, -2}; X = {x, y, z};

Reduce[A.X == B, X]
```

$h == -1 \&\& x == \frac{1}{2}(-5-2y) \&\& z == \frac{3}{4} \,||$
$\quad x == -\frac{2(-1-h+h^2)}{-3+h} \&\& y == -1+2h \&\& z == \frac{-1+2h}{-3+h} \&\& -3+h \neq 0 \&\& 1+h \neq 0$

Se $h \notin \{-1, 3\}$: $x = -\dfrac{2(-1-h+h^2)}{-3+h}, y = -1+2h, z = \dfrac{-1+2h}{-3+h}$;

se $h = -1$: $x = \dfrac{1}{2}(-5-2t), y = t, z = \dfrac{3}{4}, \quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = 3$: il sistema è incompatibile.

[36]

```
A = {{1, 2, -1}, {-1, 0, 1}, {1, 4, -1}}; X = {x, y, z}; B = {0, 1, 0};

Reduce[A.X == B, X]
False
```

[37]

```
A = {{-h, 1, 1}, {1, -1, 0}, {h, -2, -2}}; X = {x, y, z}; B = {2, -1, k};

Reduce[A.X == B, X]
```

$h == 0 \&\& k == -4 \&\& y == 1 + x \&\& z == 1 - x \,||$
$\quad x == \frac{-4-k}{h} \&\& y == \frac{-4+h-k}{h} \&\& z == \frac{4-3h+k-hk}{h} \&\& h \neq 0$

Se $h \neq 0, \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = 0, k \neq -4$: non esistono soluzioni;
se $h = 0, k = -4$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[38]

```
A = {{1, 2, 1}, {1, 2 - h, 2 + h}, {1, 2 + 3h, -2h}};
X = {x1, x2, x3}; B = {1, 2, k};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == -2\&\&k == -2\&\&x1 == -2\,(-1+2\,x2)\&\&x3 == -1+2\,x2\,||$$
$$h == 0\&\&k == 0\&\&x1 == -2\,x2\&\&x3 == 1\,||\,x1 == \frac{-2\,h+h^2-2\,k-3\,h\,k}{2\,h+h^2}\&\&$$
$$x2 == \frac{h+k+h\,k}{h\,(2+h)}\&\&x3 == \frac{2+k}{2+h}\&\&h \neq 0\&\&2+h \neq 0$$

Se $h \notin \{-2, 0\}, \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = k = -2$: esitono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = -2,\ k \neq -2$: non esistono soluzioni;
se $h = k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = 0,\ k \neq 0$: non esistono soluzioni.

[39]

```
A = {{2, -1, -1}, {2 - h, 2 + h, -1}, {2 + 3h, -2h, -1}};
X = {x1, x2, x3}; B = {0, 1, k};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == -10\&\&k == -3\&\&x2 == \frac{1}{7}\,(-1+10\,x1)\&\&x3 == \frac{1}{7}\,(1+4\,x1)\,||$$
$$h == 0\&\&k == \frac{1}{3}\&\&x2 == \frac{1}{3}\&\&x3 == \frac{1}{3}\,(-1+6\,x1)\,||$$
$$x1 == \frac{-1+2\,h+3\,k+h\,k}{h\,(10+h)}\&\&x2 == \frac{3+k}{10+h}\&\&$$
$$x3 == \frac{-2+h+6\,k+h\,k}{h\,(10+h)}\&\&h \neq 0\&\&10+h \neq 0$$

Se $h \notin \{-10, 0\},\ \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = -10,\ k = -3$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = -10,\ k \neq -3$: non esistono soluzioni;

se $h = 0,\ k = \dfrac{1}{3}$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;

se $h = 0,\ k \neq \dfrac{1}{3}$: non esistono soluzioni.

[40]

```
A = {{2, -1, -1}, {2 - h, 2 + h, -1}, {2 + 3h, -2h, -1}};
X = {x1, x2, x3}; B = {0, 0, k};

Reduce[A.X == B, X]
```

$$h == -10\&\&k == 0\&\&x2 == \frac{10\,x1}{7}\&\&x3 == \frac{4\,x1}{7}\,||$$
$$h == 0\&\&k == 0\&\&x2 == 0\&\&x3 == 2\,x1\,||$$
$$x1 == \frac{(3+h)\,k}{10\,h+h^2}\&\&x2 == \frac{k}{10+h}\&\&x3 == \frac{(6+h)\,k}{10\,h+h^2}\&\&h \neq 0\&\&10+h \neq 0$$

Se $h \notin \{-10, 0\},\ \forall k \in \mathbb{R}$: esiste una sola soluzione;
se $h = -10,\ k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = -10,\ k \neq 0$: non esistono soluzioni;
se $h = 0,\ k = 0$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera;
se $h = 0,\ k \neq 0$: non esistono soluzioni.

[41]

```
A = {{1, 1, 1}, {1, -k, 1}, {-1, k, 1}}; X = {x1, x2, x3}; B = {k, -1, k};
Reduce[A.X == B, X]
k == -1&&x1 == -x2&&x3 == -1||
  x1 == 1/2 (-1 + k)&&x2 == 1&&x3 == 1/2 (-1 + k)&&1 + k ≠ 0
```

Se $k \neq -1$: $x_1 = \frac{1}{2}(-1+k)$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}(-1+k)$;

se $k = -1$: $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = -1$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

[42]

```
Reduce[{x1 + 2x2 - x3 == 0, 2x1 + (3 + k) x2 - 3x3 == 0,
   (k - 1) x1 + 4x2 - 3x3 == h}, {x1, x2, x3}]
h == 0&&k == 2&&x1 == -x2&&x3 == x2||
  h == 0&&k == 5&&x1 == 2 x2&&x3 == 4 x2||x1 == h (-3 + k)/(10 - 7 k + k^2)&&
   x2 == h/(10 - 7 k + k^2)&&x3 == h (-1 + k)/(10 - 7 k + k^2)&& - 5 + k ≠ 0&& - 2 + k ≠ 0
```

Se $k \notin \{2, 5\}$: $x_1 = \dfrac{h(k-3)}{k^2 - 7k + 10}$, $x_2 = \dfrac{h}{k^2 - 7k + 10}$, $x_3 = \dfrac{h(k-1)}{k^2 - 7k + 10}$;

se $k = 2$, $h = 0$: $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, $\quad t \in \mathbb{R}$;
se $k = 5$, $h = 0$: $x_1 = 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 4t$, $\quad t \in \mathbb{R}$; negli altri casi il sistema é incompatibile.

[43]

```
A = {{a - 1, 1, -1}, {1, a, 1}, {1, 1, 1}};
X = {x, y, z}; B = {1, a + 1, 2a};
Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&y == (3 - x)/2&&z == (1 - x)/2||(-1 + a) a ≠ 0&&
   x == (3 + 2 a)/a&&y == 1/2 (1 + 2 a - a x)&&z == 1/2 (-1 + 2 a - 2 x + a x)
```

Se $a \notin \{0, 1\}$: $x = \dfrac{2a+3}{a}$, $y = -1$, $z = \dfrac{2a^2 - a - 3}{a}$;
se $a = 0$: il sistema é incompatibile;
se $a = 1$: $x = 3 - 2t$, $y = t$, $z = t - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

[44] Se $h \neq 0, h \neq 2$, esiste una sola soluzione: $x_1 = \dfrac{-1-h}{2}$, $x_2 = \dfrac{h+1}{2(2-h)}$, $x_3 = \dfrac{h+1}{2(2-h)}$;

se $h = 0$, esistono infinite soluzioni: $x_1 = t$, $x_2 = -\frac{t}{2}$, $x_3 = 1 + \frac{3}{2}t$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

se $h = 2$, non esistono soluzioni.

[45] Se $h \neq -1$: esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro libero $(-ht + t, -1 + t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
se $h = -1$: esistono infinite soluzioni dipendenti da due parametri liberi $(1 + u + v, u, v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

[46] Se $t \neq 0$ e $t \neq -1$, esiste una sola soluzione: $x = t,\ y = \dfrac{-t^2 - 2t + 2}{1+t},\ z = \dfrac{t^2 + t - 3}{1+t}$;

se $t = 0$, esistono infinite soluzioni: $x = 0,\ y = 2,\ z = a,\ \forall a \in \mathbb{R}$;

se $t = -1$, non esistono soluzioni.

[47] Se $k \neq -3$ e $k \neq 2$, il sistema é compatibile e ammette una soluzione:

$x_1 = \dfrac{k+3}{2(2-k)},\ x_2 = \dfrac{7-k}{2(2-k)},\ x_3 = \dfrac{1-k}{2}$;

se $k = -3$, il sistema ha infinite soluzioni: $x_1 = 2 - t,\ x_2 = t - 1,\ x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$;

se $k = 2$, il sistema é incompatibile.

[48] Se $h \neq 1$ esiste una sola soluzione:

$x = -\dfrac{4}{h-1},\ y = \dfrac{h^2 - h + 4}{h-1},\ z = \dfrac{-2(h^2 + 2h + 3)}{h-1}$;

se $h = 1$, il sistema é incompatibilile.

[49] Se $a \notin \{0, 2\}$, esiste una soluzione: $\left(\dfrac{3-2a}{a-2}, \dfrac{a}{a-2}, \dfrac{1}{a-2}\right)$;

se $a = 0$, esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro: $(3t, 1-2t, t), t \in \mathbf{R}$;

se $a = 2$, non esistono soluzioni.

[50] Per $k \notin \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$, esiste la soluzione: $\left(1, \dfrac{k-1}{1+2k}, \dfrac{-k^2 - k - 1}{1+2k}\right)$;

per $k = 1$, esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro: $(1 - 3t, t, -1 + 2t),\ t \in \mathbf{R}$;

per $k = -\dfrac{1}{2}$, non esistono soluzioni.

Capitolo 3

Matrici

Scopo di questo capitolo è formalizzare il concetto di matrice già introdotto nel Capitolo 1 e studiare le proprietà essenziali dell'insieme delle matrici, che costituisce un valido esempio di Spazio Vettoriale, struttura algebrica che sarà oggetto di studio del Capitolo 9.

3.1 Lo spazio vettoriale delle matrici

Definizione 3.1 *Una matrice di m righe e di n colonne, ad elementi reali, è una tabella del tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$

Per convenzione, le matrici vengono indicate con le lettere maiuscole dell'alfabeto e l'insieme della matrici di m righe ed n colonne sarà indicato con $\mathbb{R}^{m,n}$, o, talvolta, $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m,n)$. In forma compatta, la matrice (3.1) si può anche scrivere come:

$$A = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n. \tag{3.2}$$

Esempio 3.1 I numeri reali possono essere considerati come matrici di una riga ed una colonna, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^{1,1}$.

Esempio 3.2 Le matrici che hanno lo stesso numero di righe e di colonne si dicono **quadrate** e tale numero si dice **ordine** della matrice. Per esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata di ordine 2.

Esempio 3.3 Le matrici con una riga e n colonne si dicono **matrici riga**, per esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,4}$ è una matrice riga.

Esempio 3.4 Le matrici con m righe e una colonna si dicono **matrici colonna**, per esempio $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}$ è una matrice colonna.

Esempio 3.5 La matrice $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, con tutti gli elementi $a_{ij} = 0,\ \forall i, j$, si dice **matrice nulla** e si indica con 0, da non confondersi con il numero $0 \in \mathbb{R}$.

Esempio 3.6 Nel caso di una matrice quadrata $A = (a_{ij})$, tutti gli elementi del tipo a_{ii} costituiscono la **diagonale principale**. Rivestiranno in seguito molta importanza le matrici **diagonali**, vale a dire le matrici aventi elementi tutti nulli al di fuori della diagonale principale ($a_{ij} = 0,\ \forall i, j \mid i \neq j$), in altri termini l'insieme delle matrici:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n,n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ii} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3.3}$$

Esempio 3.7 Un caso particolare dell'esempio precedente è costituito dalla **matrice unità** $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ ossia la matrice diagonale avente tutti 1 sulla diagonale principale:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

La definizione che segue stabilisce la relazione di uguaglianza tra matrici.

Definizione 3.2 *Due matrici A e B sono* **uguali** *se:*

i) hanno lo stesso numero di righe e di colonne: $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$,

ii) gli elementi di posto uguale coincidono: $a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, \dots, m,\ \forall j = 1, \dots, n$.

Introduciamo ora le definizioni di somma di matrici e di prodotto di una matrice per un numero reale.

Definizione 3.3 *Si definisce* **somma** *delle due matrici $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ entrambe appartenenti a $\mathbb{R}^{m,n}$, la matrice:*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \tag{3.4}$$

quindi anche $A + B \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Esempio 3.8 La somma delle matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ è la matrice $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$.

Non è definita la somma della matrice A con la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Teorema 3.1 *$\mathbb{R}^{m,n}$ con l'operazione di somma di matrici ha la struttura di gruppo commutativo, vale a dire per la somma di matrici valgono le proprietá: commutativa, associativa, esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto.*

Dimostrazione. È lasciata per esercizio ed è la naturale conseguenza del fatto che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo commutativo. L'elemento neutro è la matrice nulla introdotta nell'esempio 3.5, l'opposto della matrice $A = (a_{ij})$ è la matrice $-A = (-a_{ij})$. ▮

Definizione 3.4 *Si definisce* **prodotto di un numero reale λ per una matrice** *$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice che si ottiene moltiplicando ogni elemento di A per lo scalare λ, ossia:*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}),$$

quindi λA è ancora una matrice di $R^{m,n}$.

Esempio 3.9 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, il prodotto $3A$ è la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Teorema 3.2 *Per il prodotto di un numero reale per una matrice valgono le seguenti proprietà:*

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$;
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$;
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$;
4. $1A = A,\ \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Dimostrazione: Si tratta di un semplice esercizio.

Osservazione 3.1 Si osservi che l'insieme di matrici $\mathbb{R}^{m,n}$, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per numeri reali appena definite, ha le stesse proprietà dell'insieme dei vettori V_3 dello spazio, rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per un numero reale; sono, infatti, entrambi esempi di spazio vettoriale, come sarà precisato nel Capitolo 9.

3.2 Il prodotto di matrici

La definizione di prodotto di matrici, oggetto di questo paragrafo, trova una sua giustificazione nella rappresentazione mediante matrici dei movimenti in uno spazio vettoriale e nella composizione di tali movimenti. Per una completa esposizione dell'argomento si rimanda al Capitolo 17.

Definizione 3.5 *Il prodotto della matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ con la matrice $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,p}$ è la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,p}$ i cui elementi sono dati da:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{3.5}$$

Per definizione quindi, si possono solo moltiplicare matrici di tipo particolare, ossia il primo fattore deve avere il numero di colonne pari al numero delle righe del secondo fattore. La matrice prodotto avrà il numero di righe del primo fattore e il numero di colonne del secondo fattore. Da questa affermazione segue che stiamo per definire un prodotto non commutativo. A titolo di esempio, consideriamo il prodotto delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo definire una matrice $C = (c_{ij}) = AB \in R^{2,4}$ di cui calcoliamo in ordine gli elementi:

c_{11} si ottiene sommando i prodotti degli elementi della prima riga di A con gli elementi della prima colonna di B: $c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 10$.

c_{12} si ottiene sommando i prodotti degli elementi della prima riga di A con gli elementi della seconda colonna di B: $c_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 16$ e così via. La matrice C é dunque:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 27 & 38 \\ 22 & 31 & 60 & 86 \end{pmatrix}.$$

Per la sua particolare definizione, questo tipo di prodotto di matrici si dice **prodotto righe per colonne**.

Osservazione 3.2 È chiaro che il prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è ancora una matrice dello stesso ordine, ma anche in questo caso non vale la proprietà commutativa, per esempio date: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ si ha $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$ mentre $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$.

Osservazione 3.3 Il prodotto di matrici ha singolari particolarià, per esempio:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

in assoluto contrasto con il solito prodotto di numeri reali in cui se $ab = 0$ allora necessariamente o $a = 0$ o $b = 0$.

Esempio 3.10 Si osservi che, date $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,4}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}$, allora: $AB = (30) \in \mathbb{R}^{1,1}$, mentre:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Teorema 3.3 *Per il prodotto di matrici valgono le seguenti proprietà:*

1. *la proprietà associativa:* $(AB)C = A(BC)$, *per ogni* $A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k}, \ C \in \mathbb{R}^{k,p}$*;*
2. *le proprietá distributive del prodotto rispetto alla somma:* $A(B+C) = AB + AC$, *per ogni* $A \in \mathbb{R}^{p,m}, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$ *e* $(X+Y)Z = XZ + YZ$, *per ogni* $X, Y \in \mathbb{R}^{m,n}, \ Z \in \mathbb{R}^{n,k}$ *(si osservi la necessità di enunciare entrambe le proprietà per la mancanza della proprietà commutativa del prodotto);*
3. *nel caso delle matrici quadrate, la matrice unità* $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ *è l'elemento neutro rispetto al prodotto, ossia:* $AI = IA = A, \ \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Dimostrazione: È lasciata per esercizio nei casi più semplici, per gli altri si rimanda al Capitolo 4.

3.2.1 I sistemi lineari in forma matriciale

Usando la definizione di prodotto di matrici, si puó scrivere in modo compatto un generico sistema lineare di m equazioni in n incognite del tipo (1.2). Siano:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

la matrice dei coefficienti,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

la matrice colonna delle incognite e

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

la matrice colonna dei termini noti, allora il sistema lineare (1.2) si puó scrivere come:

$$AX = B.$$

3.2.2 La matrice inversa

Avendo introdotto il prodotto di matrici (che generalizza il prodotto di numeri reali) appare naturale introdurre il concetto di inverso; a differenza del caso dei numeri é necessario prestare particolare attenzione alla definizione in quanto il prodotto di matrici non é commutativo.

Definizione 3.6 *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice quadrata. A di dice* **invertibile** *se esiste una matrice $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che:*

$$AX = XA = I, \tag{3.6}$$

dove I indica la matrice unitá di ordine n.

Teorema 3.4 *Se esiste una matrice inversa di $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora essa é unica.*

Dimostrazione: Si supponga per assurdo che esistano due matrici diverse $X, X' \in \mathbb{R}^{n,n}$ che verificano la (3.6). Allora:

$X' = IX' = (XA)X' = X(AX') = XI = X$

che é assurdo. Si ossservi che, nella dimostrazione, si é usata la proprietá associativa del prodotto di matrici. ▮

La matrice X cosí definita di dice **matrice inversa di** A e si indica con A^{-1}.

Per la matrice inversa valgono le seguenti proprietá la cui dimostrazione é lasciata per esercizio.

Teorema 3.5

1. *Se $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono due matrici invertibili, allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *$(A^{-1})^{-1} = A$, per ogni matrice invertibile A.*

Nei paragrafi successivi affronteremo il problema di calcolare l'inversa di una matrice, di conseguenza, si tratterá di trovare le condizioni affinché una matrice quadrata sia invertibile. Si consiglia, prima di continuare la lettura, di svolgere il seguente esercizio.

Esercizio 3.1 Determinare le condizioni affinché la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sia invertibile e, in questi casi, calcolare A^{-1}. Si osservi che l'esercizio equivale a discutere e risolvere il sistema lineare:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di quattro equazioni nelle quattro incognite $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$.

3.2.3 La trasposta di una matrice

Definizione 3.7 *Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si definisce* **trasposta** *di A, e la si indica con ${}^tA$, la matrice di $\mathbb{R}^{n,m}$ che si ottiene scambiando le righe con le colonne della matrice A, in simboli se $A = (a_{ij})$ allora ${}^tA = (b_{ij})$ e $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.*

Esempio 3.11 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ allora ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ allora ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Osservazione 3.4 Si osservi che se una matrice é quadrata, allora anche la sua trasposta é una matrice quadrata dello stesso ordine.

Per la matrice trasposta valgono le seguenti proprietá la cui dimostrazione é lasciata per esercizio e si puó leggere nel Capitolo 4.

Teorema 3.6 *1.* ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}.$

2. ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

3. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n,k}.$

4. Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é una matrice invertibile e A^{-1} é la sua inversa, allora $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3.3 Matrici Quadrate di Tipo Particolare

1. **Le matrici triangolari superiori** del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n},$$

come é giá stato osservato nel Capitolo 1, ci permettono di calcolare agevolmente il loro rango. É facile osservare che la somma di due matrici triangolari superiori é ancora una matrice triangolare superiore, lo stesso per il prodotto di un numero reale per una matrice triangolare superiore. Molto piú sorprendente é il fatto che il prodotto di due matrici triangolari superiori, entrambe dello stesso ordine, é ancora una matrice triangolare superiore. Supponiamo, infatti, di calcolare $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ prodotto delle matrici triangolari superiori $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Il fatto che A sia una matrice triangolare superiore equivale a $a_{ij} = 0$ con $i > j$, analoga affermazione per la matrice B. Per semplicitá calcoliamo l'elemento c_{21} della matrice prodotto $C = AB$, lasciando il calcolo in generale per esercizio. Per definizione di prodotto di matrici (3.5) si ha:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots a_{2n}b_{n1} = 0b_{11} + a_{22}0 + \dots + a_{2n}0 = 0.$$

Si possono definire in modo analogo le matrici triangolari inferiori, con proprietá simili a quelle descritte nel caso delle matrici triangolari superiori.

2. **Le matrici diagonali** introdotte nell'Esempio 3.6. La caratteristica principale di tali matrici é la loro analogia al campo dei numeri reali, infatti il prodotto di due matrici diagonali é ancora una matrice dello stesso tipo, avente ordinatamente sulla diagonale il prodotto degli elementi corrispondenti delle due matrici date. Il rango di una matrice diagonale é pari al numero degli elementi non nulli della diagonale principale, nel caso di rango massimo, l'inversa di una matrice diagonale ha sulla diagonale principale ordinatamente gli inversi dei corrispettivi elementi della matrice data, (la verifica di queste affermazioni é lasciata per esercizio).

3. **Le matrici simmetriche** sono definite come l'insieme delle matrici quadrate A tali che:

$$A = {}^tA.$$

Scrivendo esplicitamente la definizione data si ottiene che una matrice simmetrica é del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

in altri termini, una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ é simmetrica se:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Per esercizio si calcoli la somma di due matrici simmetriche, il prodotto di una matrice simmetrica per un numero reale, il prodotto di due matrici simmetriche, la trasposta di una matrice simmetrica e si decida se si ottiene ancora una matrice simmetrica.

4. **Le matrici antisimmetriche** sono definite come l'insieme delle matrici quadrate A tali che:

$$A = -{}^tA.$$

Scrivendo esplicitamente la definizione data si ottiene che una matrice antisimmetrica é del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

in altri termini, una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ é antisimmetrica se:

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

quindi $a_{ii} = 0,\ i = 1, \dots, n$. Per esercizio si calcoli la somma di due matrici antisimmetriche, il prodotto di una matrice antisimmetrica per un numero reale, il prodotto di due matrici antisimmetriche, la trasposta di una matrice antisimmetrica e si decida se si ottiene ancora una matrice antisimmetrica.

5. **Le matrici ortogonali** sono definite come l'insieme delle matrici quadrate $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ tali che:

$${}^tAA = I$$

con I matrice unitá di ordine n. Si verifichi per esercizio che ogni matrice ortogonale é invertibile e che la trasposta di una matrice ortogonale é una matrice ortogonale. Si verifichi inoltre che il prodotto di due matrici ortogonli é ancora ortogonale e l'inversa di una matrice ortogonale é ortogonale. Si decida se tale proprietá é ancora valida per la somma di due matrici ortogonali e per il prodotto di una matrice ortogonale per un numero reale qualsiasi. L'esercizio é risolto nel Capitolo 4.

3.4 Le equazioni matriciali

Per **equazione matriciale** si intende un'equazione le cui incognite sono matrici. Se si escludono gli esempi banali di equazioni lineari (ogni numero reale può essere considerato una matrice), abbiamo già studiato nel Paragrafo 3.2.1 un esempio di equazione matriciale $AX = B$ con $A \in \mathbb{R}^{m,n}, X \in \mathbb{R}^{n,1}, B \in \mathbb{R}^{m,1}$ risolvendo un generico sistema lineare. In questo paragrafo ci occupiamo dello studio di un'equazione del tipo:

$$AX = B \tag{3.7}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m,n}, X \in \mathbb{R}^{n,p}, B \in \mathbb{R}^{m,p}$. Le incognite sono, quindi, gli elementi di X.
Si osservi che, se si è in grado di risolvere l'equazione (3.7), si è anche in grado di risolvere un'equazione del tipo:

$$YC = D \tag{3.8}$$

con incognita Y; infatti operando con la trasposta su ambo i membri di (3.8) ci si riconduce a (3.7), avendo cura di notare che l'incognita ricavata sarà ${}^tY$.
Scrivendo esplicitamente (3.7) ci si riconduce alla risoluzione di un sistema lineare. Infatti posti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,p},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,p},$$

la prima riga del prodotto $AX = B$ corrisponde al seguente sistema lineare di p-righe:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} = b_{11} \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \ldots + a_{1n}x_{n2} = b_{12} \\ \vdots \\ a_{11}x_{1p} + a_{12}x_{2p} + \ldots + a_{1n}x_{np} = b_{1p}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Mettendo in evidenza le righe di X e di B nel modo seguente:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix},$$

il sistema (3.9) si può scrivere come:

$$a_{11}\mathbf{X}_1 + a_{12}\mathbf{X}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{X}_n = \mathbf{B}_1.$$

Ripetendo lo stesso calcolo per le altre righe di $AX = B$ si ottiene che tale equazione matriciale equivale al sistema lineare di equazioni vettoriali:

$$\begin{cases} a_{11}\mathbf{X}_1 + a_{12}\mathbf{X}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{X}_n = \mathbf{B}_1 \\ a_{21}\mathbf{X}_1 + a_{22}\mathbf{X}_2 + \ldots + a_{2n}\mathbf{X}_n = \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{X}_1 + a_{m2}\mathbf{X}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{X}_n = \mathbf{B}_m, \end{cases}$$

con incognite le righe: $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$. Per il Teorema 1.2 di Rouchè–Capelli, essendo tale sistema equivalente ad un sistema lineare di $m \times p$ equazioni in $n \times p$ incognite, esso ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A e il rango della matrice completa $(A|B)$ coincidono. Si procede, pertanto, alla riduzione per righe della matrice completa:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{array} \right).$$

Si distinguono tre casi:

i) $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(A|B)$: non esistono soluzioni;

ii) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = n$ ossia il numero dei vettori incogniti: esiste una sola soluzione;

iii) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = k < n$: esistono infinite soluzioni che dipendono da $n - k$ vettori.

Esempio 3.12 Per determinare le soluzioni dell'equazione matriciale $AX = B$, con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

si procede con la riduzione per righe della matrice completa $(A|B)$, per esempio nel modo seguente:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{R_2 \to R_1 - 2R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

da cui si deduce che $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = 2$; si ottengono così infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero. Ponendo:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

la matrice $(A|B)$ ridotta per righe dà luogo al sistema ridotto:

$$\begin{cases} 2\mathbf{X}_1 + 3\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 = (1,2,2) \\ 3\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3 = (1,0,4) \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = (-3a+1, -3b+1, -3c+3) \\ \mathbf{X}_2 = (a,b,c) \\ \mathbf{X}_3 = (3a-1, 3b, 3c-4), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.4.1 Calcolo della matrice inversa, primo metodo

Come immediata conseguenza del paragrafo precedente procediamo al calcolo dell'eventuale matrice inversa di una matrice quadrata $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ risolvendo l'equazione matriciale

$$AX = I.$$

Dobbiamo, quindi, ridurre per righe la matrice completa:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

É evidente che $\text{rank}(A|I) = n$, infatti si ha l'importante:

Teorema 3.7 *Data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si ha:*

$$\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow rank(A) = n. \tag{3.10}$$

Dimostrazione: Se esiste A^{-1} allora $\text{rank}(A) = n$ é ovvia conseguenza dell'osservazione che precede l'enunciato del Teorema. Il viceversa non puó essere dimostrato a questo punto del corso, si rimanda, pertanto al Capitolo 11. Infatti se $\text{rank}(A) = n$ allora esiste una sola matrice $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che $AX = I$ (per il Teorema 1.2 di Rouché-Capelli), ma per dimostrare che anche $XA = I$ e dedurre quindi che $X = A^{-1}$ si deve risolvere l'equazione matriciale ${}^tA\,{}^tX = I$. Pertanto é necessario dimostrare che anche ${}^tA$ ha lo stesso rango di A, oggetto del Teorema 24.1 . ▮

Segue un esempio di calcolo della matrice inversa usando il metodo qui indicato. Un secondo metodo sará spiegato nel Paragrafo 24.1.

Esercizio 3.2 Se esiste, determinare l'inversa della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Procediamo alla riduzione per righe della matrice $(A|I)$, il calcolo del rango di A é contenuto in questo procedimento.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 \leftrightarrows R_3 \\ R_2 \leftrightarrows R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3 \to \frac{1}{2}R_3 \\ R_4 \to -R_4 + 2R_1}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 5 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{R_4 \to R_2 + R_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_4 \to 8R_3 + R_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

A questo punto dell'esercizio si deduce che $\operatorname{rank}(A) = 4$, pertanto la matrice A é invertibile. Per calcolare direttamente l'inversa conviene procedere riducendo ulteriormente la matrice a sinistra come descritto nell'Esempio 1.8 nel Capitolo 1. Dall'ultimo passaggio segue:

$$\underset{R_4 \to \frac{1}{5}R_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 + 3R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Si legge cosí a destra, nell'ultimo passaggio l'espressione di A^{-1}, infatti le operazioni di riduzione che iniziano dalla matrice completa $(A|I)$, essendo $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|I) = n$ non possono far altro che portare a $(I|A^{-1})$. In altri termini dall'equazione matriciale $AX = I$, moltiplicando a sinistra per A^{-1} si ottiene $IX = A^{-1}$.

Esercizio 3.3 Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esiste la sua inversa. Determinare esplicitamente A^{-1} quando possibile:

Procediamo, come nell'esercizio precedente, alla riduzione per righe della matrice completa $(A|I)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to hR_1 - R_2 \\ R_3 \to R_1 - R_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3h & h & 2h & h & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 \leftrightarrows R_3}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3h & h & 2h & h & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to 2R_3 - 3hR_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -h & -2h & -h & -2 & 3h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

a questo punto si deduce che $\operatorname{rank}(A) = 4$ se e solo se $h \neq 0$, quindi solo in questo caso esiste A^{-1}, assumiano perció $h \neq 0$ e procediamo con la riduzione per ottenere la matrice inversa:

$$\underset{\substack{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2 \\ R_3 \to -\frac{1}{h}R_3 \\ R_4 \to \frac{1}{h}R_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{2}{h} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{h} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{2}{h} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_1 \to R_1 + 3R_2 \\ R_3 \to R_3 - 2R_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{2}{h} & -3 & -\frac{2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{array}\right),$$

A^{-1} si legge a destra nell'ultimo passaggio di riduzione.

3.5 La traccia di una matrice quadrata

Definizione 3.8 *Sia A una matrice quadrata, di ordine n, ad elementi reali. Si definisce* **traccia** *di A, e si indica con $\mathrm{tr}(A)$ la somma degli elementi della sua diagonale principale. Se $A = (a_{ij})$ allora:*

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{3.11}$$

Si ha il seguente:

Teorema 3.8 *1.* $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$*;*

2. $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$*;*

3. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$*,*

per ogni $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione: É quasi un esercizio ed é riportata nel Capitolo 4

Come immediata conseguenza dell'ultimo punto del precedente teorema si ottiene:

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A), \tag{3.12}$$

per ogni $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e per ogni matrice invertibile P di $\mathbb{R}^{n,n}$, proprietá che sará molto importante nel Capitolo 18.

3.6 Il Determinante

Scopo di questo paragrafo é associare ad ogni matrice quadrata un numero particolare detto **determinante della matrice** in modo da dimostrare il seguente:

Teorema 3.9 *Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se il suo determinante non è nullo.*

Introdurremo la definizione di determinante in modo "sperimentale" senza troppo rigore matematico; per una discussione precisa e per la dimostrazione di tutte le proprietà si rimanda al Capitolo 23.

Il **determinante** di una matrice quadrata è una funzione $\det : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica queste prime proprietà:

1. Se a è un numero reale, ossia una matrice quadrata di ordine 1, allora $\det a = a$.
2. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ allora $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Osservando con attenzione lo sviluppo del determinante nel caso della matrice quadrata di ordine 2, si nota che compaiono 2 addendi, ciascuno dei quali è il prodotto di due fattori, ciascuno dei quali inizia con la sequenza $(1, 2)$ seguita dalle 2 permutazioni di $(1, 2)$: $(1, 2)$ e $(2, 1)$, la prima permutazione (pari) impone il segno positivo all'addendo $a_{11}a_{22}$, la seconda permutazione (dispari) impone il segno negativo all'addendo $a_{12}a_{21}$.

Possiamo così indovinare la legge del determinante di una matrice qualsiasi. Per capire meglio, controlliamo ancora il suo sviluppo del determinante nel caso delle matrici di ordine 3. L'esempio che segue riassume, nel caso particolare dell'ordine 3, la teoria dei determinanti delle matrici di ordine n che stiamo per esporre. Si consiglia di studiarlo con grande attenzione e farne riferimento per dimostrare le proprietá generali dei determinanti che verranno man mano esposte.

Esempio 3.13 È noto dal calcolo combinatorio che le permutazioni dei numeri $1, 2, 3$ sono $3! = 6$, tre di esse sono pari (le permutazioni circolari) e precisamente: $(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)$ e tre sono dispari: $(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)$.

Piú precisamente, se a partire dalla terna $(1,2,3)$ si perviene alla terna $(2,1,3)$ si é effettuato uno **scambio** che comporta un segno negativo associato alla permutazione $(2,1,3)$; effettuati due scambi si ha segno positivo e cosí via. Per meglio visualizzare le permutazioni e contare il numero degli scambi intermedi in modo da ottenere il segno della permutazione finale é utile la classica notazione del calcolo combinatorio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Infatti una permutazione di $1,2,3$ non é altro che una funzione biiettiva dall'insieme $\{1,2,3\}$ in sé.

Parafrasando lo sviluppo del determinante di una matrice quadrata di ordine 2, "indoviniamo" lo sviluppo del determinate di una matrice quadrata di ordine 3, ponendo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \Sigma_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

dove σ indica una qualsiasi permutazione dei numeri $1,2,3$ e $\epsilon(\sigma)$ il suo segno. Si osserva che, per costruzione, ogni addendo contiene un elemento appartenente a ciascuna riga e a ciascuna colonna, in altri termini in ogni addendo non esistono due elementi appartenenti ad una stessa riga o ad una stessa colonna.

Possiamo, quindi, enunciare la definizione di determinante di una matrice quadrata di ordine n.

Definizione 3.9 *Il* **determinante** *di una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n é dato da:*

$$\det A = \Sigma_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}, \tag{3.13}$$

dove σ indica una qualsiasi permutazione dei numeri $1,2,\ldots,n$ e $\epsilon(\sigma)$ é il suo segno.

Da questa definizione di deducono le seguenti proprietá.

Teorema 3.10
1. *Sia A una matrice quadrata di ordine n avente una riga (oppure una colonna) formata da tutti 0, allora $\det A = 0$.*
2. *$\det A = \det {}^tA$. Da questa proprietá segue che ogni affermazione dimostrata per le righe di una matrice é anche valida per le colonne.*
3. *Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é una matrice triangolare superiore allora $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, la stessa proprietá vale nel caso di una matrice triangolare inferiore.*

Dimostrazione: 1. É una ovvia conseguenza della Definizione 3.9 e dell'osservazione nell'Esempio 3.13.

2. Consideriamo il caso del determinante di una matrice di ordine 2, il caso generale é una generalizzazione di questo ragionamento. Come giá osservato, in questo caso: $\det A = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$, mentre

$$\det {}^tA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} = \det A;$$

infatti il determinante della matrice trasposta si ottiene semplicemente applicando la proprietá commutativa del prodotto ad ogni addendo.

3. Dimostriamo per semplicitá la proprietá nel caso di $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ e lasciamo al lettore la dimostrazione nel caso generale. Sia:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

dalla definizione di determinante (3.13) si ha:

$$\det A = \Sigma_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)}.$$

L'unico elemento non nullo dell'ultima riga é a_{44}, quindi la formula precedente si riduce a:

$$\det A = \Sigma_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{44}, \tag{3.14}$$

con σ permutazione dei numeri $1, 2, 3$. Di nuovo, l'unico elemento non nullo di tale somma, appartenente alla terza riga, é a_{33}, quindi (3.14) si riduce a:

$$\det A = \Sigma_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{33} a_{44}$$

con σ permutazione dei numeri $1, 2$. Procedendo allo stesso modo si perviene alla tesi . ▮

É di importanza fondamentale il teorema che segue:

Teorema 3.11 *Sia A una matrice quadrata di ordine n ridotta per righe, allora:*

$$rank(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \tag{3.15}$$

e, analogamente:

$$rank(A) < n \Leftrightarrow \det A = 0. \tag{3.16}$$

Dimostrazione: Ovvia dal fatto che il determinante di una matrice quadrata ridotta per righe é data dal prodotto degli elementi della diagonale principale, come osservato nel Teorema 3.10.

Il teorema che segue permette di estendere il risultato precedente ad una matrice qualsiasi.

Teorema 3.12

1. *Moltiplicare il determinante di una matrice per un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ equivale a moltiplicare tutti gli elementi di una sua riga (o di una sua colonna) per λ.*

2. *Scambiare tra di loro due righe (o due colonne) di una matrice equivale a cambiare segno al suo determinante.*

3. *Una matrice con due righe (o due colonne) uguali ha determinante nullo.*

4. *Se alla riga R_i di una matrice si sostituisce la particolare combinazione lineare $R_i + \lambda R_j$ (dove R_j indica una riga parallela) il determinante non cambia, analoga proprietá vale per le colonne.*

Dimostrazione:

1. É ovvio dalla definizione di determinante.

2. É conseguenza della definizione di determinante e del fatto che lo scambio di due righe comporta il cambiamento di segno di ciascuna permutazione. Per esempio, nel caso della matrice quadrata di ordine 2 si ha:

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

   invece

   $$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}.$$

3. Segue dalla proprietá precedente, infatti scambiando le due righe (colonne) uguali si ottiene la stessa matrice, se prima dello scambio il suo determinate era λ, dopo lo scambio esso diventerá $-\lambda$ (per la proprietá precedente), ma poiché la matrice non cambia $\lambda = -\lambda$, da cui la tesi.

4. Calcoliamo il determinante di una matrice quadrata di ordine n mettendo in evidenza le sue righe e l'operazione richiesta.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_i + \lambda \mathbf{R}_j \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_i \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}$$

l'uguaglianza precedente é una evidente conseguenza della definizione di determinante, quindi la tesi segue dalla terza proprietá . ∎

Come ovvia conseguenza del teorema precedente si ha:

Teorema 3.13 *Sia A una matrice quadrata di ordine n allora:*

$$rank(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \tag{3.17}$$

e, analogamente:

$$rank(A) < n \Leftrightarrow \det A = 0. \tag{3.18}$$

Osservazione 3.5 Quando si riduce una matrice quadrata allo scopo di calcolarne il determinante si puó procedere (a differenza del caso del calcolo del rango) operando indifferentemente sia sulle righe sia sulle colonne.

Esercizio 3.4 Calcolare il determinante della seguente matrice, riducendola a forma triangolare superiore:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per esempio si puó procedere come segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrows C_2}{\longrightarrow} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_1}}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - \frac{1}{4}R_2}}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} \underset{\substack{R_3 \to -R_3 \\ R_4 \to 4R_4}}{\longrightarrow} -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_4 \to R_4 - R_3}{\longrightarrow} -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7$$

Il Teorema che segue stabilisce importanti proprietá del determinante in relazione al prodotto di una matrice per uno scalare, al prodotto di matrici e alla somma di matrici.

Teorema 3.14 *1.* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,n}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$*;*

2. **Teorema di Binet***:* $\det(AB) = \det A \det B, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$*;*

3. Se A é una matrice invertibile, allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$*;*

4. In generale: $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ *con* $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Dimostrazione:

1. É ovvia dalla Definizione 3.4 di prodotto di un numero reale per una matrice e dalla definizione (3.9) di determinante.

2. Si tratta di una proprietá sorprendente e di difficile dimostrazione. É vera nel caso di matrici triangolari superiori, ricordando che il prodotto di due matrici triangolari superiori é ancora una matrice dello stesso tipo e che il determinante di una matrice triangolare superiore é il prodotto degli elementi della diagonale principale (lo stesso é anche vero nel caso delle matrici triangolari inferiori). Nel capitolo 18 si dimostrerá questa proprietá nel caso delle matrici diagonalizzabili, ma solo nel Capitolo 23 si arriverá ad una dimostrazione in generale.

3. É una conseguenza del Teorema di Binet applicato a $AA^{-1} = I$ con I matrice unitá. Si ha $\det A \det A^{-1} = \det I = 1$ da cui la tesi. Si deduce, da tale proprietá, che:

$$\text{se } A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ é invertibile, allora } \det A \neq 0.$$

4. É sufficiente un controesempio, si considerino a questo scopo le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. ∎

3.6.1 I Teoremi di Laplace

Esempio 3.14 Consideriamo lo sviluppo del determinate di una matrice di ordine tre descritto nell'Esempio 3.13 e svolgiamo qualche calcolo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Il calcolo precedente permette di indovinare una regola di calcolo del determinante, valida per le matrici di ordine n. Per fare ció conviene introdurre alcune definizioni.

Definizione 3.10 *Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, si chiama* **minore** *dell'elemento a_{ij} della matrice A il determinante M_{ij} della matrice di ordine $n - 1$ che si ottiene da A togliendo l'i-esima riga e la j-esima colonna.*

Esempio 3.15 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

il minore M_{12} é:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 64.$$

Definizione 3.11 *Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, si chiama* **cofattore** *o* **complemento algebrico** *dell'elemento a_{ij} il numero C_{ij} definito da:*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Esempio 3.16 Nell'Esempio 3.15 il cofattore dell'elemento a_{12} è $C_{12} = -M_{12} = -64$.

L'Esempio 3.14 suggerisce il seguente importante teorema per il calcolo del determinante di una matrice quadrata.

Teorema 3.15 Primo Teorema di Laplace. *Il determinante di una matrice quadrata $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ è dato da:*

$$\det A = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \Sigma_{h=1}^{n} a_{hj} C_{hj}. \tag{3.19}$$

In altri termini, fissata la riga i-esima, $\det A$ si ottiene moltiplicando gli elementi di tale riga per i rispettivi cofattori, inoltre tale calcolo non dipende dalla riga scelta. L'ultimo membro di (3.19) afferma che tale proprietà vale anche per la j-esima colonna.

Dimostrazione: È un calcolo che segue da (3.13), allo stesso modo con cui è stato condotto nell'Esempio 3.14.

Esempio 3.17 Usiamo il Primo Teorema di Laplace per calcolare il determinante della matrice oggetto dell'Esercizio 3.4. La presenza del numero 0 al posto (42) di tale matrice suggerisce di sviluppare il determinante rispetto alla seconda colonna oppure rispetto alla quarta riga. Scriviamo esplicitamente entrambi i calcoli:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$-2 \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix},$$

si lascia la conclusione dei calcoli al lettore, osservando però che la determinazione dello stesso determinante condotta nell'Esercizio 3.4 è stato molto più agevole.

Teorema 3.16 Secondo Teorema di Laplace. *In una matrice quadrata $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i cofattori di una riga (o una colonna) parallela é zero, in formule:*

$$\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk} = \Sigma_{h=1}^{n} a_{hi} C_{hj} = 0, \quad i \neq j. \tag{3.20}$$

Dimostrazione: É una evidente conseguenza del Teorema 3.12, secondo punto, infatti (3.20) si puó interpretare come lo sviluppo del determinante di un matrice in cui, nel primo caso, la riga j-esima coincide con la riga i-esima e nel secondo caso, la colonna j-esima coincide con la riga i-esima . ▮

3.6.2 Calcolo della matrice inversa, secondo metodo

In questo paragrafo si introdurrà un altro metodo di calcolo della matrice inversa A^{-1} di una matrice data A, facendo uso della nozione di determinante. Iniziamo, a tale, scopo, con la definizione di una matrice particolare associata ad una qualsiasi matrice quadrata A.

Definizione 3.12 *Data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, si consideri la matrice $B = (C_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ avente ordinatamente come elementi i cofattori di A, la trasposta di tale matrice prende il nome di* **aggiunta** *di A e si indica con* $\mathrm{adj}(A)$.

Esempio 3.18 Data:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

la sua aggiunta è

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.17 *Sia A una matrice quadrata di ordine n, se $\det A \neq 0$ allora esiste l'inversa di A e:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A). \tag{3.21}$$

Dimostrazione: Sia $B = (b_{ij}) = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A)$, il teorema é dimostrato se $AB = (c_{ij}) = I$, in altri termini se $c_{ij} = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} é il simbolo di Kronecker, ossia $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0,\ i \neq j$. Calcoliamo:

$$c_{ii} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ik} = \frac{1}{\det A}\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = \frac{1}{\det A}\det A = 1;$$

la precedente uguaglianza segue dal Primo Teorema di Laplace.

$$c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk} = \frac{1}{\det A}\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}C_{jk} = 0$$

per il Secondo Teorema di Laplace . ▮

Osservazione 3.6 Il Teorema precedente, insieme con il Teorema 3.14 e il Teorema 3.11 permettono di concludere che, nel caso di una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n. \tag{3.22}$$

Esempio 3.19 È agevole applicare il metodo di calcolo della matrice inversa appena introdotto nel caso di una matrice quadrata di ordine 2, infatti se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e $\det A \neq 0$ allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}.$$

Esempio 3.20 Considerata la matrice A descritta nell'Esempio 3.2, calcoliamone l'inversa usando il procedimento descritto. Si tratta di calcolarne il determinante e poi 16 determinanti di matrici quadrate di ordine 3, quindi la matrice aggiunta. Si ottiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 & 2 & 2 \\ 15 & 0 & -10 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.6.3 Il Teorema di Cramer

É conseguenza del paragrafo precedente un metodo di calcolo che permette di risolvere i sistemi lineari che hanno il numero delle equazioni pari al numero delle incognite, del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.23}$$

La matrice dei coefficienti $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ é quadrata, se $\det A \neq 0$ allora il sistema (3.23) é compatibile (questa affermazione segue dal Teorema 1.2 di Rouché–Capelli), in notazione matriciale (cfr. Paragrafo 3.2.1) (3.23) diventa:

$$AX = B, \tag{3.24}$$

dove $X \in \mathbb{R}^{n,1}$ é la matrice dei coefficienti e $B \in \mathbb{R}^{n,1}$. Poiché $\det A \neq 0$, A é invertibile, possiamo moltiplicare ambo i membri di (3.24) per A^{-1}, ottenendo cosí:

$$X = A^{-1}B. \tag{3.25}$$

Dal Teorema 3.17, sostituendo l'espressione di A^{-1}, si ha:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

da cui, uguagliando, si ricava:

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e, in generale:

$$x_i = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dove l'i-esima colonna é quella dei termini noti. La formula precedente, che permette di determinare le soluzioni (una per volta) del sistema lineare del tipo (3.23) avente $\det A \neq 0$, è nota come **Teorema di Cramer**.

Esempio 3.21 Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

quindi esiste una sola soluzione che può essere determinata usando il Teorema di Cramer nel modo seguente:

$$x_1 = \frac{1}{28}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{28}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{28}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Non é difficile osservare che il il Teorema di Cramer, appena dimostrato nel caso dei sistemi lineari compatibili, aventi peró lo stesso numero di equazioni e di incognite, puó essere agevolmente esteso anche ad un qualsiasi sistema lineare compatibile, infatti vale il Teorema seguente.

Teorema 3.18 *Ogni sistema lineare compatibile é di Cramer.*

Dimostrazione: Sia $AX = B$ un sistema compatibile con $A \in \mathbb{R}^{m,n}, X \in \mathbb{R}^{n,1}, B \in \mathbb{R}^{n,1}$ e sia $r = \text{rank}(A, B)$. Non é restrittivo supporre che le prime r righe della matrice completa siano l.i. (eventualmente permutando l'ordine delle equazioni). Supponiamo, quindi, di avere un sistema equivalente ad $AX = B$ con matrice completa (A', B'). Dalla matrice A' é possibile estrarre una matrice quadrata C di ordine r con determinante non nullo. Portando a secondo membro le colonne di A' diverse da quelle di C si ottiene la matrice completa di un sistema di Cramer . ∎

Esempio 3.22 Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 0, \end{cases}$$

osservato che il rango della matrice dei coefficienti é 2 e assunta z come incognita libera, il sistema dato si puó scrivere:

$$\begin{cases} x + 3y = -z - 1 \\ -x + 2y = z. \end{cases}$$

Tale sistema (quadrato) é di Cramer perché $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$. Le soluzioni sono:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z-1 & 3 \\ z & 2 \end{vmatrix}}{5} = -z - \frac{2}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z-1 \\ -1 & z \end{vmatrix}}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Capitolo 4

Per saperne di piú sulle matrici

Esercizio 4.1 Si dimostri che:

$$(AB)C = A(BC), \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n,p}, \forall C \in \mathbb{R}^{p,l}.$$

Soluzione: Siano $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,p}$, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{p,l}$; Allora $AB = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,p}$ e $d_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. $(AB)C = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,l}$ con $e_{ij} = \Sigma_{h=1}^{p} d_{ih}c_{hj} = \Sigma_{h=1}^{p}(\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh})c_{hj} = \Sigma_{h=1}^{p}\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}c_{hj}$ che é l'espressione del generico elemento della matrice a primo membro. Per il secondo membro si ha: $BC = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,l}$ con $f_{ij} = \Sigma_{h=1}^{p} b_{ih}c_{hj}$, quindi: $A(BC) = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,l}$ dove $g_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}f_{kj} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}(\Sigma_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj}) = \Sigma_{k=1}^{n}\Sigma_{h=1}^{p} a_{ik}b_{kh}c_{hj}$, da cui segue la tesi.

Esercizio 4.2 Si dimostri che:

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,p}, \ \forall B \in \mathbb{R}^{p,m}.$$

Soluzione: Date la matrici $A = (a_{ij})$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,p$ e $B = (b_{ij})$, $i = 1,\dots,p$, $j = 1,\dots,m$, il loro prodotto é la matrice $C = AB = (c_{ij})$, $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$ di $\mathbb{R}^{n,m}$ dove $c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$. La matrice a primo membro ${}^t(AB) = (d_{ij})$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ di $\mathbb{R}^{m,n}$ ha elementi del tipo: $d_{ij} = c_{ji} = \Sigma_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}$.
La matrice ${}^tA = (e_{ij})$, $i = 1,\dots,p$, $j = 1,\dots,n$ di $\mathbb{R}^{p,n}$ ha elementi del tipo: $e_{ij} = a_{ji}$. La matrice ${}^tB = (f_{ij})$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,p$ di $\mathbb{R}^{m,p}$ ha elementi del tipo: $f_{ij} = b_{ji}$. La matrice prodotto ${}^tB\,{}^tA = (g_{ij}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ di $\mathbb{R}^{m,n}$ ha elementi del tipo: $g_{ij} = \Sigma_{k=1}^{p} f_{ik}e_{kj} = \Sigma_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk} = \Sigma_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}$, da cui la tesi.

Esercizio 4.3 Si dimostri che:

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}),$$

per ogni matrice invertibile $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Soluzione: Si tratta di dimostrare che ${}^t(A^{-1})$ é l'inversa di $({}^tA)$, infatti:

$${}^t(A^{-1})({}^tA) = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI = I.$$

Esercizio 4.4 Dimostrare le principali proprietá delle matrici ortogonali.

Soluzione: Il prodotto di due matrici ortogonali é una matrice ortogonale, infatti se ${}^tAA = I$ e ${}^tBB = I$, allora ${}^t(AB)(AB) = {}^tB({}^tAA)B = {}^tBB = I$.
In modo analogo si dimostra che l'inversa di una matrice ortogonale é una matrice ortogonale.
Da ${}^tA = A^{-1}$ segue $A = {}^t(A^{-1})$ da cui si ottiene che anche ${}^tA$ é una matrice ortogonale.

Il determinante di una matrice ortogonale vale ± 1, infatti da ${}^tAA = I$ segue $\det(A)^2 = 1$. D'altra parte esistono matrici aventi determinante ± 1 senza essere ortogonali, per esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si osservi che la matrice unitá I é ortogonale, ma $2I$ non lo é, quindi l'insieme delle matrici ortogonali non é chiuso rispetto alla somma, ovviamente neanche rispetto al prodotto per scalari.

Esercizio 4.5 Dimostrare che:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Soluzione: Gli elementi della diagonale principale del prodotto AB sono $c_{ii} = \Sigma_{h=1}^n a_{ih} b_{hi}$, quindi:

$$\mathrm{tr}(AB) = \Sigma_{l=1}^n c_{ll} = \Sigma_{h,l=1}^n a_{lh} b_{hl}.$$

D'altra parte, siano d_{ii} gli elementi della diagonale principale del prodotto BA, si ha: $d_{ii} = \Sigma_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}$, la traccia diventa:

$$\mathrm{tr}(BA) = \Sigma_{m=1}^n d_{mm} = \Sigma_{m,k=1}^n b_{mk} a_{km}$$

da cui segue la tesi.

Capitolo 5

Matrici e Determinanti – Esercizi

5.1 Esercizi

[1] Dopo aver verificato che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

è invertibile, calcolare A^{-1}.

[2] Dopo aver verificato che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile, calcolare A^{-1}.

[3] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & h \end{pmatrix},$$

al variare del parametro reale h discutere l'esistenza della matrice A^{-1} e calcolarla, quando è possibile, usando due metodi diversi.

[4] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

determinare i valori di h per cui A è invertibile, e in questi casi, scrivere A^{-1}.

[5] i) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.
ii) Posto $h = 0$, determinare l'inversa di A.

[6] Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ h+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Calcolare il determinante delle seguenti matrici, riducendole, eventualmente, a forma triangolare superiore.

[7] $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

[8] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 6 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

[9] $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

[10] $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

[11] $A = \begin{pmatrix} k+1 & k+2 & k+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1-2k & 2-2k & 3-2k \end{pmatrix}.$

[12] $A = \begin{pmatrix} x & x-1 & x-2 \\ 1-x & 2-x & 3-x \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

---

[13] Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix},$$

determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$, al variare di a in $\mathbb{R}$. Quando é possibile effettuare il calcolo delle soluzioni anche usando il Teorema di Cramer.

[14] Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a^2-14 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ a+2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

determinare le soluzioni del sistema lineare $AX = B$, al variare di a in $\mathbb{R}$. Quando é possibile effettuare il calcolo delle soluzioni anche usando il Teorema di Cramer.

[15] Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 1 & -2 \\ 6 & -9 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

determinare le soluzioni dei sistemi lineari $AX = B_1$, $AX = B_2$, $AX = B_3$.

[16] Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare, al variare di h in campo reale:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2h & 3-2h^2 \\ 1 & h & 2 \\ -1 & h & 1-h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

[17] Al variare dei parametri reali h e k, determinare, quando esiste, una matrice X tale che:

$$XA = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

[18] Al variare dei parametri reali h e k, determinare, quando esiste, una matrice X tale che:

$$XA = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & h & 2h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

[19] Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ h & k \end{pmatrix} \quad h,k \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $h,k \in \mathbb{R}$ l'equazione matriciale $AX = B$ è compatibile e determinare, quando è possibile, le soluzioni di tale equazione.

[20] Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere, quando è possibile, l'equazione matriciale $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \\ \lambda + 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[21] Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere, quando è possibile, l'equazione matriciale $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \\ \lambda + 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[22] Stabilire per quali valori di h e k in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni matriciali:

$$AX = B, \quad X'A = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & k & h+k \end{pmatrix},$$

sono compatibili. Determinare, quando è possibile, le loro soluzioni.

[23] Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ h & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & k \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

determinare, al variare di $h,k \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione matriciale $AX = B$.

[24] Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere, quando possibile, l'equazione matriciale:

$$AX = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & \lambda & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ \mu - 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

[25] Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & h & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \\ k & -1 \end{pmatrix},$$

determinare, al variare di $h,k \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione $AX = B$.

[26] Risolvere la seguente equazione matriciale: $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \\ -1 & h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

[27] Risolvere la seguente equazione matriciale: $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -1 \\ 1+k & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

[28] Stabilire per quali valori di h e k in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni matriciali:

$$AX = B, \quad X'A = B,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & h & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3h & -6 \end{pmatrix}$$

sono compatibili. Determinare, quando é possibile, le loro soluzioni.

[29] Risolvere, in campo reale, l'equazione matriciale $AX = B$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -8 & -1 \\ 6 & -7 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

5.2 Soluzioni

[1]

```
A = {{1, 2, 0}, {-1, 2, 2}, {1, -1, -1}};

Det[A]
2

MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

[2]

```
A = {{1, 3, -1}, {2, 1, -1}, {2, -1, 0}};

Det[A]
-3

MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det A = -3, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

[3]

```
A = {{1, 2, 3}, {0, 1, 2}, {-1, 4, h}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h -> 9}}

MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{-8+h}{-9+h} & \frac{12-2h}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \\ -\frac{2}{-9+h} & \frac{3+h}{-9+h} & -\frac{2}{-9+h} \\ \frac{1}{-9+h} & -\frac{6}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \end{pmatrix}$$

Esiste A^{-1} per ogni $h \neq 9$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-8+h}{-9+h} & \frac{12-2h}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \\ \frac{-2}{-9+h} & \frac{3+h}{-9+h} & \frac{-2}{-9+h} \\ \frac{1}{-9+h} & \frac{-6}{-9+h} & \frac{1}{-9+h} \end{pmatrix}.$$

[4]

```
A = {{1, -3, 1, 2}, {h, 0, 0, 0}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, h}};
Solve[Det[A] == 0]
{{h → 0}, {h → 0}}
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & -\frac{2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

Esiste A^{-1} per ogni $h \neq 0$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & \frac{-2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

[5]

```
A = {{1, 2, 1, 1}, {2, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, h}, {3, 2, 1, 1}};
Solve[Det[A] == 0]
{{h → 1}}
MatrixForm[Inverse[A /. h → 0]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i) Esiste A^{-1} per ogni $h \neq 1$;

ii) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

[6]

```
A = {{0, h, 1, 0}, {0, 1, 2, 1}, {h + 1, 0, 0, 0}, {0, 2, 1, 3}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → -1}, {h → 1/5}}
```

A è invertibile per $h \notin \left\{-1, \dfrac{1}{5}\right\}$.

[7]

```
A = {{0, 2, -1, -3}, {4, 1, 0, 0}, {2, -1, 1, 0}, {1, 0, -2, 0}};

Det[A]
39
```

$\det A = 39$.

[8]

```
A = {{1, 2, 3, 4, -1}, {5, -2, 6, 0, -1},
   {2, -3, 4, -1, 7}, {0, 1, 2, 3, 4}, {1, -1, 0, 0, 0}};

Det[A]
93
```

$\det A = 93$.

[9]

```
A = {{0, 0, 0, 1, 2}, {1, 3, 2, -1, 0},
   {4, 3, 2, 1, 5}, {1, -1, 2, 1, 3}, {0, 2, 3, -1, 4}};

Det[A]
99
```

$\det A = 99$.

[10]

```
A = {{1, -2, 3, -4}, {-2, 3, -4, 1}, {3, -4, 1, -2}, {-4, 1, -2, 3}};

Det[A]
160
```

$\det A = 160$.

[11]

```
A = {{k + 1, k + 2, k + 3}, {1, 2, 3}, {1 - 2k, 2 - 2k, 3 - 2k}};

Det[A]
0
```

$\det A = 0$.

[12]

```
A = {{x, x - 1, x - 2}, {1 - x, 2 - x, 3 - x}, {4, 5, 6}};
Det[A]
0
```

$\det A = 0$.

[13]

```
A = {{1, 1, 0}, {1, 0, -1}, {0, -1, a^2 - 2}};
X = {x1, x2, x3}; B = {2, 3, a};
Reduce[A.X == B, X]
a == 1&&x1 == 3 + x3&&x2 == -1 - x3||
  x1 == (4 + 3 a)/(1 + a)&&x2 == (-2 - a)/(1 + a)&&x3 == 1/(1 + a)&& - 1 + a ≠ 0&&1 + a ≠ 0
```

Se $a \notin \{-1, 1\}$: esiste una sola soluzione;
se $a = -1$: non esistono soluzioni;
se $a = 1$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[14]

```
A = {{2, -3, 1}, {1, a^2 - 14, 4}, {-1, 5, 3}};
X = {x1, x2, x3}; B = {4, a + 2, 2};
Reduce[A.X == B, X]
a == 4&&x1 == 2/7 (5 + 7 x2)&&x3 == 1/7 (8 - 7 x2)||
  x1 == (2 (27 + 5 a))/(7 (4 + a))&&x2 == 1/(4 + a)&&x3 == (25 + 8 a)/(7 (4 + a))&& - 4 + a ≠ 0&&4 + a ≠ 0
```

Se $a \neq \pm 4$: esiste una sola soluzione;
se $a = -4$: non esistono soluzioni;
se $a = 4$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[15]

```
A = {{2, -3, -2, 1}, {4, -6, 1, -2}, {6, -9, -1, -1}};
X = {x1, x2, x3, x4}; B1 = {1, 2, 0}; B2 = {1, 2, 3}; B3 = {0, 0, 0};
Reduce[A.X == B1, X]
False
Reduce[A.X == B2, X]
x1 == 1/10 (5 + 15 x2 + 3 x4)&&x3 == (4 x4)/5
Reduce[A.X == B3, X]
x1 == 3/10 (5 x2 + x4)&&x3 == (4 x4)/5
```

$AX = B_1$ è incompatibile, $AX = B_2$ ammette infinite soluzioni (non nulle) che dipendono da due incognite libere:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$AX = B_3$ ammette infinite soluzioni (compresa la soluzione nulla) che dipendono da due incognite libere:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

[16]

```
Reduce[{{-1, 2h, 3 - 2h^2}, {1, h, 2}, {-1, h, 1 - h^2}}.{x1, x2, x3} ==
   {2h, 1, h}, {x1, x2, x3}]
h == 1&&x1 == -x3&&x2 == 1 - x3 ||
  x1 == 1/(1 + h)&&x2 == (2 + h)/(h (1 + h))&&x3 == 1/(-1 - h)&& - 1 + h ≠ 0&&h ≠ 0&&1 + h ≠ 0
```

Se $h \notin \{-1, 0, 1\}$: $x_1 = \dfrac{1}{1+h}$, $x_2 = \dfrac{2+h}{h(1+h)}$, $x_3 = \dfrac{1}{-1-h}$;

se $h = 1$: $x_1 = -t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$.
se $h = -1$ e $h = 0$ il sistema è incompatibile.

[17]

```
a = {{1, 2}, {0, 1}, {3, 5}, {0, h}}; b = {{3, 1}, {-1, 2}, {k, 0}};
x = {{x1, x2, x3, x4}, {x5, x6, x7, x8}, {x9, x10, x11, x12}};
Reduce[Transpose[a].Transpose[x] == Transpose[b]]
k == 3 x11 + x9&&x1 == -3 (-1 + x3)&&x10 == -5 x11 - h x12 - 2 x9&&
  x2 == -5 + x3 - h x4&&x5 == -1 - 3 x7&&x6 == 4 + x7 - h x8
```

$$X = \begin{pmatrix} 3-3a & -5+a-hd & a & d \\ -1-3b & 4+b-he & b & e \\ k-3c & -2k+c-hf & c & f \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f, h, k \in \mathbb{R}.$$

[18]

```
a = {{1, 2, 3}, {-1, h, 2h}};
b = {{0, 1, -1}, {-2, 1, 0}, {-3, 0, k}, {0, 0, k}};
x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[Transpose[a].Transpose[x] == Transpose[b]]
False
```

L'equazione matriciale è incompatibile, per ogni $h, k \in \mathbb{R}$.

[19]

```
a = {{5, 1, 0}, {3, 0, 1}, {4, -1, 3}};
b = {{2, 1}, {2, 0}, {h, k}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
h == 4&&k == -1&&x3 == 2 - 5 x1&&x4 == 1 - 5 x2&&x5 == 2 - 3 x1&&x6 == -3 x2
```

Se $h \neq 4$ o $k \neq -1$: non esistono soluzioni;

se $h = 4$ e $k = -1$: l'equazione matriciale ha infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2-5a & 1-5b \\ 2-3a & -3b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

[20]

```
a = {{l, 1, -1}, {0, 2, 1}, {0, 1, l}};
b = {{l, 1}, {0, 1}, {l + 2, 0}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
```

$$x1 == \frac{2\,(3 + l + l^2)}{l\,(-1 + 2\,l)} \&\&x2 == \frac{-2 + l}{l\,(-1 + 2\,l)} \&\& x3 == \frac{-2 - l}{-1 + 2\,l} \&\&x4 == \frac{l}{-1 + 2\,l} \&\&x5 == \frac{2\,(2 + l)}{-1 + 2\,l} \&\&x6 == \frac{1}{1 - 2\,l}$$

Se $\lambda \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$: non esistono soluzioni;

se $\lambda \notin \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$: allora $X = \begin{pmatrix} \dfrac{-2(\lambda^2 + \lambda + 3)}{\lambda(1-2\lambda)} & \dfrac{2-\lambda}{\lambda(1-2\lambda)} \\ \dfrac{\lambda+2}{1-2\lambda} & \dfrac{-\lambda}{1-2\lambda} \\ \dfrac{-2(\lambda+2)}{1-2\lambda} & \dfrac{1}{1-2\lambda} \end{pmatrix}$.

[21]

```
a = {{l, 1}, {1, 2}, {-1, l}};
b = {{l, 1}, {0, 0}, {l + 2, 0}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Reduce[a.x == b]
```

$$l == -2 \&\&x1 == \frac{4}{5} \&\&x2 == -\frac{2}{5} \&\&x3 == -\frac{2}{5} \&\&x4 == \frac{1}{5}$$

Se $\lambda \neq -2$: non esistono soluzioni;

se $\lambda = -2$: $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

[22]

```
a = {{3, -1}, {1, 2}, {2, h}}; b = {{1, 1, -1}, {0, 1, 3}, {0, k, h + k}};
x = {{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
h == 4&&k == 2&&x1 == 2/7&&x2 == 3/7&&
  x3 == 1/7&&x4 == -1/7&&x5 == 2/7&&x6 == 10/7
```

Se $h \neq 4$ o $k \neq 2$: l'equazione matriciale $AX = B$ é incompatibile;

se $h = 4$ e $k = 2$: $X = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

L'equazione $X'A = B$ è priva di significato.

[23]

```
a = {{2, -1}, {h, 2}, {1, 0}}; b = {{3, -1, k}, {-2, 0, -3}, {4, -k, 1}};
x = {{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}};
Reduce[a.x == b]
h == -3&&k == 2&&x1 == 4&&
  x2 == -2&&x3 == 1&&x4 == 5&&x5 == -3&&x6 == 0
```

Se $h \neq -3$ o $k \neq 2$: l'equazione matriciale é incompatibile;

se $h = -3$ e $k = 2$: $X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

[24]

```
a = {{1, 2, 1, -3}, {0, 3, 1, 5}, {1, l, 0, -8}};
b = {{2, 1}, {0, 1}, {m - 3, 0}};
x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}, {x7, x8}};
Reduce[a.x == b]
l == -1&&m == 5&&x1 == 2 + x3 + 8 x7&&
   x2 == x4 + 8 x8&&x5 == -3 x3 - 5 x7&&x6 == 1 - 3 x4 - 5 x8 ||
  m == 5 + x3 + l x3&&x1 == 2 + x3 + 8 x7&&x2 == 8 x8&&
   x4 == 0&&x5 == -3 x3 - 5 x7&&x6 == 1 - 5 x8&&1 + l ≠ 0
```

Se $\lambda \neq -1$: l'equazione matriciale ammette infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero:
$X_4 = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R}$;
se $\lambda = -1,\ \mu \neq 5$: non esistono soluzioni;
se $\lambda = -1,\ \mu = 5$: esistono infinite soluzioni che dipendono da due vettori liberi:
$X_4 = (a, b),\ X_3 = (c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

[25]

```
a = {{1, -1, 2, 3}, {-1, 0, 5, 6}, {3, h, -1, 0}};
b = {{1, -1}, {5, -3}, {k, -1}};
x = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}, {x7, x8}};
Reduce[a.x == b]
```

$$k == -3 + 2\,x3 + h\,x3 \&\& x1 == \frac{1}{3}\,(-3 + 2\,x3 + x5) \&\& x2 == \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{2+h} + x6\right) \&\& \; x4 == -\frac{2}{2+h} \&\& x7 == \frac{1}{9}\,(6 + x3 - 7\,x5) \&\& x8 == \frac{1}{9}\left(-4 - \frac{2}{2+h} - 7\,x6\right)$$

Se $h = -2$: non esistono soluzioni; se $h \neq -2$: esistono infinite soluzioni che dipendono da un vettore libero: $X_4 = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R}$.

[26]

```
A = {{1, 1}, {2, k}, {-1, h}};
B = {{0, -1}, {1, 1}, {0, k}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Reduce[A.X == B]
h == -1&&k == 1&&x1 == 1&&x2 == 2&&x3 == -1&&x4 == -3
```

Se $h = -1$ e $k = 1$: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; in tutti gli altri casi non esistono soluzioni.

[27]

```
A = {{1, 1}, {h, -1}, {1 + k, 3}};
B = {{-1, 0}, {k, 0}, {0, 1}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Reduce[A.X == B, {x1, x2, x3, x4}]
h == -1&&k == 1&&x1 == -3&&x2 == -1&&x3 == 2&&x4 == 1
```

Se $h = -1$ e $k = 1$: $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; in tutti gli altri casi non esistono soluzioni.

[28]

```
A = {{1, 0, -1}, {2, 1, 3}, {-4, h, k}};
B = {{1, -3}, {1, 0}, {3h, -6}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}, {x5, x6}};
Reduce[A.X == B, {x1, x2, x3, x4, x5, x6}]
```

$$x1 == \frac{h-k}{4+5\,h-k} \&\& x2 == -\frac{3\,(-2+3\,h-k)}{4+5\,h-k} \&\& \; x3 == \frac{16+15\,h+k}{4+5\,h-k} \&\& x4 == -\frac{6\,(11+k)}{4+5\,h-k} \&\& x5 == -\frac{4\,(1+h)}{4+5\,h-k} \&\& \; x6 == \frac{6\,(3+h)}{4+5\,h-k} \&\& 3+h \neq 0 \&\& -4-5\,h+k \neq 0 \,||$$
$$h == -3 \&\& x1 == \frac{3+k}{11+k} \&\& x2 == -3 \&\& x3 == \frac{29-k}{11+k} \&\& x4 == 6 \&\& \; x5 == -\frac{8}{11+k} \&\& x6 == 0 \&\& 11+k \neq 0 \&\& -4-5\,h+k \neq 0$$

$X'A = B$ non ha senso.

$AX = B$ ammette una soluzione se $-4 - 5h + k \neq 0$, allora:

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{h-k}{4+5h-k} & -\dfrac{3(-2+3h-k)}{4+5h-k} \\ \dfrac{16+15h+k}{4+5h-k} & -\dfrac{6(11+k)}{4+5h-k} \\ -\dfrac{4(1+h)}{4+5h-k} & \dfrac{6(3+h)}{4+5h-k} \end{pmatrix}.$$

In tutti gli altri casi l'equazione é incompatibile.

[29]

```
a := {{2, 1, -1}, {1, 0, 5}};

b := {{-2, 5, -8, -1}, {6, -7, 7, 9}};

x := {{x1, x2, x3, x4}, {x5, x6, x7, x8},
    {x9, x10, x11, x12}};

Reduce[a.x == b, {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9,
   x10, x12}]
```

$x3 == 7 - 5\,x11 \&\& x5 == \frac{16}{5} - \frac{11\,x1}{5} \&\&$
$x6 == \frac{18}{5} - \frac{11\,x2}{5} \&\& x7 == -22 + 11\,x11 \&\& x8 == \frac{4}{5} - \frac{11\,x4}{5} \&\&$
$x9 == \frac{6}{5} - \frac{x1}{5} \&\& x10 == -\frac{7}{5} - \frac{x2}{5} \&\& x12 == \frac{9}{5} - \frac{x4}{5}$

$$X = \begin{pmatrix} 5\lambda_1 - 6 & 5\lambda_2 + 7 & 5\lambda_3 - 7 & 5\lambda_4 - 9 \\ -9\lambda_1 - 14 & -9\lambda_2 - 9 & -9\lambda_3 - 22 & -9\lambda_4 - 19 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

Capitolo 6

Calcolo Vettoriale

Il calcolo vettoriale elementare costituisce il fondamento per l'Algebra Lineare e la Geometria Analitica nel piano e nello spazio, inoltre si rivela uno strumento prezioso per le matematiche applicate e la Fisica in particolare.

6.1 Definizione di vettore

Definizione 6.1 *Si consideri un segmento AB appartenente ad una retta r dello spazio ambiente S_3.*
Esso ha una **direzione** *quella della retta r, un* **verso***, ad esempio, quello da A verso B e una lunghezza, la lunghezza di AB indicata con $\|AB\|$ e detta* **norma** *di AB.*
Un segmento suddetto si dice **segmento orientato** *e la totalità di tutti i segmenti orientati paralleli ad AB, equiversi e della stessa lunghezza si dice* **vettore** $\mathbf{u}$.

Quindi ad un vettore $\mathbf{u}$ si associa: $\begin{cases} \textbf{direzione} \\ \textbf{verso} \\ \textbf{norma} = \|\mathbf{u}\| \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Se $A = B$ il segmento orientato si indica con $\mathbf{0}$ e si dice **vettore nullo**, per il quale valgono le proprietà:
$\mathbf{0}$ è l'unico vettore con $\|\mathbf{0}\| = 0$, direzione e verso indeterminati.

Se $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\mathbf{u}$ si dice **versore**.
Notazioni: $\mathbf{u}$; $\vec{AB}$, $\mathbf{u}= B - A$, AB. AB è detto un **rappresentante** del vettore $\mathbf{u}$.

1. V_3: insieme dei vettori nello spazio;
2. V_2: insieme dei vettori nel piano;
3. V_1: insieme dei vettori nella retta.

6.2 Somma di vettori

Definizione 6.2 *La somma di due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ di V_3 è un vettore, che si indica con $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, definito nel seguente modo: fissato un punto O di S_3, siano OA e OB rispettivamente due segmenti orientati di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ allora $\mathbf{u}+\mathbf{v} = OC$, dove OC è il segmento orientato che si determina con la regola del parallelogramma.*

Il punto C è il simmetrico di O rispetto al punto medio di AB.

N.B. Dati i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ è un vettore complanare con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ cioè ammette un rappresentante nello stesso piano.

Teorema 6.1 *1.* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(proprietà commutativa);*

2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3, (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(proprietà associativa);*

3. $\exists \mathbf{0} \in V_3 \mid \forall \mathbf{u} \in V_3, \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. *($\mathbf{0}$ è detto vettore nullo o elemento neutro);*

4. $\forall \mathbf{u} \in V_3, \exists -\mathbf{u} \in V_3 \mid \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. *($-\mathbf{u}$ è detto l'opposto di $\mathbf{u}$).*

Inoltre:

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3 : \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|; \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq | \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| |$.

Osservazione 6.1 Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$ due vettori e scelti due rispettivi segmenti orientati consecutivi $\mathbf{u} = AB$, $\mathbf{v} = BC$, risulta: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = AC$:

Dato un qualsiasi vettore $\mathbf{u}$ e due direzioni non parallele tra di loro, esistono e sono unici due vettori in quelle direzioni, diciamo: $\mathbf{u_1}$ ed $\mathbf{u_2}$ tali che: $\mathbf{u} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$. L'operazione prende il nome di scomposizione di un vettore lungo le due direzioni assegnate.

6.3 Il prodotto di un numero reale per un vettore

Definizione 6.3 *Il prodotto di un numero reale λ per un vettore $\mathbf{u} \in V_3$ è un vettore che si indica con $\lambda\mathbf{u}$, detto prodotto di λ per $\mathbf{u}$, definito nel seguente modo:*

1. se $\lambda = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, allora $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$

2. Se $\lambda \neq 0$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ si pone $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{v}$, dove:

la direzione di $\mathbf{v}$ coincide con la direzione di $\mathbf{u}$;

il verso di $\mathbf{v}$ è concorde con quello di $\mathbf{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$;

$\|\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$.

Teorema 6.2 *1.* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3 : \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$*;*

2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V_3 : (\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$

3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V_3 : \lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$*;*

4. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V_3$.

Definizione 6.4 *L'insieme V_3 con le operazioni di somma di due vettori e relative quattro proprietà e di prodotto di uno scalare per un vettore e relative quattro proprietà, si dice* **spazio vettoriale su** $\mathbb{R}$.

Osservazione 6.2 V_3 è il primo esempio di spazio vettoriale. Scopo dell'algebra lineare è studiare gli spazi vettoriali in generale.

Osservazione 6.3 *Anche $(V_3, +, .)$, $(V_2, +, .)$ e $(V_1, +, .)$ sono esempi di spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Poiché le operazioni di somma e di prodotto sono le stesse per V_1, V_2, V_3, gli spazi V_1 , V_2 sono detti* **sottospazi vettoriali** *di V_3.*

Definizione 6.5 *Si dice* **combinazione lineare** *dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, un'espressione del tipo: $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n$, dove $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n$, sono numeri reali e prendono il nome di coefficienti della combinazione lineare.*

Definizione 6.6 *I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$ si dicono* **paralleli** *se hanno la stessa direzione.*
I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$ si dicono **complanari** *se le loro direzioni sono parallele ad uno stesso piano.*

6.4 Dipendenza lineare e basi

Definizione 6.7 *I vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *si dicono* **linearmente indipendenti** *(l.i.) se l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli. i.e.* $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. *I vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *sono linearmente dipendenti (l.d.), in caso contrario, cioè se esistono dei coefficienti* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *non tutti nulli tali che:* $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Esempio 6.1 Se $\mathbf{u} = 2\mathbf{v}$; allora $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = \mathbf{0}$ con $\lambda = 2, \mu = 1$. Pertanto i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; sono l.d.

Teorema 6.3 *n vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi (almeno) si può rappresentare come combinazione lineare dei rimanenti.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si deve procedere in due passi. Se, per ipotesi, sono dati i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 ... \mathbf{u}_n$ tali che $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ si ottiene con i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$ non tutti nulli. Se $\lambda_1 \neq 0$, poiché esiste $(\lambda_1)^{-1}$ si ha: $\mathbf{u}_1 = -((\lambda_1)^{-1})(\lambda_2)(\mathbf{u}_2) - ... - ((\lambda_1)^{-1})(\lambda_n)(\mathbf{u}_n)$. Per il viceversa si procede in modo analogo . ▮

Teorema 6.4
1. *Due vettori* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v} \in V_3$ *sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli, ossia se e solo se appartengono alla stessa retta vettoriale.*
2. *Tre vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w} \in V_3$ *sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.*
3. *Quattro vettori di* V_3 *sono linearmente dipendenti.*

Conseguenze:

1. Il numero massimo di vettori l.i. in V_1 è 1;
2. Il numero massimo di vettori l.i. in V_2 è 2;
3. Il numero massimo di vettori l.i. in V_3 è 3;

Dimostrazione.

1. Se $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \exists\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, con $|\lambda| = \dfrac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}$;
2. Se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono complanari (esclusi casi banali di parallelismo o vettori nulli), si può ottenere, ad esempio, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$. Il viceversa è ovvio.
3. Partendo da quattro vettori $\mathbf{u} = OA, \mathbf{v} = OB, \mathbf{z} = OC, \mathbf{w} = OD$ tali che tre di essi almeno non siano complanari, ad esempio: siano i primi tre, ed i primi due individuino un piano π. L'estremo D del quarto vettore lo proiettiamo su π secondo la direzione del vettore $\mathbf{z}$ ed otteniamo un punto P estremo del vettore OP. Tale vettore su π si decompone in modo unico nella base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nel seguente modo:
$OP = a(OA) + b(OB)$, dove a,b $\in \mathbb{R}$. Intersechiamo ora il vettore $\mathbf{z} = OC$ con un piano per D e parallelo a π ottenendo un punto Q estremo del vettore $(OQ) = c(OC)$, dove $c \in \mathbb{R}$. Poiché è evidente che $(OD) = (OP) + (OQ)$,per la complanarità dei vettori, risulta $(OD) = a(OA) + b(OB) + c(OC)$ e, per l'arbitrarietà dei vettori scelti, si ha la lineare dipendenza dei vettori dati . ▮

Teorema 6.5 *Dati* 3 *vettori l.i.* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, *ogni vettore* $\mathbf{x} \in V_3$ *si scrive* **in modo unico** *come combinazione lineare dei* 3 *vettori dati.*

Dimostrazione. Dal Teorema precedente segue che $\mathbf{x}$ è decomposto nel seguente modo: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3$.
Se $\mathbf{x} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3$ ciò implica che: $\mathbf{0} = (x_1 - y_1)\mathbf{u}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{u}_2 + (x_3 - y_3)\mathbf{u}_3$.
Poichè $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono l.i., segue che $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$. ▮

Osservazione 6.4 *Il Teorema precedente vale anche nel caso di* V_2 *e di* V_1, *infatti: in* V_2 *dati due vettori l.i.* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \forall\mathbf{x} \in V_2$ $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$. *Ossia il vettore dato si scrive in modo unico come c.l. dei due vettori l.i.*
Analogamente in V_1, *dato un vettore* $\mathbf{u}_1, \forall\mathbf{x} \in V_1, \mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1$ *in modo unico.*

Definizione 6.8 *Si dice* **base** *di V_3 una qualsiasi terna di vettori linearmente indipendenti. Si dice* **dimensione** *di V_3 il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in essa contenuti.*

Osservazione 6.5 3 vettori l.i. di V_3 costituiscono una base; 2 vettori l.i. di V_2 costituiscono una base; 1 vettore l.i. di V_1 costituisce una base;
In V_3 esistono **infinite basi** (ogni terna di vettori l.i.)

Definizione 6.9 *Fissata una base $\mathcal{B}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ di V_3, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_3$, esiste una combinazione lineare in modo unico: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, dove: (x_1, x_2, x_3) sono dette* **componenti** *di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si ha quindi un'applicazione biunivoca che associa ad ogni vettore $\mathbf{v}$ le sue componenti (x_1, x_2, x_3) rispetto alla base $\mathcal{B}$. Perciò un vettore di V_3 sarà anche indicato con le sue componenti o, in forma matriciale, con:*

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Posto $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3, \mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, per le proprietà dello spazio vettoriale V_3, risulta:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3; \\ &\lambda\mathbf{u} = (\lambda\mathbf{u}_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda\mathbf{u}_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda\mathbf{u}_3)\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

cioè le componenti della somma di due vettori si ottengono semplicemente sommando le rispettive componenti, mentre le componenti di $(\lambda\mathbf{v})$ si ottengono moltiplicando λ per ogni componente di $\mathbf{v}$.

Teorema 6.6 *n vettori (n=1,2,3) di V_3 sono linearmente indipendenti se e soltanto se la matrice A avente per righe rispettivamente le componenti degli n vettori, ha rango n, ossia (n vettori di V_3 sono l.d. $\iff$ rankA $< n$).*

.

Casi importanti

1. $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ (vettori paralleli) In termini di componenti si ha: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda x_2 \\ y_3 = \lambda x_3 \end{cases} \iff \text{rank}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Esempio 6.2 In termini numerici: $\mathbf{x} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{y} = (2, -4, 6)$.

2. Tre vettori $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sono complanari $\iff$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ sono l.d., per esempio $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$, con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_3$. In termini di componenti:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 \\ z_2 = \lambda x_2 + \mu y_2 \\ z_3 = \lambda x_3 + \mu y_3 \end{cases} \iff \text{rank}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Esempio 6.3 In termini numerici, se $\mathbf{a} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (4, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (2, -5, 2)$ Come sono posizonati i tre vettori nello spazio?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + 2R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oppure:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 11 & -4 \\ 0 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice è 2 e ciò implica che i vettori siano l.d. ossia complanari. Poichè i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ non sono paralleli, determiniamo il valore dei coefficienti:

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = -5 \\ \lambda = -2 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

e perciò $\mathbf{c} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Teorema 6.7 *Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ una base di V_3, i vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3), \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ sono l.i. $\Longleftrightarrow$ non sono l.d. e quindi devono avere:*

$$rank \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Dimostrazione. I tre vettori sono l.i. se e solo se $\lambda_1\mathbf{x}+\lambda_2\mathbf{y}+\lambda_3\mathbf{z} = \mathbf{0}$ se e solo se $\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3$. Le componenti del precedente vettore conducono al sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_1 + \lambda_3\mathbf{z}_1 = 0 \\ \lambda_1\mathbf{x}_2 + \lambda_2\mathbf{y}_2 + \lambda_3\mathbf{z}_2 = 0 \\ \lambda_1\mathbf{x}_3 + \lambda_2\mathbf{y}_3 + \lambda_3\mathbf{z}_3 = 0 \end{cases},$$

che ammette la sola soluzione nulla se e solo se:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Esercizio 6.1 Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -h)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 1-)$, $\mathbf{u}_3 = (h, 1, -1)$ dati, rispetto ad una base $\mathcal{B} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, formano una nuova base di V_3.

Deve essere $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 2 & -1 & 1 \\ h & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$, allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 2 & -1 & 1 \\ h & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - hR_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 1+2h \\ 0 & 1 & -1+h^2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + 2R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 1+2h \\ 0 & 0 & 2h+h^2 \end{pmatrix}.$$

Ciò implica che $h^2 + 2h$ sia diverso da zero o equivalentemente che , $h \neq 0, h \neq -2$.

Esempio 6.4 1. Provare che i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, sono una base di V_3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank}(A) = 3 \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono l.i. e perciò formano una base di $\mathbf{V}_3$.

2. Sono dati i vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Verificare che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono l.d. ed esprimerne uno di essi come combinazione lineare dei rimanenti.

Posto
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, rank$(A) = 2 < 3 \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono l.d. ossia $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w} = \lambda(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + \mu(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) + \nu(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) = (2\lambda + \mu + \nu)\mathbf{e}_1 + (\lambda + \nu)\mathbf{e}_2 + (-\lambda + \mu - 2\nu)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$ se e soltanto se esistono valori non tutti nulli di λ, μ, ν per i quali le tre precedenti componenti sono tutte nulle. Ossia:

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ -\lambda + \mu - 2\nu = 0 \end{cases},$$

quindi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 3R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda = -\nu \end{cases}, \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \end{cases}, \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \nu = -\lambda \end{cases}.$$

I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono perciò l.d. e quindi, posto per esempio $\lambda = 1$, si ottiene $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

6.5 Il cambiamento di base in V_3

Siano date due basi $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ di V_3. Ad un vettore $\mathbf{x} \in V_3$ sono associate le componenti: (x_1, x_2, x_3) rispetto alla base $\mathcal{B}$ e le componenti (x'_1, x'_2, x'_3) rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Si vuole trovare il legame intercorrente tra le componenti di uno stesso vettore nelle due basi differenti. Poiché è data la base $\mathcal{B}'$, sono note le componenti dei suoi vettori rispetto alla base $\mathcal{B}$. Poniamo cioè:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Affinché il sistema precedente rappresenti un cambiamento di base in V_3 occorre che i vettori della base $\mathcal{B}'$ siano l.i., ossia che:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

dove rank$P = 3$. Ciò premesso, determiniamo le espressioni che legano le componenti di $\mathbf{x}$ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Scriviamo in foma matriciale il legame fra le due basi: $\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ e così pure il vettore:

$\mathbf{x} : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, nelle rispettive basi.

Poiché $\forall \mathbf{x} \in V_3 : \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3$, determiniamo la relazione tra le componenti: (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3).

$$\mathbf{x} = {}^t\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Per l'unicità delle componenti si ha:

$$^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} {}^tP$$

da cui:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Si ottengono così le equazioni del cambiamento di riferimento in notazione matriciale, dove si osservi che le colonne della matrice P sono le componenti della nuova base rispetto alla vecchia base.
In forma sintetica si può anche scrivere $X = PX'$.

Esempio 6.5 Dati i vettori $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{z} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \mathbf{w} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, verificare che $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})$ è una base di V_3 e trovare le componenti di $\mathbf{w}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $\operatorname{rank}(P) = 3$, quindi i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}$ sono l.i.

Si cercano le componenti $(x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{w} = x'_1\mathbf{u} + x'_2\mathbf{v} + x'_3\mathbf{z}$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x'_1 - x'_2 + x'_3 = -1 \\ x'_1 + 2x'_2 - x'_3 = -2 \\ x'_1 + x'_2 - 2x'_3 = 1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3 + R_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right),$$

$$R_3 \to \frac{1}{4}R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) R_1 \to R_2 - R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} R_2 \to 2R_2 - 5R_3 \\ R_1 \to 2R_1 - 3R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si perviene alla soluzione: $\begin{cases} x'_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x'_2 = -\dfrac{3}{2} \\ x'_3 = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Allora $\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\mathbf{u} - \frac{3}{2}\mathbf{v} - \frac{3}{2}\mathbf{z}$.

Osservazione 6.6 Quanto è stato detto per V_3 si può particolarizzare facilmente in modo da ottenere risultati analoghi per i vettori di V_2 e V_1.

6.6 L'angolo tra due vettori

Considerati due vettori non nulli $\mathbf{u} = OA$, $\mathbf{v} = OB$ e scelti i rispettivi rappresentanti con estremi in comune, si definisce angolo di due vettori l'angolo convesso θ formato da due loro segmenti orientati $\mathbf{u} = OA$, $\mathbf{v} = OB$. $\theta = A\hat{O}B = \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}$, dove $0 \leq \theta \leq \pi$.
$\theta = 0$ implica $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$
$\theta = \pi$ implica $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$
$\theta = \dfrac{\pi}{2} \to \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$
L'angolo tra i vettori $\mathbf{0} = \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è un qualunque angolo; in particolare il vettore nullo è parallelo ed ortogonale a qualunque vettore.

Introduciamo tre nuove operazioni che coinvolgono la nozione di angolo:

1. **prodotto scalare tra due vettori**
   (La più importante e la si può generalizzare a dim> 3)
2. **Il prodotto vettoriale o esterno tra due vettori**
   (Solo in V_3 e di grande significato fisico)
3. **Il prodotto misto tra tre vettori**
   (Combinazione lineare delle 2 relazioni precedenti)

6.7 Il prodotto scalare tra due vettori

Definizione 6.10 *Il prodotto scalare di due vettori è una funzione che si indica con* $\cdot : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}$ *che ad ogni coppia di vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *associa un numero reale che indichiamo con:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}$$

.

Osservazione 6.7 1. Si può dare la stessa definizione in V_2

2. si può generalizzare a dim n.
3. Se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \to \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
4. Se $\theta = \frac{\pi}{2} \to \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. Se $\theta > \frac{\pi}{2} \to \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$

Osservazione 6.8 Se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ciò implica che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\| \to \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
Quest'ultima formula sarà usata per calcolare la lunghezza di un vettore.

Osservazione 6.9 Dati 3 vettori complanari non paralleli si ha che per ogni vettore $\mathbf{x}$ appartenente al piano individuato dai 3 vettori, si scompone in infiniti modi diversi rispetto ai 3 vettori dati.

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}_3 + \mathbf{u}_1 = \lambda \mathbf{v}_3 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

(Si sceglie una direzione arbitraria nel piano individuato dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$)

Definizione 6.11 *Una terna di vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *di* V_3 *si dice* **positiva** *(***negativa***) se la più piccola rotazione nel piano* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$*, che sovrappone* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *è vista dal semispazio individuato da* $\mathbf{w}$ *in senso antiorario (orario).*
$\mathbf{u} = OA$
$\mathbf{u} = OB$
$\mathbf{w} = OC$.

Definizione 6.12 *Una base di* $\mathbf{V}_3$ *è detta* **ortogonale** *se è costituita da tre vettori a due a due ortogonali, si dice* **ortonormale** *se è ortogonale ed è formata da versori.*

Notazioni

1. Se $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$ allora: $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ è una terna ortogonale.
2. Una base ortonormale positiva è $\mathcal{B} = (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

Teorema 6.8 *1.* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}, \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_3$, *proprietà commutativa.*

2. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *o* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *o* $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

3. $\forall\lambda \in R, \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V_3 \quad \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v})$.

4. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2$.

Dimostrazione
La 1) è una conseguenza immediata della definizione di prodotto scalare;
Per la 2) Tenuto conto della relazione $cos\hat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$, se il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{u},\mathbf{v}$ è zero, ciò implica che o $\|\mathbf{u}\| = 0$ o $\|\mathbf{v}\| = 0$ o $cos\hat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = 0$ o $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$. Si ricordi che il vettore nullo è ortogonale ad ogni vettore. Per il viceversa si procede a ritroso.

Per la 3) occorre distinguere $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda > 0 \\ \lambda < 0 \end{cases}$

Consideriamo ad esempio il caso $\lambda < 0$. Otteniamo $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \|\lambda\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\lambda\hat{\mathbf{u}})\mathbf{v} = \|\lambda\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\beta = |\lambda|\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\beta = \lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \lambda\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$, dove $\cos\beta = -\cos\alpha$. La 4) si lascia al lettore per esercizio.

Prodotto scalare in componenti

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ una base di V_3.
$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1y_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + ...$

Abbiamo 9 termini, non conosciamo $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j$ che dipendono dalla posizione e dalla lunghezza dei vettori della base. Per facilitare i conti scegliamo una base ortonormale.

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ una base otonormale positiva di V_3, si ha:

1. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, ossia i vettori della base sono tre versori;
2. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$, vale a dire i vettori della base sono vettori a due a due ortogonali.

Osservazione 6.10 Esistono infinite basi ortonormali; nel caso del piano avremmo ogni base ortonormale è costituita da due versori ortogonali.

Siano $\mathbf{u} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$ le decomposizioni di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{B}$, risulta:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$\cos \hat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}},$$

Inoltre, $\forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si ha:

$$\cos \hat{\mathbf{i}\mathbf{v}} = \frac{y_1}{\|\mathbf{v}\|}, \cos \hat{\mathbf{j}\mathbf{v}} = \frac{y_2}{\|\mathbf{v}\|}, \cos \hat{\mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{y_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

I coefficienti di v) sono detti **coseni direttori** del vettore $\mathbf{v}$. Essi sono le componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, del versore $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, quindi:

$$\cos^2 \hat{\mathbf{i}\mathbf{v}} + \cos^2 \hat{\mathbf{j}\mathbf{v}} + \cos^2 \hat{\mathbf{k},\mathbf{v}} = 1.$$

Il significato geometrico del prodotto scalare

Sia $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ed r una retta orientata parallela ad $\mathbf{u}$.
Siano $\mathbf{v} \in V_3$, $\mathbf{v} = AB$, $A'B'$ le proiezioni ortogonali dei punti AB su r.

Definizione 6.13 *Definiamo* **componente ortogonale** *di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{u}$, la misura con segno del segmento $A'B'$. Si indica con $\mathbf{v}_u$ e risulta : $\mathbf{v}_u = \|\mathbf{v}\|. \cos \hat{\mathbf{u},\mathbf{v}}$.*

Osservazione 6.11 Si noti che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{v}_u = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}_v$. Sia $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le componenti (x_1, x_2, x_3) sono le componenti ortogonali di $\mathbf{v}_u$ rispetto ai versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Vettore proiezione ortogonale di un vettore

Siano $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, r una retta orientata parallela ad $\mathbf{u}$ che individua una retta vettoriale $U, \mathbf{v} \in V_3, \mathbf{v} = AB$, $A'B'$ le proiezioni ortogonali di A e B su r, indichiamo con $\mathbf{v}_u$ il vettore rappresentato da $A'B'$.
$\mathbf{v}_u$ è detto **vettore proiezione ortogonale** di $\mathbf{v}$ sulla retta vettoriale U.
Si ricava: $\mathbf{v}_\mathbf{u} = \|\mathbf{v}\| \cos \hat{\mathbf{u}\mathbf{v}} \dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$.

Teorema 6.9 $\mathbf{v}_u$ *proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{u}$ sul vettore $\mathbf{u}$ ha le seguenti proprietà, è il vettore:*

1. *$\lambda\mathbf{u}$ è tale che $\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}$ sia perpendicolare a $\mathbf{u}$;*

2. *$\lambda\mathbf{u}$ è il vettore con λ tale che $\|\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}\|^2$ sia minima.*

6.8 Il prodotto vettoriale o esterno

Definizione 6.14 *Il* **prodotto vettoriale** *è la legge che ad ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3$ associa il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ detto anche $(\mathbf{u}$ vettore $\mathbf{v})$, o vector cross product, in simboli:*
$\wedge : V_3 \times V_3 \to V_3$, $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \to \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e così definito:

1. *$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin \hat{\mathbf{u},\mathbf{v}}$,*

2. *$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale al piano individuato sia da $\mathbf{u}$ che da $\mathbf{v}$,*

3. *$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ è una terna positiva (oppure: regola della mano destra: $\mathbf{u}$ = indice, $\mathbf{v}$ = medio, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ = pollice).*

Osservazione 6.12 Il prodotto vettoriale ha senso soltanto in V_3, non in V_2, non in dim maggiore di 3.

Teorema 6.10 *Il prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ è il vettore nullo se e soltanto se i due vettori sono paralleli.*

Dimostrazione

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \text{oppure} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \text{oppure} \sin \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = 0 (\text{che implica} \quad \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = 0 \quad o \quad \pi) \end{cases}.$$

Per il viceversa basta ripercorrere al contrario la dimostrazione precedente.
Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

Teorema 6.11 *1.* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3 : \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, *proprietà anticommutativa;*

2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_3, \forall \lambda \in R : (\lambda \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$*: proprietà di omogeneità;*

3. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3 : \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, *proprietà distributiva;*

Dimostrazione di 2). Si possono presentare i seguenti casi: $\lambda = 0, \lambda < 0, \lambda > 0$.
Consideriamo il caso $\lambda > 0$.
E' sufficiente sviluppare l'espressione $||(\lambda \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}||$ per avere

$||(\lambda \mathbf{u})|| \; ||\mathbf{v}|| \sin (\lambda \hat{\mathbf{u}})\mathbf{v} = ||\lambda|| ||\mathbf{u}|| \; ||\mathbf{v}|| \sin (\lambda \hat{\mathbf{u}})\mathbf{v}$, però $\sin \alpha = \sin \beta = \sin(\pi - \alpha)$ e perciò $||\lambda|| ||\mathbf{u}|| \; ||\mathbf{v}|| \sin \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = ||\lambda|| ||\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|| \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.
La dimostrazione di 3 è al Cap 7.

Osservazione 6.13 Verificare che non vale in generale: $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$, come si può controllare facilmente per esercizio.

Definizione 6.15 *Siano* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *ed* α *un piano perpendicolare ad* $\mathbf{u}$. *Sia* $\mathbf{v} \in V_3, \mathbf{u} = OA$ *con* $= 0 \in \alpha$*; la proiezione di A su* α *sia* A'. *Il vettore* $\mathbf{v}_\alpha$ *rappresentato da* OA' *è detto* **proiezione ortogonale** *di* $\mathbf{v}$ *su* α. *Si osservi che risulta:* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}_\alpha$.

Il significato geometrico del prodotto vettoriale

1. La norma del prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai due vettori. In simboli, se $\mathbf{u} = OA$,$\mathbf{v} = OB$,$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = OC$, poiché:
   $||\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| \; ||\mathbf{u}|| \cos \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \mathcal{S}(OAMB)$, ossia la superficie che si ottiene dal prodotto della base per l'altezza, ossia la norma di un vettore per la lunghezza del segmento uscente dall'altro vettore e perpendicolare al primo.

2. Siano: $\mathbf{u}$ un versore e $\mathbf{v}$ un vettore tale che $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Siano: OA, OB due segmenti orientati rispettivamente relativi ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in V_3$ ed α il piano per O perpendicolare al vettore $\mathbf{u}$. Sia OB' ottenuto da OB mediante la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ sul piano α in senso antiorario rispetto al semipiano individuato da $\mathbf{u}$. E` immediato verificare che: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = OB'$.

Vettore proiezione ortogonale di un vettore su di un piano individuato da due vettori

Siano dati tre vettori: $\mathbf{u} = OA$, $\mathbf{v} = OB$, $\mathbf{w} = OC$. Detto π il piano di $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, su di esso si vuole ottenere la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{w}$ che chiamiamo $\mathbf{x} = OP$. Per questo si consideri il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e vi si proietti ortogonalmente il vettore $\mathbf{w}$ ottenendo $\mathbf{z} = OD$. Per costruzione i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$ sono complanari ed il quadrilatero $OACD$ è un parallelogramma, perciò : $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{w}$. La proiezione richiesta è quindi $\mathbf{x} = \mathbf{w} - \mathbf{z}$ ossia: $\mathbf{x} = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} . \mathbf{w} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})}{||\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}||^2}$.

Il prodotto vettoriale in componenti

E' fondamentale distinguere tra **base ortonormale positiva**: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e **base ortonormale negativa**: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{k}$. Scegliamo una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Si ricavano: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$. $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$. $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}$.
Allora scelti due vettori: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$, risulta:
$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \wedge (y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) = (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} + (-x_1y_3 - x_3y_1)\mathbf{j} + (-x_3y_2 + x_2y_3)\mathbf{i} =$

per definizione si considera come:

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

dove $\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ è il determinante della matrice $\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ ed il risultato ottenuto prende il nome di pseudo determinante.

6.9 Il prodotto misto di tre vettori

Definizione 6.16 *Il prodotto misto è la funzione:* $V_3 \times V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$ *che ad ogni terna ordinata di vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$, *associa un numero reale così determinato:* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ *che si ottiene eseguendo i prodotti nell'ordine in cui sono eseguibili.*

Teorema 6.12 *1.* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0 \to \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *sono complanari;*

2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_3$.

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_3$.

Dimostrazione. Per dimostrare 1) basta usare le componenti;
Le 2)e 3)si dimostrano pure agevolmente per via algebrica;
la dimostrazione geometrica di tutte le proprietà è un'immediata conseguenza del significato geometrico del prodotto misto.

Il significato geometrico del prodotto misto

1. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori di V_3 non complanari. Allora valgono le seguenti equivalenze: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} > 0 \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono una base positiva di V_3; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} < 0 \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono una base negativa di V_3, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$;
2. Siano OA, OB, OC tre segmenti orientati relativi ai vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ rispettivamente. Consideriamo il parallelepipedo $\mathcal{P}$ di spigoli: OA, OB, OC e proviamo che il valore assoluto del prodotto misto dei 3 precedenti vettori eguaglia il volume di $\mathcal{P}$. In simboli: $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| = Vol(\mathcal{P})$.

   Dimostrazione Osservato che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| \cdot \mathbf{u}.cos\theta$, dove θ indica l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ed $\mathbf{u}$ mentre $\mathbf{u}\cos\theta$ è l'altezza relativa alla base individuata $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si ha l'asserto. Il volume del parallelepipedo rappresenta 6 volte il volume del tetraedro individuato da $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, come si prova con semplici calcoli.

Attenzione: è un volume con segno:
si parla di **terna positiva** se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0$,
Si parla di **terna negativa** se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$,

Esempio 6.6 $\mathrm{i} \wedge \mathrm{j}.\mathrm{k} = 1$, **terna ortonormale positiva** $\mathrm{i} \wedge \mathrm{j}.\mathrm{k} = -1$, **terna ortonormale negativa**

Teorema 6.13 *Il prodotto misto di tre vettori è nullo se e solo se i vettori sono complanari. In simboli* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$ *se e solo se i vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *sono complanari.*

Dimostrazione $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$ se, per esempio, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, oppure $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ cioè $\mathbf{u} \| \mathbf{v}$ oppure $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$. Il viceversa è analogo.

Il prodotto misto in componenti

Continuando ad usare una base positiva, dati i vettori:
$\mathbf{u} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}, \mathbf{w} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k},$ si ottiene:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Osservazione 6.14 Si è così ricavato un sorprendente legame tra il prodotto misto di tre vettori ed il determinante avente per righe rispettivamente le componenti dei vettori stessi. Ciò consente, sia pure soltanto in dimensione 3, di leggere le proprietà dei determinanti attraverso le proprietà del prodotto misto.

Osservazione 6.15 Riassumendo le proprietà precedenti si può dire che il prodotto misto di tre vettori è nullo se e solo se i vettori sono complanari, se e solo se il determinante della loro matrice è zero, se e solo se il rango della loro matrice è minore di 3.

6.10 Cambiamenti di basi ortonormali

Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ due basi ortonormali di V_2 e si supponga che $\mathcal{B}$ sia positiva. Posto $\varphi = \widehat{\mathbf{i}, \mathbf{i}'}$, si ha, a meno di multipli di 2π:

1. $\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{j}'} = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$ se $\mathcal{B}'$ è pure positiva, mentre:
2. $\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{j}'} = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$ se $\mathcal{B}'$ è negativa e pertanto:
3. $\mathbf{i}' = (\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}, \mathbf{j}' = \epsilon(-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}),$ dove $\epsilon = \pm 1$.

   Detta A la matrice avente come colonne le componenti di $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$,

   cioè:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\epsilon\sin\varphi \\ \sin\varphi & \epsilon\cos\varphi \end{pmatrix}$$

   ,

   si verifica che $\det A = AA = I$. Perciò A è una matrice ortogonale di ordine 2. Indicate poi con $(x, y), (x', y')$ le componenti di uno stesso vettore OP, relativo alle due basi, rispettivamente, si ottiene:

4. $$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y'\epsilon\sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y'\epsilon\cos\varphi \end{cases} \tag{6.1}$$

   o anche, utilizzando la regola di Cramer, le formule inverse ci forniscono:

5. $$(\begin{cases} x' = x\cos\varphi\epsilon + y\sin\varphi \\ y' = \epsilon(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) \end{cases} \tag{6.2}$$

   Pertanto (22.5) o (25.4) rappresentano le formule di trasformazione delle componenti del vettore OP allorché si passa da una base ortonormale ad un'altra base ortonormale nello spazio V_2.

   Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ due basi ortonormali di V_3 e si supponga $\mathcal{B}$ positiva. Se si indica con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La matrice avente per colonne le componenti dei vettori $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ rispettivamente, risulta:

$$^{t}AA = I \tag{6.3}$$

ossia $^{t}A = A^{-1}$ ed inoltre è $\det A = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' \wedge \mathbf{k}' = \pm 1$ a seconda che la base $\mathscr{B}'$ sia positiva o negativa.

Una matrice A soddisfacente (23.6) prende il nome di **matrice ortogonale di ordine** 3 e rappresenta la matrice del cambiamento di basi ortonormali nello spazio V_3.

Capitolo 7

Per saperne di più sul calcolo vettoriale

7.1 Per saperne di più sul calcolo vettoriale

Presentiamo una definizione di vettore più rigorosa, che si basa sul concetto di relazione di equivalenza e di classi di equivalenza.

Definizione 7.1 *Due segmenti orientati AB e CD dello spazio sono detti* **equipollenti** *se i punti medi dei segmenti AD e BC coincidono.*

Teorema 7.1 *La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza, basta verificare che:*
$AB \sim AB$, *proprietà riflessiva;*
$AB \sim CD \to CD \sim AB$, *proprietà simmetrica;*
$AB \sim CD$ *e* $CD \sim EF \to AB \sim EF$, *proprietà transitiva.*

L'insieme dei segmenti orientati dello spazio viene suddiviso in classi di equipollenza, ogni classe contiene tutti e soli i segmenti orientati equipollenti ad un segmento dato e può essere rappresentata da un qualsiasi segmento che la costituisce.

Definizione 7.2 *Le classi di equivalenza di segmenti orientati dello spazio sono dette* **vettori liberi**.

Notazioni: $\vec{u}, \mathbf{u}$: vettore libero; $\vec{AB}$, $\mathbf{u} = B - A$: AB è un rappresentante della classe $\mathbf{u}$.

Definizione 7.3 *Si dice* **vettore nullo** $\mathbf{0}$ *la classe di equivalenza costituita da tutti i segmenti orientati di lunghezza nulla.*

Sia $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v} = AB$, associamo al vettore $\mathbf{v}$:

1. una **direzione**, quella della retta AB.
2. un **verso**, quello da A a B.
3. un numero strettamente positivo, detto **modulo**, uguale alla lunghezza del segmento AB ed indicato anche con
   $\| AB \|$.

Definizione 7.4 *I vettori di modulo* 1 *sono detti* **versori**. *L'insieme dei vettori liberi dello spazio viene indicato con* V_3.

Osservazione 7.1 Fissato un punto dello spazio O, detto **origine**, si stabilisce una ovvia corrispondenza biunivoca tra i punti P dello spazio e i vettori definita da: $OP \mapsto \mathbf{v} = OP$.

7.2 Ulteriori proprietà sul prodotto vettoriale

Si verifica che sussistono le seguenti proprietà:

1. $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V_3$;
2. $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$;
3. $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v}.\mathbf{w}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$;
4. $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} + (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} + (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}\mathbf{0}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$.

Dimostrazione: Dimostreremo le proprietà (1) e (2).

(1) Scelto un vettore generico $\mathbf{a} \in V_3$ eseguiamo il seguente prodotto scalare:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}) \cdot [\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)]$ che, per la proprierà 1.7 (b) equivale a
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Ora si applica la proprietà distributiva del prodotto scalare e si ottiene $\mathbf{a} \wedge \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{a} \wedge \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_2)$ e quindi $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_2] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$.
Allora $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$ e pure $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{a} \in V_3$, e perciò $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, ossia $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e cio è l'asserto $\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_2$.

2) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$, il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è ortogonale al vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e quindi complanare con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Esistono pertanto degli scalari $x, y \in \mathbb{R}$ tali da potere scrivere: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$.
Se moltiplichiamo ambo i membri scalarmente per $\mathbf{w}$, abbiamo:
$\mathbf{0} = x(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + y(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ a cui si soddisfa ponendo: $x = -\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, y = \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$(con ρ arbitrario), si ha perciò

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}` = \rho[\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}]. \tag{7.1}$$

Si può verificare che lo scalare ρ non dipende da $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ossia è costante. Infatti supponiamo per assurdo che ρ dipenda, ad esempio, da $\mathbf{u}$ e scriviamo: $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \rho(\mathbf{u})[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}]$.
Scelto un vettore arbitrario $\mathbf{a}$, abbiamo le seguenti identità:
$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})(\mathbf{w} \wedge \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{w})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ ma $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = \rho(\mathbf{u})[\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}]$, e scambiando $\mathbf{u}$ con $\mathbf{a}$: $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \rho(\mathbf{u})[\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}]$; e dal confronto si deduce $\rho(\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{u})$.
Ossia essendo $\mathbf{a}$ arbitrario non dipende da $\mathbf{u}$ e analogamente si verifica che ρ non dipende da $\mathbf{v}$ e da $\mathbf{w}$.
Posto $\mathbf{u} = \mathbf{i}, \mathbf{v} = \mathbf{j} = \mathbf{w} = \mathbf{i}$ in (7.1) troviamo $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = \rho(\mathbf{j})$, ossia $\rho = 1$ in quanto si riconosce direttamente che $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$.
Sostituendo $\rho = 1$ in (7.1), rimane provato l'asserto . ▮

Capitolo 8

Calcolo Vettoriale – Esercizi

8.1 Esercizi

Tutti gli esercizi, a meno di esplicita dichiarazione contraria, sono da considerarsi nello spazio vettoriale reale V_3 dei vettori ordinari, riferito ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. I simboli: "$\cdot$ ", "$\wedge$"indicano, rispettivamente, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale (esterno) tra due vettori.

[1] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = h\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - h\mathbf{j} + k\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -2\mathbf{i} + k\mathbf{k}, \quad h, k \in \mathbb{R},$$

trovare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ esistono dei vettori $\mathbf{x} \in V_3$ tali che:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

e determinare, quando è possibile, le componenti di $\mathbf{x}$.

[2] Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ sono vettori non nulli, ortogonali, calcolare:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c});$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}).$$

[3] Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, determinare una base ortogonale positiva di V_3 contenente $\mathbf{a}$ e un vettore complanare ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$.

[4] i) I vettori: $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ possono rappresentare i lati di un rettangolo?
ii) Determinare i vettori $\mathbf{v}$ che rappresentano le altezze del parallelogramma individuato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$.

[5] i) I vettori: $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$ possono rappresentare i lati di un rombo?
ii) Determinare le rette vettoriali bisettrici degli angoli individuati da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$.

[6] Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 0, -2)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$, determinare una base ortogonale positiva contenente $\mathbf{a}$ e un vettore $\mathbf{c}$ ortogonale sia ad $\mathbf{a}$ sia a $\mathbf{b}$.

[7] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = (1, 3, h), \quad \mathbf{b} = (-1, 5, 0), \quad \mathbf{c} = (1, -2, -1),$$

determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, esiste un vettore $\mathbf{x}$ di V_3 che verifica tutte le seguenti condizioni:
i) $\mathbf{x}$ sia complanare ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{c}$;
ii) $\mathbf{x}$ sia perpendicolare a $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$;
iii) il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $\mathbf{c}$ sia $-\mathbf{c}$.

[8] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, determinare il vettore $\mathbf{x}$ simmetrico di $\mathbf{u}$ rispetto a $\mathbf{v}$.

[9] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$, determinare i vettori bisettori degli angoli individuati da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

[10] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = (1, 2, 3), \quad \mathbf{b} = (-1, 3, -1), \quad \mathbf{c} = (0, 1, 1),$$

determinare, se esistono, i vettori $\mathbf{x}$ tali che:

$$2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

[11] Calcolare il valore della seguente espressione:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

dove $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono vettori qualsiasi dello spazio vettoriale reale V_3.

[12] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, scomporre il vettore $\mathbf{v}$ nella somma di un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ e di un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$.

[13] Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vettori di V_3, provare che:

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

[14] Verificare che i vettori: $\mathbf{u} = 2(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ sono ortogonali e determinare le componenti del vettore $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathscr{B}' = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.

[15] Dati i vettori: $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, determinare i vettori $\mathbf{x}$ di V_3, complanari a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, ortogonali a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e di norma 1.

[16] Dati i vettori: $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
i) verificare che $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$;
ii) determinare i vettori $\mathbf{x}$ tali che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v}$.

[17] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$, determinare i vettori $\mathbf{x}$ di V_3 tali che la loro proiezione ortogonale sul piano individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sia il vettore $\mathbf{a} = 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$.

[18] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (1, -1, h), \quad \mathbf{v} = (2, 0, h), \quad \mathbf{w} = (-2, 1, 0),$$

determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esistono uno o più vettori $\mathbf{x} \in V_3$ che verificano simultaneamente le seguenti condizioni:

i) $\mathbf{x}$ è perpendicolare ad $\mathbf{u}$;

ii) il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $\mathbf{v}$ è $2\mathbf{v}$;

iii) il volume con segno del tetraedro individuato dai vettori $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vale 8.

[19] i) Dati i vettori: $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$, si determini il vettore $\mathbf{x}$ tale che:

a) l'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{x}$ sia 6.

b) $\mathscr{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ sia una base ortogonale positiva.

ii) Si determinino le componenti del vettore $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathscr{B}'$.

[20] i) Dati i vettori: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$, si determinino tutti i vettori $\mathbf{x}$ tali che la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ sul piano vettoriale generato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$ sia il vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

ii) Scelto un vettore $\mathbf{x}$ particolare, si determinino le componenti del vettore $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ rispetto alla base $\mathscr{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$.

[21] Dati i vettori:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\lambda\mathbf{k}, \\ &\mathbf{y} = \lambda\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \\ &\mathbf{z} = \mathbf{i}, \end{aligned}$$

i) esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui i tre vettori risultino complanari?

ii) Esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{x}$ bisechi l'angolo formato da $\mathbf{y}$ e da $\mathbf{z}$?

[22] Dati i seguenti vettori:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 = (1, 3, -2), \\ &\mathbf{a}_2 = (-2, a-6, a+4), \\ &\mathbf{a}_3 = (-1, a-3, a^2+a+1), \\ &\mathbf{b} = (0, -2, a-1), \qquad a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

i) determinare i valori del parametro a per cui i vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sono linearmente indipendenti.

ii) Posto $a = 2$, determinare le componenti del vettore $\mathbf{b}$ rispetto alla base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

[23] Dati i vettori: $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2), \mathbf{u}_2 = (2, -1, 3), \mathbf{u}_3 = (3, 0, h)$, dire per quali valori di h i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti.

[24] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 3, 2), \mathbf{v} = (-2, 1, 1)$, verificare che sono linearmente indipendenti. Trovare per quali valori di t il vettore $\mathbf{w} = (t, 0, -1)$ appartiene al piano vettoriale individuato da $\mathbf{u}$ e da $\mathbf{v}$ e, per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

[25] Dati i vettori $\mathbf{a} = (0, 1, 2), \mathbf{b} = (3, -1, 1), \mathbf{c} = (-1, 2, 2)$, determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{c}$ sul piano individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

[26] Dati i vettori: $\mathbf{v}_1 = (-1, -2-2k, -2), \mathbf{v}_2 = (1, -2+2k, 16), \mathbf{v}_3 = (4, -7-k, 8),\ k \in \mathbb{R}$,
i) per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti?
ii) Per tali valori provare che $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ è una base del piano vettoriale generato da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e trovare le componenti di $\mathbf{v}_3$ rispetto a $\mathcal{B}$.

[27] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j},$$

i) verificare che $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è una base di V_3.
ii) Costruire una base ortonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ di V_3 tale che $\mathbf{e}_1$ sia parallelo ad $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{e}_2$ sia complanare ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$.

[28] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - h\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = h\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = h\mathbf{i} + 2h\mathbf{j} - \mathbf{k},\ h \in \mathbb{R},$$

i) determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari.
ii) Determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano paralleli.
iii) Determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ costituiscano una base ortogonale.
iv) Posto $h = 2$, determinare il vettore proiezione ortogonale di $\mathbf{u}$ sul piano generato da $\mathbf{v}$ e da $\mathbf{w}$.

[29] Determinare un vettore unitario perpendicolare a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e a $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, con componente positiva lungo $\mathbf{k}$.

[30] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = 2h\mathbf{i} - \mathbf{j} + h\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = h\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} - h\mathbf{j},\ h \in \mathbb{R},$$

i) determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari.
ii) Determinare, se esiste, un valore di h per cui i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano paralleli.

[31] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + h\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2h\mathbf{k},\ h \in \mathbb{R},$$

i) determinare h in modo che $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|^2 = 56$.
ii) È possibile determinare h in modo che $\mathbf{a}$ sia ortogonale a $\mathbf{b}$? E in modo che $\mathbf{a}$ sia parallelo a $\mathbf{b}$? Giustificare le risposte.

[32] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$,
i) determinare i vettori complanari a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, ortogonali ad $\mathbf{u}$ e aventi norma $\sqrt{2}$.
ii) Determinare le componenti del vettore $\mathbf{i}$ rispetto alla base formata da $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

[33] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 2), \mathbf{w} = (-t, t, t+2),\ t \in \mathbb{R}$,
i) determinare il valore di t in modo tale che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari ed esprimere $\mathbf{w}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$.
ii) Posto $t = -1$, determinare il vettore $\mathbf{w}'$ perpendicolare a $\mathbf{u}$, a $\mathbf{v}$, avente norma uguale alla norma di $\mathbf{w}$ e formante un angolo ottuso con $\mathbf{j}$.

[34] Utilizzando il prodotto scalare, dimostrare che:
un parallelogramma ha quattro lati uguali se e solo se le diagonali sono perpendicolari.

[35] Utilizzando il prodotto scalare, dimostrare che le diagonali del rombo sono bisettrici degli angoli.

[36] Dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (\lambda, -\lambda, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{w} = (\lambda, -1, \lambda), \ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

i) determinare, se esistono, dei valori di λ per cui il volume del tetraedro individuato da $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sia 5.
ii) Determinare, se esistono, dei valori di λ per cui $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari e l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sia ottuso.
iii) Posto $\lambda = 2$, dopo aver verificato che $\mathcal{C} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é una base non ortogonale, determinare le componenti di $\mathbf{j}$ rispetto a $\mathcal{C}$.

[37] Dati i seguenti vettori:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k},$$

stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono dei vettori $\mathbf{x}$ complanari con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e tali che:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{d}.$$

Determinare, quando é possibile, le componenti di $\mathbf{x}$.

[38] Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = h\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, se esistono, tutti i vettori $\mathbf{x} \in V_3$ che verifichino contemporaneamente le seguenti condizioni:

i) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{x}$ devono essere complanari;
ii) $\mathbf{a}$ deve essere ortogonale a $\mathbf{x}$;
iii) la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $\mathbf{b}$ deve essere $2\mathbf{b}$.

[39] Dato l'insieme di vettori:

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{k}, \ \ \mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \ \ \mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \ \ \mathbf{t} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}.$$

i) Calcolare $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}$;
ii) Determinare le componenti del vettore $\mathbf{i}$ rispetto alla base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.
iii) Determinare il vettore proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{u}$ sul vettore $\mathbf{w}$.

8.2 Soluzioni

```
«Graphics‘Shapes‘;
ConeRadius=0.1;
Arrow3D[
        {x1_,y1_,z1_},
        {x2_,y2_,z2_},
        nome_String]:=
        Block[
                   {dx,dy,dz,rho,rhoxy,g,g1,g2,g3,l,theta,psi},
                   CompoundExpression[
dx =x2-x1;
dy =y2-y1;
dz =z2-z1;
rho = Sqrt[dx^2+dy^2+dz^2];
rhoxy = Sqrt[dx^2+dy^2];
(* Calcoliamo ora gli angoli di Eulero *)
theta = If[rho==0,0,ArcCos[dz/rho]];
psi = If[rhoxy==0,
         0,
         If[dx>=0,
            ArcCos[dy/rhoxy],
            2Pi-ArcCos[dy/rhoxy]]];
g =Graphics3D[Cone[ConeRadius,ConeRadius,10]];
g1 = TranslateShape[g,{0,0,rho-ConeRadius}];
g2=RotateShape[g1,0,theta,psi];
g3 = TranslateShape[g2,{x1,y1,z1}];
l = Graphics3D[{Thickness[0.005],
                Text[StyleForm[nome,
                       FontSize->24,
                       FontWeight->"Bold"],
                    {x2,y2,z2}],
                Line[{{x1,y1,z1},{x2,y2,z2}}]}];
{l,g3}]];
Arrow3D[{x1_,y1_,z1_},{x2_,y2_,z2_}]:=Arrow3D[{x1,y1,z1},{x2,y2,z2},""];
Arrow3D[{x2_,y2_,z2_},nome_String]:=Arrow3D[{0,0,0},{x2,y2,z2},nome];
Arrow3D[{x2_,y2_,z2_}]:=Arrow3D[{0,0,0},{x2,y2,z2},""];
```

Programma scritto dal prof. Stefano Berardi per la rappresentazionne grafica dei vettori nello spazio.

[1]

```
a = {h, -1, 3}; b = {1, -h, k}; c = {-2, 0, k}; X = {x, y, z};

Reduce[Cross[a, X] + Cross[X, b] == c, X]
```

$$h == 1\&\&k == 0\&\&x == 0\&\&y == \frac{2}{3}\ ||$$
$$-3k + k^2 == 2 - 2h\&\&x == \frac{kz}{2}\&\&y == \frac{1}{2}k\left(\frac{2}{-1+h} + z\right)\&\& -1 + h \neq 0$$

Se $h \neq 1$ e $k(k-3) = 2 - 2h$: $\mathbf{x} = \left(\frac{k}{2}t, \frac{k}{2}\left(\frac{2}{h-1} + t\right), t\right)$, $t \in \mathbb{R}$;

se $h \neq 1$ e $k(k-3) \neq 2 - 2h$: non esistono soluzioni;

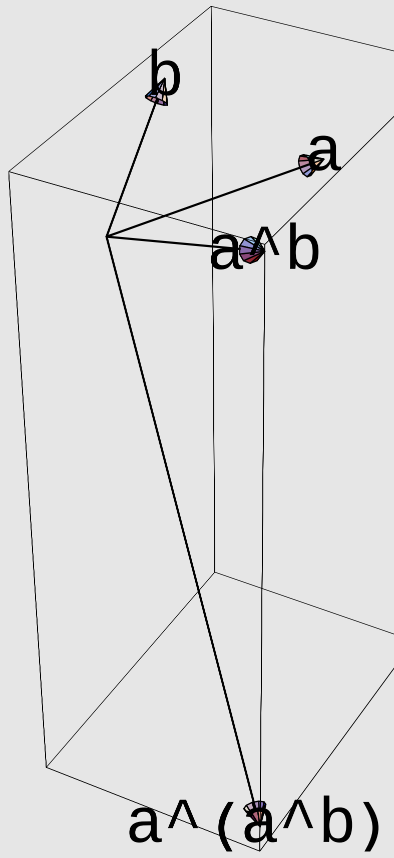
se $h = 1$ e $k = 0$: $\mathbf{x} = \left(0, \frac{2}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$;

se $h = 1$ e $k \neq 0$: non esistono soluzioni.

[2] $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = -\|\mathbf{a}\|^2\,\mathbf{c}$; $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{o}$.

[3]

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1};

ab = Cross[a, b]
{2, -1, 1}

c = Cross[a, Cross[a, b]]
{2, -1, -5}

Show[Arrow3D[a, "a"], Arrow3D[b, "b"], Arrow3D[ab, "a^b"], Arrow3D[c, "a^(a^b)"]]
```




```
-Graphics3D-
```

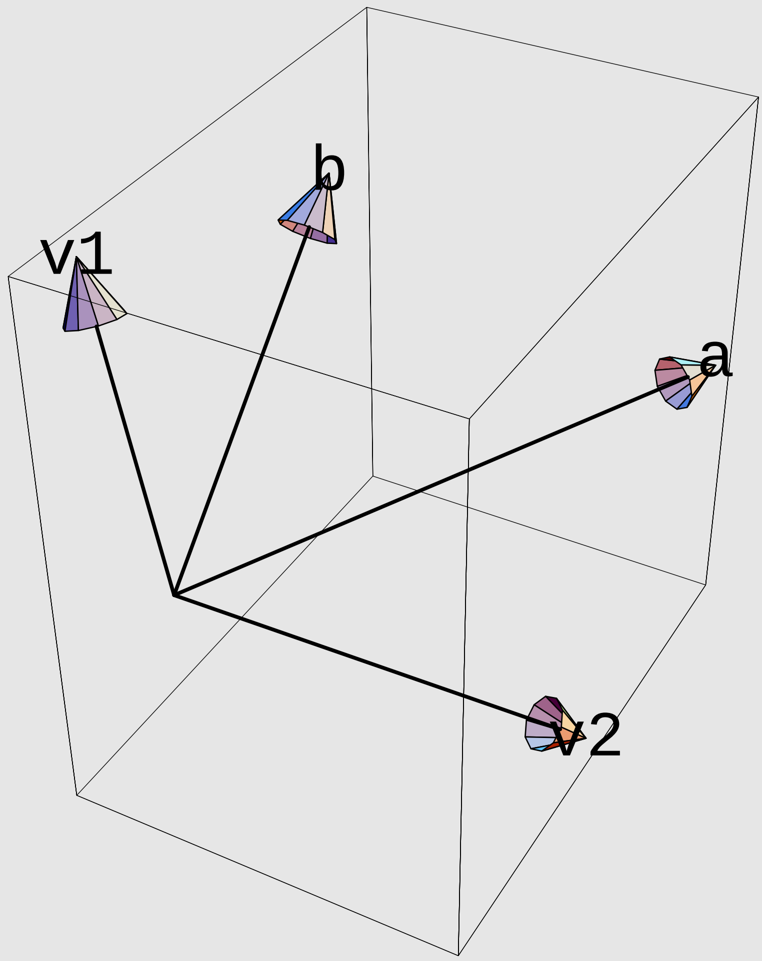
$\mathscr{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}))$, per esempio.

[4]

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 1, 1};

a.b
2

<< LinearAlgebra‘Orthogonalization‘

v1 = b - Projection[b, a]
```

$\left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 1\right\}$

```
v2 = a - Projection[a, b]
{1, 1, -1}

Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[v1, v1], Arrow3D[v2, v2]]
```




```
-Graphics3D-
```

i) No;

ii) $\mathbf{v}_1 = (\pm 1, \pm 1, \mp 1), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\mp\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{5}, \pm 1\right).$

[5]

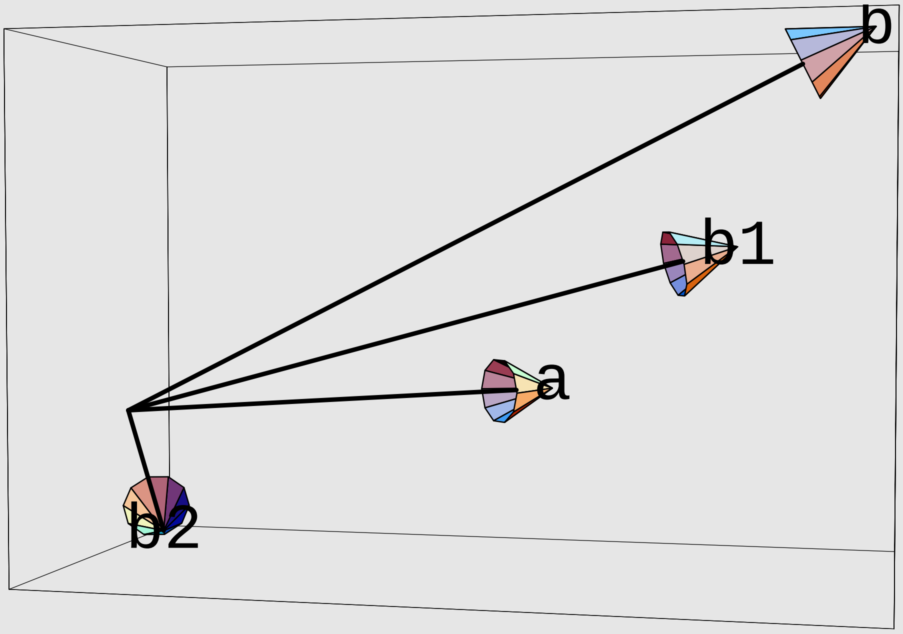
```
a = {1, 1, 0}; b = {2, 0, 1};

a.a - b.b
-3

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

b1 = Normalize[a] + Normalize[b]
```

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

```
b2 = Normalize[a] - Normalize[b]
```

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

```
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[b1, b1],
  Arrow3D[b2, b2], ViewPoint- > {0.499, -2.226, 0.084}]
```




```
-Graphics3D-
```

i) No;

ii) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

[6]

```
a = {1, 0, -2}; b = {0, 1, -1};

c = Cross[a, b]
{2, 1, 1}

Cross[a, c]
{2, -5, 1}
```

$\mathcal{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{c} = (2, 1, 1), \mathbf{a} \wedge \mathbf{c})$.

[7]

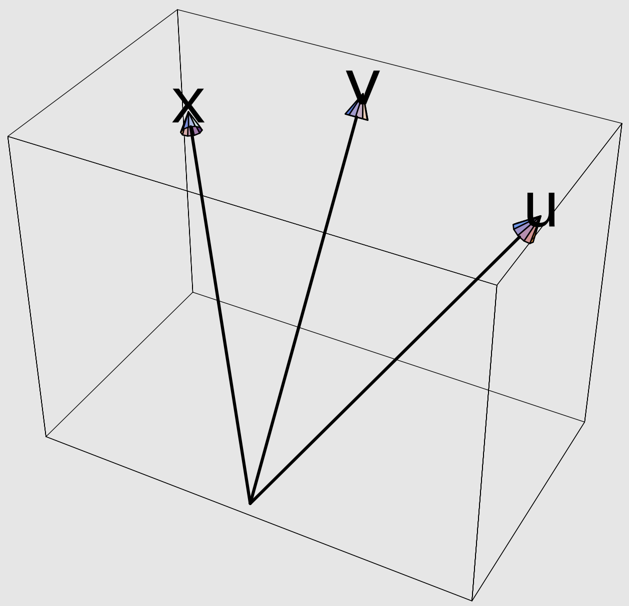
```
a = {1, 3, h}; b = {-1, 5, 0}; c = {1, -2, -1}; X = {x, y, z};

Reduce[{Cross[a, c].X == 0, Cross[b, c].X == 0, X.c/c.c == -1}, X]
h == -8/3 && x == 1/8 (-18 + 5 y) && z == 1/8 (30 - 11 y) ||
  x == -1 && y == 2 && z == 1 && 8 + 3 h ≠ 0
```

Se $h \neq -\dfrac{8}{3}$ esiste una sola soluzione;

se $h = -\dfrac{8}{3}$ esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[8]

```
u = {2, 1, 3}; v = {0, 2, 3};

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

x = 2Projection[u, v] - u
{-2, 31/13, 27/13}

Show[Arrow3D[u, u], Arrow3D[v, v], Arrow3D[x, x]]
```




```
-Graphics3D-
```

$\mathbf{x} = \left(-2, \dfrac{31}{13}, \dfrac{27}{13}\right).$

[9]

```
u = {2, 1, 3}; v = {0, 2, 3};

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

Normalize[u] + Normalize[v]
```

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

```
Normalize[u] - Normalize[v]
```

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

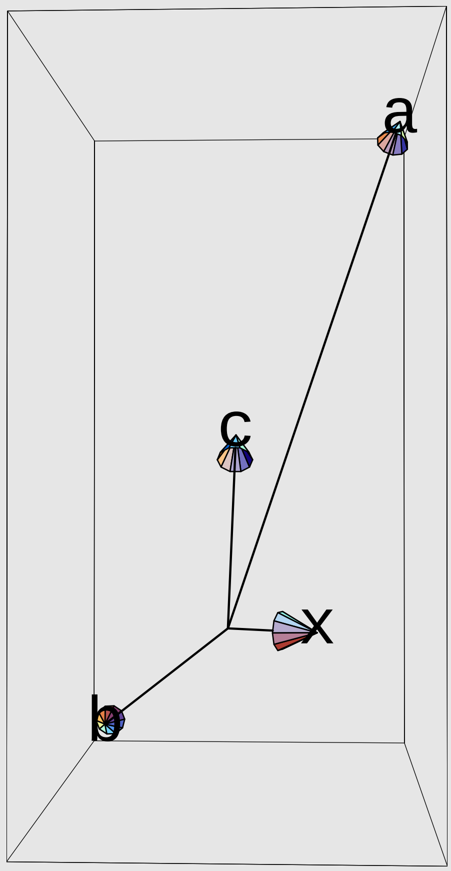
$$b = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{13\sqrt{14} \pm 28\sqrt{13}}{182}, \frac{39\sqrt{14} \pm 42\sqrt{13}}{182}\right).$$

[10]

```
a = {1, 2, 3}; b = {-1, 3, -1}; c = {0, 1, 1}; x = {x1, x2, x3};

Solve[2 (x.a) b + Cross[x, b] == c, x]
```

$$\left\{\left\{x1 \to \frac{5}{11}, x2 \to -\frac{2}{11}, x3 \to 0\right\}\right\}$$

```
Show[Arrow3D[a,"a"], Arrow3D[b,"b"], Arrow3D[c,"c"], Arrow3D[{5/11, -2/11, 0},"x"],
  ViewPoint-> {0.09, -2.28, -0.02}]
```



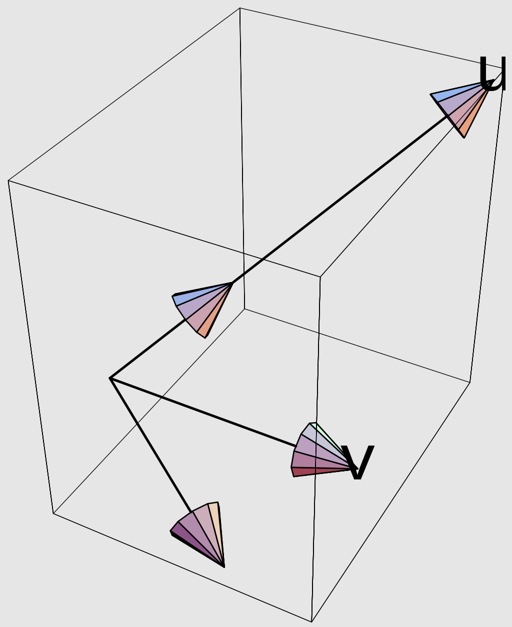

```
-Graphics3D-
```

$$\mathbf{x} = \left(\frac{5}{11}, -\frac{2}{11}, 0 \right).$$

[11] $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}) \wedge (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = -4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}.$

[12]

```
Show[Arrow3D[{1,1,1},u],Arrow3D[{1,0,0},v],
  Arrow3D[{1/3,1/3,1/3}],Arrow3D[{2/3,-1/3,-1/3}]]
```




```
-Graphics3D-
```

$$\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

[13] Usare le definizioni e le identità trigonometriche.

[14]

```
u = {2, 2, -2}; v = {1, 0, 1};

m = {u, v, Cross[u, v]}
{{2, 2, -2}, {1, 0, 1}, {2, -4, -2}}

LinearSolve[Transpose[m], {1, -3, 2}]
{-2/3, 3/2, 5/12}
```

$$\mathbf{v} = -\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{3}{2}\mathbf{v} + \frac{5}{12}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).$$

[15]

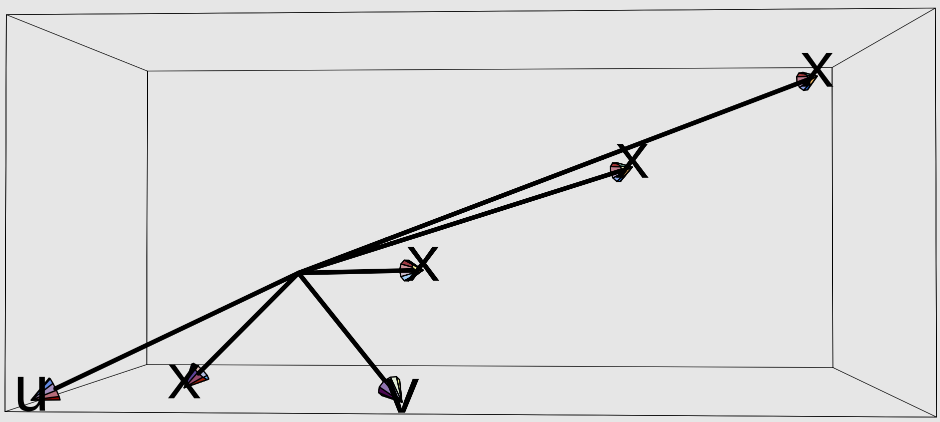
```
u = {1, 0, -1}; v = {1, 1, 0}; x = {x1, x2, x3};

Solve[{Det[{u, v, x}] == 0, x.(u + v) == 0, x.x == 1}, x]
```

$\left\{\left\{x1 \to 0, x2 \to -\frac{1}{\sqrt{2}}, x3 \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x1 \to 0, x2 \to \frac{1}{\sqrt{2}}, x3 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

$$\mathbf{x} = \left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

[16]

```
u = {1, -2, -1}; v = {1, 1, -1}; x = {x1, x2, x3};

u.v
0

Solve[{Cross[u, x] == v}, x]

Solve ::'' svars'' : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -1 - x3, x2 → 1 + 2 x3}}

Show[Arrow3D[u, u], Arrow3D[v, v], Arrow3D[{-1, 1, 0}, x],
  Arrow3D[{-2, 3, 1}, x], Arrow3D[{0, -1, -1}, x],
  Arrow3D[{-3, 5, 2}, x], ViewPoint- > {1.88, 0.09, -0.02}]
```

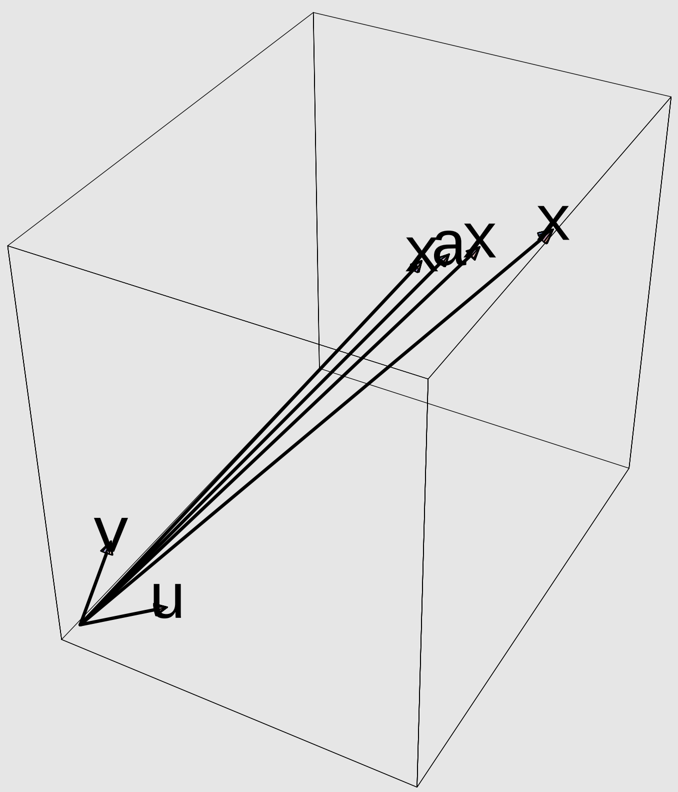



```
-Graphics3D-
```

$$\mathbf{x} = (-1 - \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

[17]

```
Show[Arrow3D[{1,1,0},u],Arrow3D[{0,1,1},v],
  Arrow3D[{3,7,4},a],Arrow3D[{4,6,5},x],
  Arrow3D[{2,8,3},x],Arrow3D[{6,4,7},x]]
```




```
-Graphics3D-
```

$\mathbf{x} = (3+\lambda, 7-\lambda, 4+\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

[18]

```
u = {1,-1,h}; v = {2,0,h}; w = {-2,1,0}; x = {x1,x2,x3};

Reduce[{x.u == 0, x.v/v.v == 2, Det[{x,v,w}] == 48}, x]
```

$$h == -2 \&\& x1 == 8 + x3 \&\& x2 == 8 - x3 \;||\; x1 == \frac{4\,(-2+7\,h-2\,h^2+h^3)}{-2+h} \&\& x2 == -\frac{2\,(4+10\,h-2\,h^2+h^3)}{-2+h} \&\& x3 == -\frac{6\,(8-2\,h+h^2)}{-2+h} \&\& -2+h \neq 0 \&\& 2+h \neq 0 \&\& 4+h^2 \neq 0$$

Se $h \neq \pm 2$ esiste un solo vettore $\mathbf{x}$,
se $h = 2$ non esistono vettori $\mathbf{x}$,
se $h = -2$ esistono infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera.

[19]

```
a = {1, 0, -1}; b = {2, 1, 2}; X = {x, y, z};

Solve[{Cross[a, X] .Cross[a, X] == 36, Cross[a, b] == X}, X]
{{y → -4, x → 1, z → 1}}

LinearSolve[Transpose[{a, b, {1, -4, 1}}], {4, -1, 3}]
{1/2, 13/9, 11/18}
```

i) $\mathbf{x} = (1, -4, 1)$. ii) $\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{9}, \frac{11}{18}\right)$.

[20]

```
a = {2, 1, 1}; b = {0, 1, 1}; x = {2, 0, 4};

LinearSolve[Transpose[{a, b, x}], {4, -1, 3}]
{1, -2, 1}
```

i) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),\ \lambda \in \mathbb{R}$.
ii) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{x}$, se $\mathbf{x} = (2, 0, 4)$.

[21]

```
x = {1, -1, 2l}; y = {l, l, -2}; z = {1, 0, 0};

Solve[Det[{x, y, z}] == 0, l]
{{l → -1}, {l → 1}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

Solve[Cross[Normalize[y] + Normalize[z], x] == {0, 0, 0}, l]
{}

Solve[Cross[Normalize[y] - Normalize[z], x] == {0, 0, 0}, l]
{}
```

i) $\lambda = \pm 1$. ii) No.

[22]

```
a1 = {1, 3, -2}; a2 = {-2, a - 6, a + 4};
a3 = {-1, a - 3, a^2 + a + 1}; b = {0, -2, a - 1};

Solve[Det[{a1, a2, a3}] == 0, a]
{{a → -1}, {a → 0}, {a → 1}}

LinearSolve[Transpose[{a1, a2, a3}/. a → 2], b/. a → 2]
{-3, -2, 1}
```

i) $a \notin \{-1, 0, 1\}$; ii) $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

[23]

```
u1 = {1, 1, 2}; u2 = {2, -1, 3}; u3 = {3, 0, h};

Solve[Det[{u1, u2, u3}] == 0]
{{h → 5}}
```

$h \neq 5$.

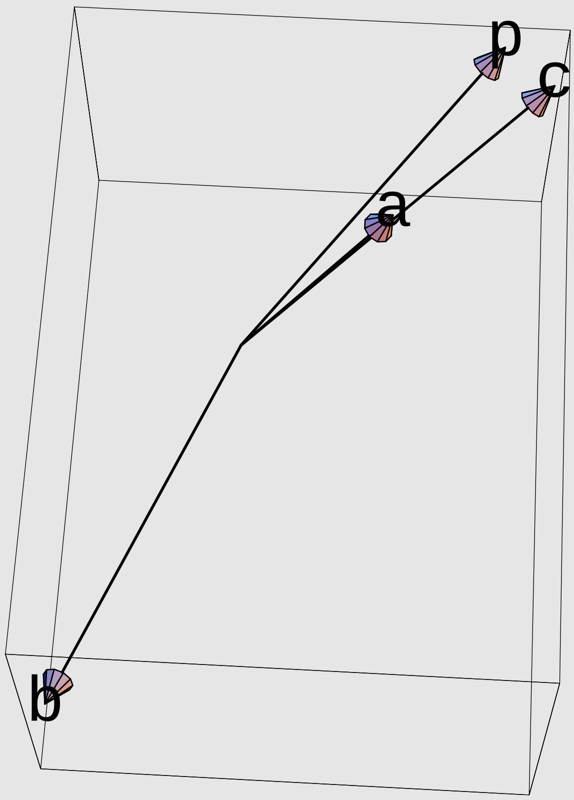
[24]

```
u = {1, 3, 2}; v = {-2, 1, 1}; w = {t, 0, -1};

RowReduce[{u, v}]
{{1, 0, -1/7}, {0, 1, 5/7}}

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{t → 7}}

Solve[(w/.t → 7) == a u + b v, {a, b}]
{{a → 1, b → -3}}
```

$t = 7$; $\mathbf{w} = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

[25]

```
a = {0, 1, 2}; b = {3, -1, 1}; c = {-1, 2, 2};

p = c - (c.Cross[a, b])/(Cross[a, b].Cross[a, b]) Cross[a, b]
{-7/6, 5/3, 13/6}

Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[c, c],
  Arrow3D[p, p], ViewPoint- > {1.63, 0.09, 3.59}]
```




```
-Graphics3D-
```

$-\frac{7}{6}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{13}{6}\mathbf{k}$.

[26]

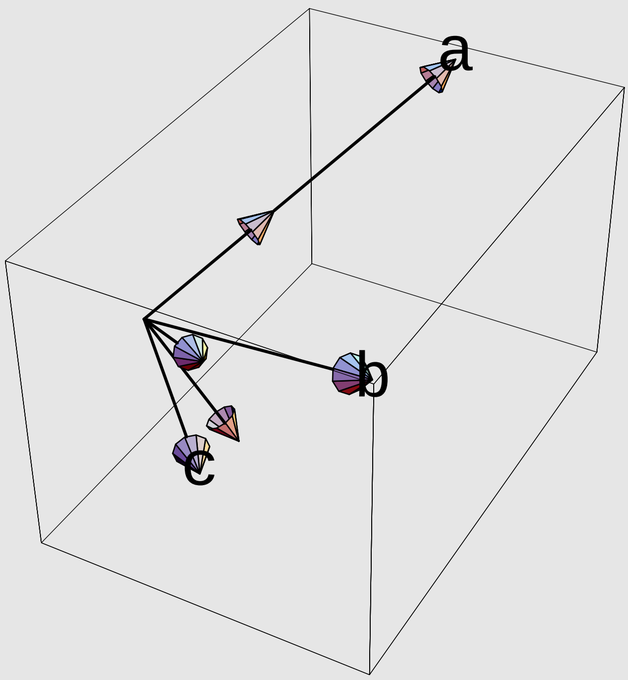
```
v1 = {-1, -2 - 2k, -2}; v2 = {1, -2 + 2k, 16}; v3 = {4, -7 - k, 8};

Solve[v3 == a v1 + b v2]
```
$\{\{a \to -4, b \to 0, k \to -\frac{5}{3}\}\}$

i) $k = -\dfrac{5}{3}$. ii) $\mathbf{v}_3 = -4\mathbf{v}_1$.

[27]

```
a = {1, 2, 1}; b = {2, -1, 1}; c = {1, -1, 0};

Det[{a, b, c}]
2

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

g = GramSchmidt[{a, b, c}]
```
$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{11}{\sqrt{210}}, -4\sqrt{\frac{2}{105}}, \sqrt{\frac{5}{42}}\right\}, \left\{\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right\}\right\}$

```
Show[Arrow3D[a, a], Arrow3D[b, b], Arrow3D[c, c],
  Arrow3D[g[[1]]], Arrow3D[g[[2]]], Arrow3D[g[[3]]]]
```




```
-Graphics3D-
```

ii) Per esempio: $\mathbf{e}_1 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$; $\mathbf{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{210}}(-11, 8, -5)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$.

[28]

```
u = {1, 0, -h}; v = {0, h, -1}; w = {h, 2h, -1};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{h → 0}, {h → -ⅈ}, {h → ⅈ}}

Solve[Cross[u, v] == {0, 0, 0}]
{}

Solve[{u.v == 0, u.w == 0, v.w == 0}]
{}

(u - (u.Cross[v, w]) / (Cross[v, w].Cross[v, w]) Cross[v, w]) /. h → 2
```

$\left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{3}\right\}$

i) $h = 0$. ii) No. iii) No. iv) $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

[29]

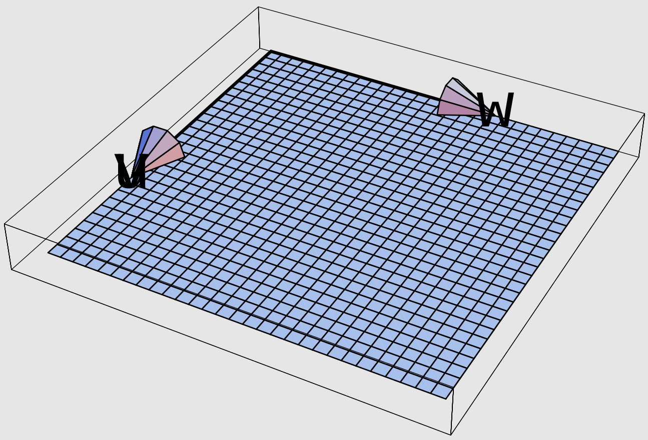
```
u = {1, -1, 0}; v = {1, 0, 1}; X = {x, y, z};

Solve[{X.u == 0, X.v == 0, X.X == 1}, X]
```

$\left\{\left\{y \to -\frac{1}{\sqrt{3}}, z \to \frac{1}{\sqrt{3}}, x \to -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{y \to \frac{1}{\sqrt{3}}, z \to -\frac{1}{\sqrt{3}}, x \to \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

[30]

```
u = {2h, -1, h}; v = {h, -1, 0}; w = {1, -h, 0};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{h → -1}, {h → 0}, {h → 1}}

Solve[Cross[u, v] == 0]
{{h → 0}, {h → 0}}

h = 0;

Show[Arrow3D[u, "u"], Arrow3D[v, "v"], Arrow3D[w, "w"],
 ParametricPlot3D[a * v + b * w, {a, 0, 1.5}, {b, 0, 1.5}],
 ImageSize → 300]
```




```
-Graphics3D-
```

i) $h = 0$, $h = \pm 1$.   ii) $h = 0$.

[31]

```
a = {2, 2, h}; b = {1, -1, 2h};

Solve[Cross[a, b].Cross[a, b] == 56]
```

$\left\{\left\{h \to -2\sqrt{\frac{5}{17}}\right\}, \left\{h \to 2\sqrt{\frac{5}{17}}\right\}\right\}$

```
Solve[a.b == 0]
{{h → 0}, {h → 0}}

Solve[Cross[a, b] == 0]
{}
```

i) $h = \pm 2\sqrt{\dfrac{5}{17}}$.

ii) Si per $h = 0$, no perché le loro proiezioni ortogonali sul piano vettoriale individuato da $\mathbf{i}$ e da $\mathbf{j}$ sono ortogonali.

[32]

```
u = {1, 0, 1}; v = {0, 1, 1}; X = {x, y, z};

Solve[{X.Cross[u, v] == 0, X.u == 0, X.X == 2}, X]
```
$$\left\{\left\{y \to -\frac{2}{\sqrt{3}},\ x \to \frac{1}{\sqrt{3}},\ z \to -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{y \to \frac{2}{\sqrt{3}},\ x \to -\frac{1}{\sqrt{3}},\ z \to \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$
```
LinearSolve[Transpose[{u, v, Cross[u, v]}], {1, 0, 0}]
```
$$\left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$$

i) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,-2,-1)$. ii) $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

[33]

```
u = {1, 2, -1}; v = {1, 0, 2}; w = {-t, t, t + 2}; w′ = {x, y, z};

Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
```
$$\left\{\left\{t \to -\frac{4}{9}\right\}\right\}$$
```
Solve[w == a u + b v]
```
$$\left\{\left\{a \to -\frac{2}{9},\ b \to \frac{2}{3},\ t \to -\frac{4}{9}\right\}\right\}$$
```
Solve[{t == -1, w′.u == 0, w′.v == 0, w′.w′ == w.w}, w′]
```
$$\left\{\left\{y \to -3\sqrt{\frac{3}{29}},\ x \to 4\sqrt{\frac{3}{29}},\ z \to -2\sqrt{\frac{3}{29}}\right\}, \left\{y \to 3\sqrt{\frac{3}{29}},\ x \to -4\sqrt{\frac{3}{29}},\ z \to 2\sqrt{\frac{3}{29}}\right\}\right\}$$

i) $t = -\dfrac{4}{9}$, $\mathbf{w} = -\dfrac{2}{9}\mathbf{u} + \dfrac{2}{3}\mathbf{v}$.

ii) $\mathbf{w}' = \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{29}}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\right)$

[34] Se $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$, dalla definizione di norma e dalle proprietà del prodotto scalare, segue: $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$. Il viceversa si ottiene in modo analogo.

[35] Si assume che $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$. Dalla formula del prodotto scalare, segue: $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})$ e $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) = \cos(\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y})$.

[36]

```
u = {l, -l, 1}; v = {1, 2, 1}; w = {l, -1, l};

Solve[Det[{u, v, w}] == 30]
{{l → 1/4 (1 - √249)}, {l → 1/4 (1 + √249)}}

A = Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{l → -1/2}, {l → 1}}

v.w/.A[[1]]
-3

v.w/.A[[2]]
0

l = 2;

Det[{u, v, w}]
5

LinearSolve[Transpose[{u, v, w}], {0, 1, 0}]
{0, 2/5, -1/5}
```

i) $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{249}}{4}$.

ii) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

iii) $\mathbf{j} = \dfrac{2}{5}\mathbf{v} - \dfrac{1}{5}\mathbf{w}$.

[37]

```
a = {t, -1, 3}; b = {1, -2, 1}; c = {1, -1, -1};
d = {1, 3, -t}; x = {x1, x2, x3};

Reduce[{Det[{x, a, b}] == 0, Cross[x, c] == d}, x]
t == 2&&x1 == 1&&x2 == 1&&x3 == 2
```

$\alpha = 2,\ \mathbf{x} = (1, 1, 2)$.

[38] Se $h \neq 0$: esiste una sola soluzione: $\mathbf{x} = \left(\dfrac{4}{h}, 2, 2\right)$; se $h = 0$: non esistono soluzioni.

[39] i) -3;

ii) $\mathbf{i} = \dfrac{2}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - \dfrac{1}{3}(\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \dfrac{1}{3}(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$;

iii) $\dfrac{1}{2}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

Capitolo 9

Spazi Vettoriali

Introduciamo in questo capitolo la definizione di spazio vettoriale, concetto su cui si basa l'algebra lineare. In Geometria e Algebra Lineare I si studieranno solo gli spazi vettoriali costruiti sul campo dei numeri reali, in Geometria e Algebra Lineare II si studieranno gli spazi vettoriali sul campo complesso. La definizione trae origine dal ben noto esempio dell'insieme dei vettori nello spazio tri-dimensionale ordinario, si intende algebrizzare tale concetto con il duplice scopo di dimostrare teoremi dalle conseguenze essenziali nel caso dello spazio ordinario e di estendere tali nozioni a dimensione superiore a 3.

Definizione 9.1 *Un insieme V si dice* **spazio vettoriale sul campo dei numeri reali** $\mathbb{R}$ *se sono definite su V le seguenti due operazioni:*

i) *la somma: $+ : V \times V \longrightarrow V$ rispetto alla quale V ha la struttura di gruppo commutativo, ossia valgono le proprietà:*

1. *commutativa:* $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$*;*
2. *associativa:* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$*;*
3. *esistenza dell'elemento neutro:* $\exists\, \mathbf{0} \in V \mid \mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in V$*;*
4. *esistenza dell'opposto:* $\forall \mathbf{x} \in V \;\; \exists -\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=(-\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{0}$*;*

ii) *il prodotto per numeri reali: $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ tale che $(\lambda,\mathbf{x}) \mapsto \lambda\mathbf{x}$ per cui valgono le seguenti proprietà:*

1. $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$*; si osservi che tale proprietà non può essere chiamata distributiva del prodotto rispetto alla somma, in quanto coinvolge elementi appartenenti ad insiemi diversi;*
2. $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$*;*
3. $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$*;*
4. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V$.

Gli elementi di V prendono il nome di **vettori** *e saranno, in generale, indicati in grassetto, gli elementi di $\mathbb{R}$ prendono il nome di* **scalari***, l'elemento neutro $\mathbf{0}$ di V viene detto* **vettore nullo**.

Osservazione 9.1 Si può dare una definizione analoga di spazio vettoriale ma costruito su un qualsiasi campo, per esempio sul campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ o dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Verranno descritti di seguito gli esempi ritenuti più significativi, si rimanda al Capitolo 12 per ulteriori esempi ed esercizi.

Esempio 9.1 Iniziamo con gli esempi che hanno dato il nome alla struttura di spazio vettoriale appena definita. V_1, V_2, V_3: gli insiemi dei vettori della retta, del piano e dello spazio rispettivamente, sono esempi di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per un numero reale definite in modo elementare.

Esempio 9.2 L'insieme delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$ di m righe e n colonne, ad elementi reali, definite nel Capitolo 3 sono una famiglia di esempi di spazi vettoriali rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per numeri reali là definite.

Esempio 9.3 L'**esempio fondamentale**:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

È un caso particolare dell'esempio precedente ma, visto il ruolo fondamentale che avrà in tutto il corso, lo trattiamo a parte.
La somma di due n-uple di $\mathbb{R}^n$ è definita come:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Il vettore nullo è dato dalla n-upla: $(0, 0, \dots, 0)$ e l'opposto del vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è il vettore $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.
Il prodotto di un numero reale per un elemento di $\mathbb{R}^n$ è definito da:

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Si osservi che, come caso particolare, $\mathbb{R}$ ha la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. In questo caso, le operazioni di somma e di prodotto per scalari coincidono con le usuali definizioni di somma e di prodotto di numeri reali.

Esempio 9.4 Il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è un esempio di spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ (ma non su $\mathbb{R}$), analogamente il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ ha la struttura di spazio vettoriale su se stesso e anche su $\mathbb{R}$. Si lascia per esercizio la spiegazione dettagliata di tali affermazioni.

Esempio 9.5 L'insieme delle funzioni reali di variabile reale: $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ è un esempio di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dove la somma è definita da:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}$$

e il prodotto di una funzione per un numero reale è:

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si verifica facilmente che il vettore nullo è la funzione nulla : $\mathcal{O}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, l'opposto di f è la funzione $-f$ definita in modo evidente:

$$(-f)(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vale il seguente teorema, il cui enunciato è naturalmente intuibile.

Teorema 9.1 *In V, spazio vettoriale reale, si ha:*

1. *il vettore nullo $\mathbf{0}$ è unico;*
2. *per ogni vettore $\mathbf{x} \in V$ l'opposto $-\mathbf{x}$ è unico;*
3. *se $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ allora $\mathbf{y} = \mathbf{z}$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$;*
4. *$\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in V \iff \lambda = 0$ oppure $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;*
5. *$(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x} \in V$.*

Dimostrazione: La dimostrazione, quasi un esercizio, si può leggere nel Capitolo 12.

Capitolo 10

Sottospazi Vettoriali

La nozione di sottospazio vettoriale, oggetto di questo capitolo, intende estendere l'idea dell'insieme dei vettori del piano visto come sottoinsieme dei vettori dello spazio aventi entrambi la stessa struttura di spazio vettoriale, con le stesse operazioni, riferite allo stesso campo di scalari.

10.1 Definizione ed Esempi

Definizione 10.1 *Sia V uno spazio vettoriale reale, $\mathcal{W} \subseteq V$ è un* **sottospazio vettoriale** *di V se $\mathcal{W}$ è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V, ossia se è* **chiuso** *rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per scalari definite in V, vale a dire:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{W},$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{W} \Rightarrow \lambda \mathbf{x} \in \mathcal{W},$$

che equivale a:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W} \Rightarrow \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in \mathcal{W}.$$

.

Osservazione 10.1 Segue dalla definizione che il vettore nullo deve necessariamente appartenere ad ogni sottospazio vettoriale.

Esempio 10.1 L'insieme dei vettori ordinari del piano V_2 è un sottospazio vettoriale di V_3, insieme dei vettori dello spazio. L'insieme dei vettori di una retta V_1 è un sottospazio vettoriale di V_2 e di V_3. Si noti il comune abuso di linguaggio, con V_1 è da intendersi una retta vettoriale (graficamente un insieme di rette parallele, una direzione), con V_2 è da intendersi un piano vettoriale (graficamente un insieme di piani paralleli, una giacitura).

Esempio 10.2 Si osservi che, nonostante $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, l'insieme dei numeri razionali (spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$) **non** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$, in quanto su $\mathbb{Q}$ non è definito lo stesso prodotto di $\mathbb{R}$, il prodotto di un numero reale per un numero razionale non è necessariamente razionale.

Esempio 10.3 In ogni spazio vettoriale V compaiono necessariamente due sottospazi vettoriali: V e $\{\mathbf{0}\}$. Essi coincidono solo se $V = \{\mathbf{0}\}$. Tali sottospazi si dicono **impropri**.

Ci occupiamo ora della rappresentazione dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ mediante equazioni. Per capire meglio la teoria, iniziamo con un esercizio.

Esercizio 10.1 Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\},\\
\mathcal{B} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = x_2 + x_3 = 0\},\\
\mathcal{C} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5\},\\
\mathcal{D} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 3x_2 - x_3 = 0\},
\end{aligned}$$

dire quali sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ giustificando la risposta.

Soluzione: È facile osservare che $\mathcal{C}$ non è un sottospazio perchè non contiene il vettore nullo, in altri termini l'equazione lineare che definisce $\mathcal{C}$ non è omogenea.
Dimostriamo che $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Siano (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) due elementi di $\mathcal{A}$ ossia tali che: $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2y_1 + 3y_2 - y_3 = 0$, dimostriamo che la loro somma $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ è un elemento di $\mathcal{A}$, vale a dire $2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = 0$, che è ovvia conseguenza dell'appartenenza ad $\mathcal{A}$ di (x_1, x_2, x_3) e di (y_1, y_2, y_3). Analogamente si dimostra che $\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ è un elemento di $\mathcal{A}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}$.
Si dimostra in modo analogo che $\mathcal{B}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
$\mathcal{D}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, pur contenendo il vettore nullo, infatti dati $(1, 0, 2), (2, 0, 8) \in \mathcal{D}$ la loro somma $(3, 0, 10)$ non appartiene a $\mathcal{D}$ $(2 \cdot 3^2 - 10 = 8)$.

L'esercizio precedente suggerisce il seguente risultato di carattere generale.

Esempio 10.4 Esempio fondamentale di sottospazio. L' insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. La dimostrazione, che è una conseguenza evidente dell'esempio precedente, può essere anche ottenuta procedendo in modo sintetico. Infatti, sia

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0,\ A \in \mathbb{R}^{m,n}\}$$

l'insieme da considerarsi, dove si identifica $\mathbb{R}^{n,1}$ con $\mathbb{R}^n$. Dati $X_1, X_2 \in \mathcal{N}(A)$, allora $AX_1 = AX_2 = 0$. Si deve dimostrare che $\lambda X_1 + \mu X_2 \in \mathcal{N}(A)$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ma $A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda AX_1 + \mu AX_2 = 0$. Si osservi che con O si indica la matrice nulla di $\mathbb{R}^{n,1}$. $\mathcal{N}(A)$ prende il nome di **nullspace** (o nullificatore) di A.

Osservazione 10.2 Quanti vettori contiene un sottospazio vettoriale?

Continuiamo con un elenco di sottospazi notevoli dello spazio vettoriale delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$. Le verifiche sono lasciate per esercizio.

Esempio 10.5 Il sottoinsieme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n,n})$ di $\mathbb{R}^{n,n}$ (spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n) formato dalle matrici diagonali, definito in 3.3, è un sottospazio vettoriale.

Esempio 10.6 Il sottoinsieme $\mathcal{T}(\mathbb{R}^{n,n})$ di $\mathbb{R}^{n,n}$ delle matrici triangolari superiori, definito in 3.3, è un sottospazio vettoriale; analoga affermazione per il sottoinsieme delle matrici triangolari inferiori.

Esempio 10.7 L'insieme delle matrici simmetriche (cfr. 3.3):

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid {}^tA = A\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$, Infatti se $A_1, A_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ si ha che ${}^tA_1 = A_1$ e ${}^tA_2 = A_2$, allora ${}^t(A_1 + A_2) = {}^tA_1 + {}^tA_2 = A_1 + A_2$, la dimostrazione della chiusura rispetto al prodotto per scalari è lasciata per esercizio.

Esempio 10.8 L'insieme delle matrici antisimmetriche (cfr. 3.3):

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid {}^tA + A = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale (per la dimostrazione si procede in modo analogo all'esempio precedente.)

Osservazione 10.3 Si osservi che l'insieme delle matrici ortogonali (cfr. 3.3):

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \ \mid \ {}^tAA = I\}$$

non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$, perchè non contiene il vettore nullo.

Osservazione 10.4 Si osservi che l'insieme:

$$\mathcal{W} = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A = 0\}$$

non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n,n}$. Perché?

10.2 Somma di sottospazi vettoriali

Siano $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V costruito su $\mathbb{R}$. Si ha:

Teorema 10.1 *L'intersezione insiemistica $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. È immediata conseguenza delle definizioni di sottospazio vettoriale e di intersezione insiemistica.

Esempio 10.9 Siano:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

La loro intersezione è il sottospazio:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - x_3 = 0\} \\ &= \{(a, -4a, a), \ a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Esempio 10.10 In V_3, spazio vettoriale reale dei vettori ordinari, riferito ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, i sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{k})$$

si intersecano nella retta vettoriale:

$$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{i}).$$

Si ricordi che la notazione $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ indica l'insieme di tutti i vettori che sono paralleli ad $\mathbf{a}$, analogamente $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ indica l'insieme dei vettori complanari ad $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; nel Capitolo 11 si generalizzerà questa notazione.

L'unione di due sottospazi non è, in generale, un sottospazio vettoriale, come si deduce dagli esempi prima citati. Infatti si ha:

Nell'Esempio 10.9 $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ non è un sottospazio perchè, per esempio, la somma di $(1, 2, -5) \in \mathcal{W}_1$ insieme con $(2, 3, 2) \in \mathcal{W}_2$ non appartiene a $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$.

Nell'Esempio 10.10 il vettore $\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (4\mathbf{k})$ non appartiene a $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ pur essendo somma di un vettore di $\mathcal{W}_1$ e di un vettore di $\mathcal{W}_2$.

Esercizio 10.2 In quali casi l'unione di due sottospazi è un sottospazio?

Gli esempi precedenti giustificano la seguente:

Definizione 10.2 *Si definisce* **somma** *di $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ l'insieme:*

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \ \mathbf{x}_1 \in \mathcal{W}_1, \ \mathbf{x}_2 \in \mathcal{W}_2\}.$$

Teorema 10.2 *1.* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ *è un sottospazio vettoriale.*

2. $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ *è il più piccolo sottospazio contenente* $\mathcal{W}_1$ *e* $\mathcal{W}_2$*.*

Dimostrazione. 1. Segue dalla definizione di somma di sottospazi e dalla definizione di sottospazio vettoriale.
2. $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ in quanto i suoi elementi possono essere scritti come $\mathbf{x} + \mathbf{0}$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{W}_1$, considerando il vettore nullo $\mathbf{0}$ come elemento di $\mathcal{W}_2$. Dimostrazione analoga per $\mathcal{W}_2$. La somma $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ è il più piccolo sottospazio contenente $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ perchè ogni altro sottospazio con questa proprietà deve necessariamente contenere tutte le combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{W}_1$ e di $\mathcal{W}_2$ e, quindi, deve contenere $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$. ▮

La definizione di somma si estende in modo naturale a più di due sottospazi:

Definizione 10.3 *Siano* $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$, *sottospazi vettoriali di* V*. La loro somma è data da:*

$$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ldots + \mathcal{W}_k = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k, \ \mathbf{x}_i \in \mathcal{W}_i, i = 1, \ldots k\}.$$

Anche in questo caso si può dimostrare una proprietà analoga al Teorema 10.2.

Si presti particolare attenzione ai seguenti esempi.

Esempio 10.11 Siano:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3, \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{W}_2 &= \{(0, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Si verifica che $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^3$. Ogni elemento $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ si scrive, in modo unico, come somma di un elemento di $\mathcal{W}_1$ e di un elemento di $\mathcal{W}_2$, infatti:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0) + (0, 0, x_3).$$

Esempio 10.12 Siano:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3, \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{Z}_2 &= \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Si verifica che $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{Z}_2 = \{(x_1, 0, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{Z}_2 = \mathbb{R}^3$. In questo caso, per esempio, $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere in infiniti modi diversi come somma di un elemento di $\mathcal{W}_1$ e di un elemento di $\mathcal{Z}_2$, infatti:

$$(1, 2, 3) = (a, 2, 0) + (b, 0, 3), \ a, b \in \mathbb{R} \mid a + b = 1.$$

Ciò suggerisce la seguente:

Definizione 10.4 *Siano* $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ *sottospazi vettoriali di* V*, la somma* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ *si dice* **diretta** *e si scrive:*

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \tag{10.1}$$

se ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ *si decompone in modo unico come* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ *con* $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{W}_1$ *e* $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{W}_2$*.*

La precedente definizione si estende a più di due sottospazi nel modo seguente:

Definizione 10.5 *Siano* $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \ldots k$, *sottospazi vettoriali di* V*; la loro somma si dice* **diretta** *e si scrive:*

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_k$$

se ogni vettore $\mathbf{x}$ *di tale somma si decompone in modo unico come:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k$$

con $\mathbf{x}_i \in \mathcal{W}_i, \ i = 1, \ldots k.$

Sarà utile la seguente:

Definizione 10.6 *$\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, sottospazi vettoriali di V, si dicono* **supplementari** *se:*

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = V.$$

Osservazione 10.5 La somma di due o più sottospazi è generata dall'unione dei medesimi nel senso che i vettori del sottospazio somma sono combinazioni lineari dei vettori dei sottospazi addendi.

Osservazione 10.6 $V_3 = \mathcal{L}(\mathbf{i}) \oplus \mathcal{L}(\mathbf{j}) \oplus \mathcal{L}(\mathbf{k}) = \mathcal{L}(\mathbf{i},\mathbf{j}) \oplus \mathcal{L}(\mathbf{k}) = \ldots\ldots$

Esercizio 10.3 In V_3 quanti sono i sottospazi supplementari di $\mathcal{L}(\mathbf{i},\mathbf{j})$?

Teorema 10.3 *Lo spazio vettoriale delle matrici quadrate si decompone nel modo seguente:*

$$\mathbb{R}^{n,n} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}),$$

dove $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ indica il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{n,n}$, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ è il sottospazio delle matrici antisimmetriche definiti negli Esempi 10.7 e 10.8.

Dimostrazione. Segue dalla scrittura:

$$2A = (A + {}^tA) + (A - {}^tA)$$

e dal fatto che $A + {}^tA$ è una matrice simmetrica, mentre $A - {}^tA$ è antisimmetrica.

I seguenti teoremi caratterizzano la somma diretta:

Teorema 10.4

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 \text{ e } \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Dimostrazione. Se la somma dei due sottospazi è diretta, allora ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ si scrive in modo unico come $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, con $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{W}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{W}_2$. Per assurdo, se $\mathbf{y}(\neq \mathbf{0}) \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ allora l'espressione $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{y})$ contraddice l'ipotesi.
Si supponga che $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ ed, inoltre, per assurdo, sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, con $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in \mathcal{W}_1$, $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{W}_2$ e $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{y}_1$ oppure (o anche) $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{y}_2$. Segue che $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = -\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2$ da cui si perviene ad una contraddizione.

Il seguente esempio mostra che tale teorema non può essere esteso al caso della somma diretta di più sottospazi.

Esempio 10.13 In V_3, rispetto ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{i},\mathbf{j}); \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{i}+\mathbf{k}); \quad \mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

È chiaro che $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \cap \mathcal{W}_3 = \{\mathbf{0}\}$, e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = V_3$ ma la loro somma non è diretta; per esempio:

$$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} = [a\mathbf{i} + (1-a)\mathbf{j}] + [(1-a)\mathbf{i} + (1-a)\mathbf{k}] + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Il teorema che caratterizza la somma diretta di più di due sottospazi, è, infatti, il seguente:

Teorema 10.5

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ldots + \widehat{\mathcal{W}_i} + \ldots + \mathcal{W}_k) = \{\mathbf{0}\}, \\ \text{e } \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \ldots + \mathcal{W}_k, \ i = 1, \ldots k. \end{array}$$

($\widehat{\mathcal{W}_i}$ indica che si deve escludere il sottospazio $\mathcal{W}_i$ dalla somma).

Esercizio 10.4 *Avvertenza:* Il seguente esercizio é risolto a titolo di esempio per chiarire i concetti esposti in questo paragrafo. Nel capitolo successivo indicheremo un metodo piú rapido per risolvere problemi analoghi.

In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\},$$
$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\},$$

dimostrare che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$.

Soluzione: Innanzi tutto osserviamo che effettivamente $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ essendo definiti tramite sistemi lineari omogenei. La loro intersezione $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ coincide con le soluzioni del sistema lineare omogeneo formato da tutte le equazioni che definiscono $\mathcal{W}_1$ e da tutte le equazioni che definiscono $\mathcal{W}_2$, nel nostro caso si ha:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni, come spiegato nel Paragrafo 1.2, dipendono dal rango della matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

riducendo per righe la matrice A si ottiene $\operatorname{rank}(A) = 4$ da cui segue che $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\mathbf{0}\}$.
Per dimostrare che $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$ si devono scrivere esplicitamente le espressioni dei vettori di $\mathcal{W}_1$ e di $\mathcal{W}_2$. Nel primo caso, risolvendo l'equazione che definisce $\mathcal{W}_1$, si ottiene che $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{W}_1$ se $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2t_1 - 3t_2 - t_3, t_1, t_2, t_3)$, $\forall t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Invece, risolvendo il sistema lineare che definisce $\mathcal{W}_2$, si ha che $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{W}_2$ se $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, \lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Si ottiene la tesi provando che un generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ si puó scrivere come somma di un vettore di $\mathcal{W}_1$ e di un vettore di $\mathcal{W}_2$, in altri termini dato (x_1, x_2, x_3, x_4) esistono opportuni valori di $t_1, t_2, t_3, \lambda \in \mathbb{R}$ per cui $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2t_1 - 3t_2 - t_3, t_1, t_2, t_3 + \lambda)$, che é ovvio dalla scrittura stessa. Il Teorema 10.4 e il calcolo dell'intersezione dei due sottospazi assicurano che tali valori sono unici.

Capitolo 11

Generatori, Basi e Dimensione

11.1 Base di uno spazio vettoriale

Definizione 11.1 *Dati i vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ *di* V*, spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$*, il vettore* $\mathbf{x}$ *definito da:*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \tag{11.1}$$

si dice **combinazione lineare** *(c.l.) di* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$*. I numeri reali* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *si dicono* **coefficienti della combinazione lineare**.

Fissati i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ in V si vogliono considerare tutte le loro combinazioni lineari. Tale insieme indicato con:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n),$$

o con $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n >$, prende il nome (dall'inglese) di **span** di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, di cui $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono i **generatori**. Si ha:

Teorema 11.1 $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ *è un sottospazio vettoriale di* V *ed è il piu' piccolo sottospazio vettoriale di* V *contenente i vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esempio 11.1 In V_3, rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, il piano vettoriale $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ è un sottospazio vettoriale.

Il teorema che segue, la cui dimostrazione è un esercizio, permette di cambiare generatori in un sottospazio vettoriale.

Teorema 11.2 *In* $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ *si possono aggiungere o sostituire più generatori con loro combinazioni lineari.*

Osservazione 11.1 Come immediata conseguenza del teorema precedente si ottiene che $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ammette infiniti generatori.

Esempio 11.2 Il piano $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ di V_3 si può definire come $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \mathcal{L}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{i} - 100\mathbf{j}, 4\mathbf{i}, \mathbf{0})$ e così via, ma non come $\mathcal{L}(\mathbf{i})$.

Esempio 11.3 Lo spazio vettoriale dei numeri reali può essere generato da un qualsiasi numero non nullo: $\mathbb{R} = \mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(35)$.

Esempio 11.4 $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathcal{L}((1,2,3),(2,3,0),(0,0,2),(4,5,6))$.

Esempio 11.5 $\mathbb{R}^{2,2}$ è generato, per esempio, dalle matrici: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ma anche dalle matrici: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Esempio 11.6 Consideriamo il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$$

introdotto nell'Esercizio 10.1 e determiniamone un sistema di generatori. A tale scopo si deve risolvere il sistema lineare omogeneo, come descritto nel Paragrafo 1.2 e si ottengono infinite soluzioni che dipendono da un parametro $t \in \mathbb{R}$ date da:

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t. \end{cases}$$

In altri termini, il generico elemento di $\mathcal{B}$ è del tipo $(2t, -t, t) = t(2, -1, 1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ossia $(2, -1, 1)$ è un generatore di $\mathcal{B}$.

Le definizioni e le proprietà che seguono preparano alla definizione rigorosa di dimensione di uno spazio vettoriale.

Definizione 11.2 *I vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ *di* V *si dicono* **linearmente indipendenti** *(l.i.) se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo ha coefficienti tutti nulli, vale a dire:*

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0. \tag{11.2}$$

L'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *di vettori l.i. si dice* **libero**.

Osservazione 11.2 Si osservi che in (11.2) vale anche l'implicazione opposta.

Enunciamo, ora, la definizione che nega la Definizione 11.2.

Definizione 11.3 *I vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ *di* V *si dicono* **linearmente dipendenti** *(l.d.) se esiste almeno una loro combinazione lineare che dà il vettore nullo a coefficienti non tutti nulli.*

Prima di proporre alcuni esempi conviene dimostrare la seguente proprietà, molto facile, ma utile per riconoscere vettori l.d. o l.i.

Teorema 11.3 *I vettori* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ *di* V *sono l.d. se e solo se uno di essi si può esprimere come c.l. dei rimanenti.*

Dimostrazione: Hp: Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ l.d. Allora: $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ con $x_1 \neq 0$ (se il coefficiente non nullo non fosse x_1 potremmo commutare in modo da porre al primo posto il coefficiente non nullo), è perciò possibile ricavare:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{x_2}{x_1}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{x_n}{x_1}\mathbf{v}_n$$

da cui la tesi. Il viceversa è lasciato per esercizio . ▮

La verifica degli esempi che seguono è lasciata per esercizio:

Esempio 11.7 Ogni insieme del tipo: $\mathcal{I} = \{\mathbf{x}\}$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ è libero.

Esempio 11.8 In V_3 i vettori di una base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono linearmente indipendenti, lo stesso vale per ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{B}$.

Esempio 11.9 Se in un insieme di vettori $\mathcal{I}$ compare il vettore nullo, allora $\mathcal{I}$ non è libero.

Esempio 11.10 Se $\mathcal{A}$ è un insieme libero, allora ogni suo sottoinsieme non vuoto è libero.

Esempio 11.11 Se C è un insieme di vettori l.d. allora ogni insieme che lo contiene è formato da vettori l.d.

La definizione che segue estende la nozione di base data nel caso particolare di V_3 dei vettori ordinari dello spazio e di V_2 dei vettori del piano.

Definizione 11.4 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, un insieme di vettori $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di V si chiama* **base** *di V se:*

1. *$\mathcal{B}$ è un insieme libero:*
2. *$\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di V, ossia $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = V$.*

Esempio 11.12 1. In V_3 una base è data da $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, in V_2 una base è data da $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

2. In $\mathbb{R}^n$ una base è data da: $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1))$.

   Questa base particolare, molto naturale, prende il nome di **base standard** o **base canonica**. Per esempio, nel caso particolare di $\mathbb{R}^4$ si ha che la quaterna: $(1, 2, 3, 4)$ si scrive come $1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4$, da cui la giustificazione della particolare denominazione della base usata. Sempre in $\mathbb{R}^4$ se si considera, per esempio, la base: $\mathcal{B}' = (\mathbf{f}_1 = (2, 0, 0, 0), \mathbf{f}_2 = (0, 3, 0, 0), \mathbf{f}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{f}_4 = (0, 0, 0, 4))$ si ha: $(1, 2, 3, 4) = \dfrac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \dfrac{2}{3}\mathbf{f}_2 + 3\mathbf{f}_3 + 1\mathbf{f}_4$ che è una decomposizione molto meno naturale della precedente.

3. Analogamente al caso di $\mathbb{R}^n$, la base canonica dello spazio vettoriale delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$ è formata, ordinatamente, dalle mn matrici E_{ij} aventi il numero 1 al posto ij e 0 per ogni altro elemento. Nel caso particolare di $\mathbb{R}^{2,3}$ la base canonica è formata dalle 6 matrici seguenti:

   $$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   $$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

   quindi:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = E_{11} + 2E_{12} + 3E_{13} + 4E_{21} + 5E_{22} + 6E_{23}.$$

Il teorema che segue **caratterizza** le basi in V.

Teorema 11.4 1. *Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base dello spazio vettoriale reale V, allora ogni vettore $\mathbf{x}$ di V si decompone in modo unico come:*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n, \tag{11.3}$$

con $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. *Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un insieme di vettori di V tale che ogni vettore $\mathbf{x}$ di V si decompone in modo unico rispetto a tali vettori come in (11.3) allora l'insieme $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V.*

La dimostrazione di questo teorema è lasciata per esercizio.

Osservazione 11.3 Fissata una base $\mathscr{B}$ in V, per ogni vettore $\mathbf{x}$ di V la n-upla, individuata univocamente da (11.3), si indica spesso con la matrice colonna: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. I numeri reali x_i sono le **componenti** di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathscr{B}$.

Osservazione 11.4 Fissata una base $\mathscr{B}$ in V, dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di V le cui matrici colonne delle componenti sono: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, il vettore $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ ha componenti:

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

e il vettore $\lambda\mathbf{x}$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ ha componenti:

$$\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Si osservi, inoltre, l'assoluta coerenza tra le definizioni di somma di matrici e somma di vettori e tra prodotto di un numero reale per una matrice e prodotto di un numero reale per un vettore.

Dalla definizione di base di uno spazio vettoriale e dal teorema ad essa relativo emergono naturalmente le seguenti domande:

1. In ogni spazio vettoriale esiste sempre almeno una base?
2. Nel caso affermativo, quante basi esistono?
3. Nel caso in cui esistano molte basi, quanti vettori contengono ciascuna?

Nel caso particolare degli spazi dei vettori ordinari V_3 e V_2, aiutati dalla visualizzazione geometrica, conosciamo già le risposte alle precedenti domande, i teoremi che seguono permettono di dare analoghe risposte **solo** nel caso particolare degli spazi vettoriali che ammettono un numero **finito** di generatori, ossia per gli spazi vettoriali detti **finitamente generati**. Pertanto tutta la trattazione che segue sarà esclusivamente rivolta a questo tipo di spazi vettoriali, quali, ad esempio: $\mathbb{R}^n$ e lo spazio delle matrici $\mathbb{R}^{m,n}$, (cfr. Esempio 11.12). Per non perdere la scansione logica del discorso, enunciamo uno di seguito all'altro i teoremi previsti, anteponendo il commento e le loro conseguenze alla loro dimostrazione.

Teorema 11.5 *(***Teorema dell'esistenza di una base.***) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $\mathscr{G} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ un sistema di generatori. L'insieme $\mathscr{G}$ contiene almeno una base.*

Osservazione 11.5 Dal teorema precedente e dall'Osservazione 11.1 segue che, essendo possibile ottenere infiniti sistemi di generatori, esistono infinite basi in uno spazio vettoriale finitamente generato.

Teorema 11.6 *(***Lemma di Steinitz.***) Sia $\mathscr{B}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $\mathcal{I} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ un insieme libero, allora $p \leq n$.*

Teorema 11.7 *(***Teorema della dimensione.***) Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori.*

Definizione 11.5 *In uno spazio vettoriale V finitamente generato il numero dei vettori appartenenti ad una base prende il nome di* **dimensione** *di V e si indica con* $\dim V$.

Esempio 11.13 1. Segue dall'Esempio 11.12 che $\dim R^n = n$.

2. Segue dall'Esempio 11.12 che $\dim R^{m,n} = mn$.

Per dimostrare il Teorema 11.5 é necessario anteporre il seguente lemma tecnico:

Teorema 11.8 *Sia $\mathcal{I} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ un insieme libero di V. Sia $\mathbf{x} \in V$ un vettore che non é c.l. dei vettori di $\mathcal{I}$, allora l'insieme $\mathcal{I} \cup \{\mathbf{x}\}$ é libero in V.*

Dimostrazione: Si procede per assurdo, i dettagli sono lasciati al Lettore.

Dimostrazione del Teorema 11.5: Per la dimostrazione si procede con un numero finito di passi applicati all'insieme $\mathcal{G}$, procedimento autorizzato dal fatto che $\mathcal{G}$ é finito. Si inizia supponendo che ogni vettore di $\mathcal{G}$ sia diverso dal vettore nullo, in caso contrario si procede togliendo tutti gli eventuali vettori nulli da $\mathcal{G}$.
Primo passo: Si considera l'insieme $\mathcal{I}_1 = \{\mathbf{w}_1\}$ e i vettori rimanenti $\mathbf{w}_i$, $i = 2, \dots, m$. Se ogni $\mathbf{w}_i$ é l.d. da $\mathbf{w}_1$, ossia se esistono numeri reali λ_i tali che $\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_1$, $i = 2, \dots, m$, allora $\mathcal{I}_1$ é una base di V e il teorema é dimostrato. In caso contrario si considera il primo vettore di $\mathcal{G}$ che non verifica questa condizione. Sia, per esempio: $\mathbf{w}_2 \neq \lambda_2 \mathbf{w}_1$, si procede con il:
secondo passo: Si considera l'insieme libero (cfr. Teorema 11.8) $\mathcal{I}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Si presentano due possibilitá: o ogni vettore rimanente in $\mathcal{G}$ é c.l. dei vettori di $\mathcal{I}_2$, allora $\mathcal{I}_2$ é una base di V (quindi segue la tesi) oppure esiste almeno un vettore di $\mathcal{G}$ che non é c.l. di $\mathcal{I}_2$, supponiamo sia $\mathbf{w}_3$; in questo caso si procede con il:
terzo passo: Si considera l'insieme libero (cfr. Teorema 11.8) $\mathcal{I}_3 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ e si procede come nel secondo passo. Il procedimento termina dopo un numero finito di passi, al piú m. Si é cosí costruita una base di V a partire dal primo vettore $\mathbf{w}_1$ di $\mathcal{G}$. É evidente che procedendo con lo stesso metodo a partire da un altro vettore di $\mathcal{G}$ o da un'altro sistema di generatori di V si ottengono infinite basi . ∎

Osservazione 11.6 Il metodo descritto nella dimostrazione precedente prende spesso il nome di **metodo degli scarti successivi** proprio per il procedimento di calcolo che prevede.

Esercizio 11.1 In $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,3}$ delle matrici antisimmetriche, si consideri l'insieme $\mathcal{G} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$ con:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \ A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $\mathcal{G}$ é un sistema di generatori di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$ e se ne estragga una base.

Soluzione: Per rispondere al primo quesito si deve esprimere la generica matrice $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{G}$. Tale verifica é lasciata per esercizio.
Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 11.5 si ha:
primo passo: Sia $\mathcal{I}_1 = \{A_1\}$. Si verifica subito che $\{A_1, A_2\}$ é un insieme libero in $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$, si passa quindi al:
secondo passo: Sia $\mathcal{I}_2 = \{A_1, A_2\}$. Si verifica che $\{A_1, A_2, A_3\}$ é un insieme libero, si procede, quindi, con il:
terzo passo: Sia $\mathcal{I}_3 = \{A_1, A_2, A_3\}$. Si verifica che ogni altro vettore di $\mathcal{G}$ é c.l. di $\mathcal{I}_3$, si deduce, cosí che $\mathcal{I}_3$ é una base di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$. Tutte le verifiche sono lasciate per esercizio.

Per la dimostrazione del Teorema 11.6 si rimanda al Capitolo 12.

Dimostrazione del Teorema 11.7: Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ due basi di V, si tratta di dimostrare che $n = m$. Si consideri $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{B}'$ insieme libero di V, dal Teorema 11.6 segue che $m \leq n$, invertendo i ruoli di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$ si perviene alla tesi . ∎

Esempio 11.14 1. A partire dalla scrittura di una matrice diagonale si verifica facilmente che $\dim \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n,n})$ é n. La sua base canonica é formata ordinatamente dalle matrici E_{ii}, $i = 1, \dots, n$, definite nell'Esempio 11.12.

2. A partire dalla scrittura di una matrice triangolare superiore, si verifica facilmente che $\dim \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n,n}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e la sua base canonica é data, ordinatamente, dalle matrici E_{ij} con $1 \leq i \leq j \leq n$ definite nell'Esempio 11.12.

3. A partire dalla scrittura di una matrice simmetrica si verifica facilmente che $\dim \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e la sua base canonica é:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots\dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. A partire dalla scrittura di una matrice antisimmetrica si verifica facilmente che $\dim \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ e la sua base canonica é:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Concludiamo con l'enunciato di un teorema che sarà molto usato nel corso.

Teorema 11.9 *(***Teorema del completamento della base.***) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Dato l'insieme libero $\mathcal{I} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$, $(k \leq n)$, esiste una nuova base $\mathcal{B}'$ di V contenente tutti i vettori di $\mathcal{I}$ e $n-k$ vettori di $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione: Si consideri l'insieme $\mathcal{A} = \mathcal{I} \cup \mathcal{B}$, poiché $\mathcal{A}$ contiene una base, $V = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Si applichi il Teorema 11.5 ad $\mathcal{A}$ partendo dai vettori di $\mathcal{I}$, segue cosí la tesi . ▮

Esercizio 11.2 Nel sottospazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ delle matrici simmetriche di ordine 3 completare l'insieme libero:

$$\mathcal{I} = \left\{ I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

fino ad ottenere una base.

Soluzione: Si consideri la base canonica di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ contenente ordinatamente le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora si possono riscrivere (per comoditá di calcolo) i vettori di $\mathcal{I}$ usando le loro componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si ha: $I_1 = (1,2,0,0,0,0)$, $I_2 = (1,0,0,-1,0,1)$, $I_3 = (0,1,-1,0,0,0)$. Si applica il Teorema 11.5 all'insieme di generatori $\mathcal{G} = \{I_1, I_2, I_3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ partendo dagli elementi di $\mathcal{I}$. Si ottiene, al quarto passo, che $(I_1, I_2, I_3, A_1, A_2, A_4)$ é una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$. I dettagli di calcolo sono lasciati al Lettore.

Dai teoremi precedenti segue subito il:

Teorema 11.10 *1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{I} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un insieme libero di V, allora $\mathcal{I}$ è una base di V.*

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{I} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un sistema di generatori di V, allora $\mathcal{I}$ è una base di V.

11.1.1 Basi e Somma diretta

Sia V uno spazio vettoriale, su $\mathbb{R}$, di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una sua base, allora:

$$V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \oplus \mathcal{L}(\mathbf{v}_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(\mathbf{v}_n),$$

oppure, per esempio:

$$V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \oplus \mathcal{L}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n).$$

La seguente proprietà, in un certo senso, inverte l'affermazione precedente:

Teorema 11.11 *Sia $V = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_k$ allora è possibile formare una base di V mediante l'unione dei vettori appartenenti ad una base per ciascuno dei sottospazi $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \ldots, k$.*

Dimostrazione. Siano $\dim \mathcal{W}_1 = n_1, \dim \mathcal{W}_2 = n_2, \ldots, \dim \mathcal{W}_k = n_k$ le dimensioni dei sottospazi considerati e siano: $(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1n_1})$ una base di $\mathcal{W}_1$, $(\mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \ldots, \mathbf{a}_{2n_2})$ una base di $\mathcal{W}_2$ e cosí via fino a $(\mathbf{a}_{k1}, \mathbf{a}_{k2}, \ldots, \mathbf{a}_{kn_k})$ base di $\mathcal{W}_k$. L'insieme di vettori:

$$(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1n_1}, \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \ldots, \mathbf{a}_{2n_2}, \ldots, \mathbf{a}_{k1}, \mathbf{a}_{k2}, \ldots, \mathbf{a}_{kn_k})$$

è una base dello spazio V. Il risultato segue dalla definizione di somma diretta e di base.

Immediata conseguenza del teorema precedente è il seguente:

Teorema 11.12 *Se $V = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{W}_k$, allora:*

$$\dim V = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 + \ldots + \dim \mathcal{W}_k.$$

Esercizio 11.3 Vale il viceversa del teorema precedente?

Nel caso della somma di due sottospazi ricordiamo la **Formula di Grassmann** la cui dimostrazione è scritta nel Capitolo 12.

Teorema 11.13 *Se $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, allora:*

$$\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2).$$

Esercizio 11.4 In $\mathbb{R}^5$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}.$$

i) Si decomponga $\mathcal{W}$ nella somma diretta di due sottospazi $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$.

ii) Si scriva il vettore $(-5, 2, -1, 3, -2)$ di $\mathcal{W}$ come somma di un vettore di $\mathcal{W}_1$ e di un vettore di $\mathcal{W}_2$.

Soluzione: i) Per esempio si controlla che i sottospazi:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((-1,1,0,0,0),(-2,0,1,0,0)),\\ \mathcal{W}_2 &= \mathcal{L}((-1,0,0,1,0),(1,0,0,0,1)) \end{aligned}$$

verificano la condizione richiesta; infatti la loro intersezione si riduce al vettore nullo e la loro somma riproduce $\mathcal{W}$.
Quante sono le risposte possibili? Si provi ad elencarne almeno due diverse.

ii) Dal calcolo diretto si ha:

$$(-5,2,-1,3,-2) = (0,2,-1,0,0,) + (-5,0,0,3,-2).$$

Esercizio 11.5 In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino i sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_1 - x_4 = x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Provare che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^{2,2}$.

Soluzione: Per l'intersezione è sufficiente osservare che la matrice dei coefficienti del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

ha determinante non nullo. Rimane da provare che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^{2,2}$. Per quanto osservato, per ogni matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, con semplici calcoli, si ottiene:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-d & b-c \\ -b+c & -a+d \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e ciò prova la decomposizione (unica) di un vettore di $\mathbb{R}^{2,2}$ nella somma di due vettori di $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, rispettivamente.

Esercizio 11.6 In $\mathbb{R}^{3,3}$ si considerino i sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{3,3}),$$

$$\mathcal{W}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & x_5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \mid 2x_1 - x_3 = 0, x_1 + 3x_3 = 0 \right\}.$$

Provare che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathbb{R}^{3,3}$.

Soluzione: Si puó verificare direttamente che ogni vettore di $\mathbb{R}^{3,3}$ si decompone in modo unico come somma di tre vettori di $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ e $\mathcal{W}_3$, rispettivamente.

Osservazione 11.7 Come immediata conseguenza dei Teoremi 11.9 e 11.11 segue che, dato un sottospazio vettoriale $\mathcal{A}$ di V con $\dim \mathcal{A} = k$ e $\dim V = n$ un suo supplementare $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = V$ ha dimensione $n - k$. Una sua base si ottiene considerando i vettori che si aggiungono ad una base di $\mathcal{A}$ per ottenere una base di V. Si ottiene, quindi, che esistono infiniti spazi supplementari di $\mathcal{A}$, ovviamente se $\mathcal{A} \neq V$ e $\mathcal{A} \neq \{\mathbf{0}\}$.

Esercizio 11.7 Dato il sottospazio vettoriale $\mathcal{H}$ di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = x_3 = 0\}$$

si determinino due sottospazi diversi entrambi supplementari di $\mathcal{H}$.

Soluzione: Risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce $\mathcal{H}$ si ottiene che un generico vettore di $\mathcal{H}$ é del tipo: $(t_1, t_2, 0, -t_1 - t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ da cui segue che $\dim \mathcal{H} = 2$ e $(\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, -1))$ é una base di $\mathcal{H}$. Si verifica facilmente (usando il metodo degli scarti successivi descritto nella Dimostrazione del Teorema 11.5) che, ad esempio, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0))$ é una base di $\mathbb{R}^4$, quindi un sottospazio supplementare di $\mathcal{H}$ é dato da $\mathcal{K}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Con un procedimento analogo si verifica che, ad esempio, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1))$ é un'altra base di $\mathbb{R}^4$, quindi possiamo definire un altro sottospazio, diverso dal precedente, supplementare di $\mathcal{H}$ dato da $\mathcal{K}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.

Osservazione 11.8 L'introduzione del concetto di rango di una matrice permetterá di risolvere gli esercizi proposti in questo paragrafo in un altro modo, a volte piú rapido.

11.2 Rango di una matrice

In questo paragrafo introdurremo la definizione formale di rango, mentre quella data nel Capitolo 1 ne costituisce il metodo di calcolo.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ una matrice di m righe e n colonne. indichiamo nel modo seguente le righe:

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ &\mathbf{R}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ &\mathbf{R}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}). \end{aligned} \tag{11.4}$$

I vettori $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^n$ prendono il nome di **vettori riga** della matrice A e il sottospazio:

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n) \tag{11.5}$$

è lo **spazio vettoriale delle righe di** A. Per costruzione $\mathcal{R}(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, ed avendo m generatori la sua dimensione sarà al più pari al minore tra i numeri m ed n.

Ripetiamo lo stesso discorso per le colonne di A. Siano:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ &\mathbf{C}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ &\vdots \\ &\mathbf{C}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \end{aligned} \tag{11.6}$$

i **vettori colonna** di A. Lo spazio vettoriale:

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m) \tag{11.7}$$

é lo **spazio vettoriale delle colonne di** A. Per costruzione $\mathcal{C}(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$, ed avendo n generatori la sua dimensione sarà al più pari al minore tra i numeri m ed n.
Vale il seguente:

Teorema 11.14 *(***Teorema del Rango.***) In una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si ha:*

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A). \tag{11.8}$$

Nel Capitolo 12 si propone una dimostrazione di questo teorema, ma si dovrá aspettare il Capitolo 17 per un'altra dimostrazione, molto piú sintetica.
Il teorema appena enunciato giustifica la fondamentale:

Definizione 11.6 *Si definisce* **rango** *di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ la dimensione dello spazio vettoriale delle righe di A (o delle colonne) di A:*

$$rank(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A). \tag{11.9}$$

Osservazione 11.9 Come conseguenza immediata del precedente teorema si ha anche che $rank(A) = rank({}^tA)$, *per ogni* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

Le proprietá che seguono sono volte a dimostrare che la definizione di rango di una matrice, appena enunciata, coincide con la definizione di rango data nel Paragrafo 1.2. Si procede come segue:

1. Sia A' una matrice ridotta per righe, dimostreremo che il numero delle righe non nulle di A' coincide con la dimensione dello spazio delle righe di A'

2. Dimostreremo che il processo di riduzione di una matrice per righe descritto nel Paragrafo 1.2 non cambia la dimensione dello spazio delle righe di A, pur cambiando la matrice A.

3. A corretta conclusione, si devono aggiungere la definizione di matrice ridotta per colonne e il procedimento di riduzione per righe.

Teorema 11.15 *Nel caso di una matrice ridotta per righe $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ le due definizioni di rango coincidono.*

Dimostrazione: Sia A una matrice ridotta per righe del tipo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si tratta di dimostrare che il numero delle righe di A non nulle k coincide con $\dim \mathcal{R}(A)$. Il risultato é quasi ovvio ed é la conseguenza della particolare posizione delle componenti nulle nelle righe di A. Infatti, dall'equazione:

$$\lambda_1 \mathbf{R}_1 + \lambda_2 \mathbf{R}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{R}_k = \mathbf{0}$$

segue il sistema lineare omogeneo la cui prima equazione é $\lambda_1 a_{11} = 0$ ed essendo $a_{11} \neq 0$ allora $\lambda_1 = 0$. Sostituendo questo risultato nella seconda equazione si ottiene $\lambda_2 = 0$ e cosí via, da cui segue che le righe non nulle della matrice A ridotta per righe sono l.i . ∎

Teorema 11.16 *Le operazioni autorizzate per ridurre una matrice A per righe non cambiano la dimensione dello spazio vettoriale delle righe di A.*

Dimostrazione: Si ricordino le operazioni, descritte nel Paragrafo 1.2, autorizzate per ridurre per righe una matrice, segue in modo evidente che esse non cambiano lo spazio vettoriale $\mathcal{R}(A)$, quindi non cambiano la sua dimensione. ∎

Si puó ripetere tutto il procedimento di riduzione di una matrice sulle colonne, di conseguenza, dopo aver **ridotto per colonne** la matrice, il suo rango sará dato dal numero di colonne non nulle. Piú precisamente:

Definizione 11.7 *Una matrice A si dice* **ridotta per colonne** *se in ogni sua colonna non nulla esiste un elemento non nullo a destra del quale ci sono tutti zeri.*

Esempio 11.15 La seguente matrice é ridotta per colonne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Teorema 11.17 *Il rango di una matrice A (inteso come la dimensione dello spazio delle colonne di A) si calcola riducendo la matrice A per colonne, in altri termini eseguendo sulle colonne le operazioni seguenti:*

1. *scambiare tra di loro due colonne $C_i \leftrightarrows C_j$;*
2. *moltiplicare tutti gli elementi di una colonna per un numero reale non nullo: $C_i \leftarrow \lambda C_i$;*
3. *sostituire ad una colonna una c.l. di se stessa con una colonna parallela $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$;*
4. *una combinazione delle operazioni precedenti;*

e poi, contando il numero di colonne non nulle della matrice ridotta per colonne ottenuta.

La dimostrazione é un evidente esercizio.

Osservazione 11.10 Si osservi che riducendo per colonne la matrice completa di una sistema lineare non si ottiene un sistema lineare equivalente al sistema dato.

Esercizio 11.8 Calcolare il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

riducendola per colonne.

Teorema 11.18 *(***Teorema di Nullitá piú Rango.***) Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e incognite $X \in \mathbb{R}^{n,1}$. Si indichi con $\mathcal{S}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ delle soluzioni del sistema lineare dato e sia k $(k \leq n)$ il rango di A, allora:*

$$rank(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n. \tag{11.10}$$

Anche se la dimostrazione del teorema precedente é ovvia, la sua importanza sará fondamentale nel resto del corso. La denominazione **nullitá** deriva dalla traduzione del termine “nullspace ”che indica in inglese il sottospazio $\mathcal{N}(A)$.

Una delle applicazioni della definizione di rango di una matrice é la possibilitá di risolvere in modo piú agevole alcuni degli esercizi giá proposti. Sia, infatti, $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base di V e siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ i generatori di un sottospazio W di V. Per trovare una base di W si puó procedere scrivendo la matrice $A \in \mathbb{R}^{k,n}$ che ha come vettori riga i vettori $\mathbf{w}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Riducendo la matrice per righe, i vettori riga non nulli della matrice ridotta per righe che si ottiene costituiscono una base di $\mathcal{W}$ e la dimensione di $\mathcal{W}$ coincide con il rango della matrice A.

Attenzione al fatto che se si riduce la matrice A per colonne i vettori riga della matrice ridotta per colonne non determinano piú una base di $\mathcal{W}$.

Analogamente se $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sono due sottospazi di V di cui si conoscono i vettori della base, per determinare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ si puó procedere scrivendo la matrice B che ha come vettori riga i vettori precedenti. Riducendo la matrice B per righe si ha che il rango di B coincide con la dimensione di $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ e i vettori riga non nulli della matrice ridotta per righe che si ottiene costituiscono una base di $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

Esercizio 11.9 Determinare una base del sottospazio $\mathcal{H}$ di $\mathbb{R}^4$ cosí definito:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,4,-1,1),(0,0,1,1),(1,2,4,5),(1,-1,0,5)).$$

Soluzione: Si riduce per righe la matrice A ottenuta ponendo in riga i generatori di $\mathcal{H}$. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \\ R_5 \to R_5 - R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_2 \leftrightarrows R_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_4 \to 4R_3 - R_4 \\ R_5 \to R_3 - R_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\operatorname{rank}(A) = 3$, quindi $\dim \mathcal{H} = 3$ e una sua base é data dalle prime tre righe della matrice A, cioè dai vettori:

$$\mathbf{z}_1 = (1,2,0,1), \mathbf{z}_2 = (0,-3,0,4), \mathbf{z}_3 = (0,0,1,1).$$

Osservazione 11.11 Si consiglia di rifare gli esercizi precedentemente svolti usando il metodo proposto in questo capitolo (Esercizi 9.1, 9.2, 9.5 e 9.6)

Esercizio 11.10 Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{K} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\},$$

determinare la dimensione e una base di $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ e $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}$, con $\mathcal{H}$ definito nell'Esercizio 11.9.

Soluzione: Una base di $\mathcal{K}$ è data ad esempio da $\mathbf{w}_1 = (1,1,1,0), \mathbf{w}_2 = (0,0,0,1)$. Per trovare una base e la dimensione di $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ e si riduce per righe la matrice B ottenuta ponendo in riga i vettori $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$. Si ha:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ R_4 \to 3R_4 - R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede quindi che il rango di B è 4, cioè che $\mathcal{H}+\mathcal{K} = \mathbb{R}^4$. Dalla Formula di Grassmann si ha che $\dim(\mathcal{H}\cap\mathcal{K}) = 3+2-4 = 1$. Per trovare una base di $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}$ si puó procedere nel seguente modo: un vettore dell'intersezione é della forma:

$$\lambda_1\mathbf{z}_1 + \lambda_2\mathbf{z}_2 + \lambda_3\mathbf{z}_3 = \mu_1\mathbf{w}_1 + \mu_2\mathbf{w}_2.$$

Per trovare il vettore della base si deve risolvere il sistema lineare omogeneo nelle incognite $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\mu_1,\mu_2)$ associato alla precedente equazione. Si può allora procedere per risolvere il sistema lineare omogeneo alla riduzione per righe della corrispondente matrice dei coefficienti:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si trova come soluzione del sistema: $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \dfrac{1}{3}\mu_1, \lambda_3 = \mu_1, \mu_2 = 0$. Quindi $\left(\mathbf{w}_1 + \dfrac{10}{3}\mathbf{w}_2\right)$ é una base per $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}$.

11.3 Il cambiamento di base

Nello spazio vettoriale V (costruito su $\mathbb{R}$), di dimensione n, si considerino due basi:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n), \quad \mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n).$$

Si ponga:

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1 = p_{11}\mathbf{v}_1 + p_{21}\mathbf{v}_2 + \dots + p_{n1}\mathbf{v}_n, \\ \mathbf{v}'_2 = p_{12}\mathbf{v}_1 + p_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + p_{n2}\mathbf{v}_n, \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_n = p_{1n}\mathbf{v}_1 + p_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + p_{nn}\mathbf{v}_n. \end{cases} \tag{11.11}$$

La matrice:

$$P = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (p_{ij}), \ i, j = 1, \dots, n,$$

che è così determinata e che prende il nome di **matrice del cambiamento di base**, è ottenuta ponendo ordinatamente in colonna le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$‘ rispetto ai vettori della base $\mathcal{B}$.

La ragione della scelta delle colonne sarà giustificata nella trattazione delle applicazioni lineari (cfr. Capitolo 17). P è una matrice quadrata, ad elementi reali, di rango massimo. (Perchè?)

Le equazioni (11.11) si possono scrivere, in notazione matriciale, come:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}. \tag{11.12}$$

Considerato un qualsiasi vettore $\mathbf{x} \in V$, il problema del cambiamento di base consiste nel determinare le relazioni che intercorrono tra le componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alle due basi introdotte.

Supponiamo, quindi, che:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = x'_1\mathbf{v}'_1 + x'_2\mathbf{v}'_2 + \dots + x'_n\mathbf{v}'_n,$$

vale a dire, in notazione matriciale:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix}.$$

Sostituendo le (11.12) ed uguagliando si perviene alle relazioni:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

che saranno spesso indicate come:

$$X = PX',$$

dove X e X' sono, rispettivamente, le matrici colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base $\mathcal{B}'$. Tali relazioni prendono il nome di **equazioni del cambiamento di base** e risolvono il problema posto.

Esercizio 11.11 i) Verificare che $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$.

ii) Trovare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Soluzione: i) Sia $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base standard di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$. La matrice del cambiamento di base, ottenuta ponendo in colonna le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$, è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che: $\det P = -52$, quindi i tre vettori dati formano, effettivamente, una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$.

ii) Le componenti richieste sono le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -7 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

ossia: $x_1' = 4, x_2' = -2, x_3' = 1$.

11.4 Iperpiani Vettoriali

Definizione 11.8 *Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) di dimensione n. Ogni sottospazio vettoriale di dimensione $n-1$ prende il nome di* **iperpiano vettoriale***.*

Per definizione, quindi, un iperpiano vettoriale è generato da $n-1$ vettori di V linearmente indipendenti.

Esempio 11.16 In $\mathbb{R}^4$ si consideri l'iperpiano generato dai vettori $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,4)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1,2)$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,3,4)$. Si tratta del sottospazio:

$$\mathcal{W} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3,\ k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Vale il:

Teorema 11.19 *Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di V, e siano $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le componenti di un qualsiasi vettore $\mathbf{x}$ di V, rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora tutte e sole le equazioni lineari omogenee in $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ rappresentano un iperpiano vettoriale di V.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esempio 11.17 In $\mathbb{R}^4$, l'equazione:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

individua l'iperpiano generato, ad esempio, dai vettori $(-1,1,0,0), (-3,0,1,0), (-2,0,0,1)$.

Esercizio 11.12 Qual è l'equazione dell'iperpiano considerato nell'Esempio 11.16?

Soluzione: I vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartengono a $\mathcal{W}$ se e solo se sono linearmente dipendenti, ossia se la matrice quadrata, di ordine 4, le cui righe sono le componenti dei 4 vettori, ha determinante nullo. L'equazione richiesta è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

La motivazione dell'ultimo passaggio è lasciata al Lettore.

Capitolo 12

Per saperne di più sui sottospazi vettoriali

In tutto il capitolo, V indicherà uno spazio vettoriale reale finitamente generato.

12.0.1 Per saperne di più sugli spazi vettoriali

Esempio 12.1 Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali, ossia:

$$\mathbb{R}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \forall a_i \in \mathbb{R}\}. \tag{12.1}$$

Le usuali operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale conferiscono a $\mathbb{R}[x]$ la struttura di spazio vettoriale. È chiaro che $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]$, i numeri reali sono, infatti, i polinomi di grado 0. Il vettore nullo di $\mathbb{R}[x]$ è il numero 0, mentre l'opposto del polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ è il polinomio $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n - \ldots$. Sottospazi notevoli di $\mathbb{R}[x]$ sono gli insiemi dei polinomi di grado non superiore ad un numero fissato, in formule, indichiamo:

$$\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \forall a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{12.2}$$

il sottospazio dei polinomi di grado minore o uguale ad n. (La verifica che $\mathbb{R}_n[x]$ sia un sottospazio vettoriale è lasciata per esercizio).

Si osservi che, per esempio, l'insieme dei polinomi di grado 3 non è un sottospazio vettoriale (non contiene il vettore nullo e **non** coincide con $\mathbb{R}_3[x]$.

È facile verificare che:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}(1, x, x^2, \ldots, x^n) \tag{12.3}$$

inoltre $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ è un insieme libero, quindi $\mathbb{R}_n[x]$ ha dimensione $n + 1$.

Si osservi inoltre che $\mathbb{R}[x]$ è un esempio di spazio vettoriale **non** finitamente generato.

Esercizio 12.1 i) Verificare che il campo $\mathbb{R}$ dotato delle seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \\ \lambda \odot x &= \sqrt[3]{\lambda}x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{12.4}$$

è uno spazio vettoriale su se stesso.

ii) Verificare se tale proprietà è ancora valida nel caso delle operazioni:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \\ \lambda \ominus x &= \sqrt{\lambda}x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Soluzione: i) Si verifica facilmente che $(\mathbb{R},\oplus)$ è un gruppo abeliano, con 0 elemento neutro e $-x$ opposto di $x\in\mathbb{R}$. Anche la verifica delle quattro proprietà del prodotto per scalari è semplice.

ii) La definizione di prodotto per scalari: $\lambda\ominus x$ non verifica, per esempio la seguente proprietà:

$$(\lambda+\mu)\ominus x=\lambda\ominus x\oplus\mu\ominus x,$$

infatti:

$$(\lambda+\mu)\ominus x=\sqrt{\lambda+\mu}x$$

mentre

$$\lambda\ominus x\oplus\mu\ominus x=\sqrt{\lambda}x\oplus\sqrt{\mu}x=\sqrt[3]{(\sqrt{\lambda})^3+(\sqrt{\mu})^3}x.$$

Osservazione 12.1 Perchè lo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ descritto nell'Esempio 9.5 non è finitamente generato?

Sia $\mathcal{S}$ un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$, e indichiamo con $\mathcal{F}(\mathcal{S},\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale costruito in modo analogo all'Esempio 9.5. Tale spazio è finitamente generato, infatti una sua base è data da $\mathcal{X}=\{\chi_s, s\in\mathcal{S}\}$ insieme delle funzioni caratteristiche di $\mathcal{S}$, ossia:

$$\chi_s:\mathcal{S}\longrightarrow\mathbb{R}\mid\begin{cases}\chi_s(s)=1,\\ \chi_s(t)=0,\ \forall t\in\mathcal{S},\ t\neq s.\end{cases}$$

$\mathcal{X}$ genera $\mathcal{F}(\mathcal{S},\mathbb{R})$, infatti per ogni $f\in\mathcal{F}(\mathcal{S},\mathbb{R})$, $f=\Sigma_{s\in\mathcal{S}}f(s)\chi_s$. Si controlla facilmente che $\mathcal{X}$ è un insieme libero. È evidente che da questo tipo di ragionamento si perviene ad una base di $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formata da infiniti elementi.

Esercizio 12.2 Dimostrazione del Teorema 9.1: In V, spazio vettoriale reale, si ha:

1. il vettore nullo $\mathbf{0}$ è unico;
2. per ogni vettore $\mathbf{x}\in V$, l'opposto $-\mathbf{x}$ è unico;
3. se $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{z}$ allora $\mathbf{y}=\mathbf{z}$, per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$;
4. $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}\iff\lambda=0$ oppure $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, con $\lambda\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{x}\in V$;
5. $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x}\in V$.

Dimostrazione:

1. Per assurdo, siano $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ due vettori nulli, $\mathbf{0}\neq\mathbf{0}'$. Allora $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'$ essendo $\mathbf{0}'$ il vettore nullo, ma anche $\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'$ essendo $\mathbf{0}$ il vettore nullo, da cui la tesi.
2. Per assurdo, siano $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ due opposti di $\mathbf{x}$, con $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_2$, allora $(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1)+\mathbf{x}_2=\mathbf{0}+\mathbf{x}_2$, ma anche $(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1)+\mathbf{x}_2=\mathbf{x}+(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{x}+(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_1)=(\mathbf{x}+\mathbf{x}_2)+\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_1$, da cui l'assurdo.
3. Segue in modo evidente dalla proprietà precedente, infatti da $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{z}$ si ha $\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{z}-\mathbf{x}$ da cui la tesi.
4. Iniziamo con il dimostrare che $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$ e che $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Si ha $0\mathbf{x}=(0+0)\mathbf{x}=0\mathbf{x}+0\mathbf{x}$ applicando la proprietà precedente si ha $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Analogamente: $\lambda\mathbf{0}=\lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\lambda\mathbf{0}+\lambda\mathbf{0}$, da cui $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

   Viceversa dimostriamo ora che se $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$, allora, necessariamente $\lambda=0$ oppure (non esclusivo) $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Nel punto precedente è stato provato che $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$, supponiamo, quindi, $\lambda\neq 0$ e proviamo che da $\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0}$ segue necessariamente $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Se $\lambda\neq 0$ allora esiste λ^{-1}. Da $\mathbf{0}=\lambda^{-1}\mathbf{0}=\lambda^{-1}(\lambda\mathbf{x})=(\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{x}=1\mathbf{x}$ segue la tesi.
5. La tesi consiste nel provare che $\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ma $1\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}=(1-1)\mathbf{x}=0\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

12.0.2 Per saperne di più sui sottospazi vettoriali

Esercizio 12.3 Dimostrare la Formula di Grassmann 11.13. Siano $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sottospazi vettoriali di V, allora:

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2). \tag{12.6}$$

Dimostrazione: Siano: $\dim V = n$, $\dim \mathcal{W}_1 = l$, $\dim \mathcal{W}_2 = p$, con $l, p \leq n$. Poniamo $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = k$, dove $k \leq l, p$. Si lasciano per esercizio i vari casi particolari e si tratta solo il caso di $k < l$ e $k < p$.

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ una base di $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$. $\mathcal{B}$ è, quindi, un insieme libero sia in $\mathcal{W}_1$ sia in $\mathcal{W}_2$. Dal Teorema 11.9 si possono costruire $\mathcal{C} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l)$ base di $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{D} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_{k+1}, \dots, \mathbf{c}_p)$ base di $\mathcal{W}_2$.

La tesi consiste nel dimostrare che $\mathcal{E} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_l, \mathbf{c}_{k+1}, \dots, \mathbf{c}_p)$ è una base di $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

Per costruzione $\mathcal{E}$ è un sistema di generatori, proviamo che è libero. A tale scopo consideriamo la combinazione lineare a coefficienti reali:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k + \beta_{k+1} \mathbf{b}_{k+1} + \dots + \beta_l \mathbf{b}_l + \gamma_{k+1} \mathbf{c}_{k+1} + \dots + \gamma_p \mathbf{c}_p = \mathbf{0}. \tag{12.7}$$

Sia:

$$\mathbf{c} = -\gamma_{k+1} \mathbf{c}_{k+1} - \dots - \gamma_p \mathbf{c}_p, \tag{12.8}$$

per definizione $\mathbf{c} \in \mathcal{W}_2$, da (12.7) segue che $\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k + \beta_{k+1} \mathbf{b}_{k+1} + \dots + \beta_l \mathbf{b}_l$, quindi $\mathbf{c} \in \mathcal{W}_1$, pertanto $\mathbf{c} \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$. Allora esistono opportuni coefficienti reali λ_i tali che: $\mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$. Da (12.8) si ottiene:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k + \gamma_{k+1} \mathbf{c}_{k+1} + \dots + \gamma_p \mathbf{c}_p = \mathbf{0}, \tag{12.9}$$

ma i vettori che compaiono in (12.9) sono i vettori di $\mathcal{D}$, pertanto sono linearmente indipendenti, da cui segue, tra l'altro, che $\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_p = 0$, sostituendo in (12.7) e ricordando che la combinazione lineare rimasta è formata dai vettori della base $\mathcal{C}$ si ha la tesi.

12.0.3 Ancora sui generatori e sulle basi

Esercizio 12.4 Dimostrare il **Lemma di Steinitz 11.6.** Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $\mathcal{I} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ un insieme libero, allora $p \leq n$.

Dimostrazione: Siano $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ le componenti di $\mathbf{u}_1$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Poichè $\mathcal{I}$ è libero, $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$, pertanto almeno una componente tra i λ_1 non è nulla; supponiamo sia λ_1 (in caso contrario si riordinano i vettori di $\mathcal{B}$). Dalla relazione:

$$\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \tag{12.10}$$

ricaviamo:

$$\mathbf{v}_1 = \lambda_1^{-1} \mathbf{u}_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2 \mathbf{v}_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

In altri termini: $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Vogliamo dimostrare che l'insieme $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base di V.

Iniziamo con il provare che si tratta di un sistema di generatori; da (12.10) segue che, per ogni $\mathbf{x} \in V$, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \\ &= x_1(\lambda_1^{-1} \mathbf{u}_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2 \mathbf{v}_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n \mathbf{v}_n) + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \\ &= \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

da cui la tesi.

L'insieme $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è libero essendo un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{I}$ (Esempio 9.10). Il vettore $\mathbf{u}_1$ non appartiene a $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$, quindi l'insieme $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un insieme libero (la dimostrazione di questa affermazione si lascia per esercizio, si consiglia di procedere per assurdo).

Si osservi che, a questo punto, partendo dalla base $\mathcal{B}$ abbiamo ottenuto una nuova base $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ in cui si è sostituito al primo vettore il primo vettore di $\mathcal{I}$. Iteriamo questo procedimento, passando a considerare il vettore $\mathbf{u}_2$ ed esprimiamolo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_1$. Si ha:

$$\mathbf{u}_2 = \gamma_1 \mathbf{u}_1 + \gamma_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \gamma_n \mathbf{v}_n.$$

Di nuovo, essendo $\mathbf{u}_2$ non nullo, esiste almeno una sua componente tra le γ_i non nulla. Non può succedere che $\gamma_1 \neq 0$ e gli altri $\gamma_i = 0, i = 2, \dots, n$, perchè i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti, pertanto possiamo supporre $\gamma_2 \neq 0$. Ricaviamo $\mathbf{v}_2$ in funzione dei vettori rimanenti e dimostriamo che $\mathcal{B}_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base, in modo analogo al caso precedente e procediamo di nuovo con un terzo vettore. Questo tipo di ragionamento è autorizzato dal fatto che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{I}$ sono insiemi finiti. Il procedimento descritto si arresta per due motivi:

a. si sono esauriti tutti i vettori di $\mathcal{I}$, allora abbiamo inserito i vettori di $\mathcal{I}$ all'interno di $\mathcal{B}$, da cui segue la tesi;

b. si sono esauriti prima i vettori di $\mathcal{B}$ e rimangono ancora dei vettori in $\mathcal{I}$, segue che $\mathcal{I}$ contiene una base che é assurdo, essendo $\mathcal{I}$ libero . ▮

12.0.4 Equazioni vettoriali e il Teorema del Rango

Definizione 12.1 *Dati i vettori* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ *di uno spazio vettoriale reale* V, *la relazione:*

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b} \tag{12.11}$$

è **un' equazione vettoriale** *nell'incognita* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definizione 12.2 **Soluzione** *di un'equazione vettoriale è una m–upla* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ *che sostituita in (12.11) la verifica.*

Esempio 12.2 Nei capitoli precedenti abbiamo incontrato più volte equazioni vettoriali, per esempio la definizione di vettori l.i. fa uso di un'equazione vettoriale di cui si chiede che ammetta solo la soluzione nulla.

L'esempio precedente impone la seguente:

Definizione 12.3 *L'equazione vettoriale (12.11) si dice* **omogenea** *se* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ *con* $\mathbf{0}$ *vettore nullo di* V. *È chiaro che un'equazione vettoriale omogenea ammette la soluzione nulla:* $(0, 0, \dots, 0)$.

Il teorema che segue determina le condizioni affinchè un'equazione vettoriale ammetta soluzioni e propone anche il metodo per determinarle.

Teorema 12.1 *(***Teorema di Rouchè–Capelli.***) L'equazione vettoriale (12.11) ammette soluzioni se e solo se:*

$$\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}). \tag{12.12}$$

Dimostrazione: Innanzi tutto si osservi che $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$ ed, inoltre, se $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = k$ allora $k \leq \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) \leq k + 1$.

Supponiamo che l'equazione (12.11) ammetta soluzioni, dobbiamo dimostrare che:

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m).$$

Per ipotesi esiste una m–upla di numeri reali $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ tale che $x_1^0 \mathbf{a}_1 + x_2^0 \mathbf{a}_2 + \dots x_m^0 \mathbf{a}_m = \mathbf{b}$, da cui segue la tesi, (cfr. Teorema 11.2).

Viceversa, supponiamo che $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$. Conviene distinguere due casi:

(a) $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) = m$;

(b) $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) = k < m$.

Caso **(a)**: Se $\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = \dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) = m$, i vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ costituiscono una base sia di $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ sia di $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$, allora il vettore $\mathbf{b}$ si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ e, quindi, l'equazione (12.11) ammette una sola soluzione costituita dalle componenti di $\mathbf{b}$ rispetto alla base $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$.

Caso **(b)**: Dal Teorema 11.5 segue che esistono k vettori tra i $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, che formano una base di $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$. Supponiamo che siano i primi k (in caso contrario si riordinano i vettori in modo da ottenere questo risultato), quindi $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$, ma per ipotesi si ha anche che $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$. Segue che esistono k scalari $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$ tali che:

$$\mathbf{b} = x_1^0\mathbf{a}_1 + x_2^0\mathbf{a}_2 + \ldots + x_k^0\mathbf{a}_k.$$

Allora il Teorema é dimostrato perché la m–upla $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ é una soluzione dell'equazione vettoriale (12.11).

In questo caso, esistono infinite soluzioni che dipendono da $m - k$ parametri, infatti scelti ad arbitrio gli scalari $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_m$, il vettore $\mathbf{b} - \mu_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} - \ldots - \mu_m\mathbf{a}_m$ appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ pertanto:

$$\mathbf{b} = x_1^0\mathbf{a}_1 + x_2^0\mathbf{a}_2 + \ldots + x_k^0\mathbf{a}_k + \mu_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \ldots + \mu_m\mathbf{a}_m$$

da cui segue la tesi . ▌

Il Lettore verifichi per esercizio (usando la definizione di rango di una matrice) che il teorema di Rouché–Capelli appena dimostrato coincide con il Teorema di Rouché–Capelli 1.2 enunciato nel Paragrafo 1.2. ▌

Esercizio 12.5 Dimostrare il **Teorema del Rango 11.14:** In A matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$, la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di A coincide con la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A, ossia:

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A). \tag{12.13}$$

Dimostrazione: Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ è lo spazio delle righe di A, dove:

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ &\mathbf{R}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ &\mathbf{R}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}). \end{aligned}$$

$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$ è lo spazio delle colonne di A, dove:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ &\mathbf{C}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ &\vdots \\ &\mathbf{C}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}). \end{aligned}$$

Siano $k = \dim \mathcal{C}(A)$ e $h = \dim \mathcal{R}(A)$. La tesi si ottiene dimostrando che $k \leq h$, infatti, per la disuguaglianza opposta è sufficiente considerare ${}^tA$, per cui si ha $\mathcal{R}(A) = \mathcal{C}({}^tA)$ e $\mathcal{C}(A) = \mathcal{R}({}^tA)$. Applicando il fatto che $k \leq h$ a ${}^tA$ segue $h \leq k$.

Si consideri il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ avente A come matrice dei coefficienti e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ come matrice delle incognite. Dalla sua scrittura esplicita:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{12.14}$$

si deduce che esso è equivalente all'equazione vettoriale:

$$x_1\mathbf{C}_1 + x_2\mathbf{C}_2 + \ldots + x_n\mathbf{C}_n = \mathbf{0},$$

le cui soluzioni dipendono da $k = \dim \mathcal{C}(A)$, (cfr. Teorema 12.1). Essendo $h = \dim \mathcal{R}(A)$, supponiamo che le prime h righe di A siano l.i., questa non è un'ipotesi restrittiva perchè in caso contrario possiamo effettuare uno scambio di righe. Supponiamo, quindi, che l'insieme $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_h)$ sia libero. Per la teoria sui sistemi lineari (cfr. Capitolo 1) il sistema (12.14) è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hn}x_n = 0 \end{cases} \tag{12.15}$$

che è, a sua volta, equivalente all'equazione vettoriale:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

dove:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{h1}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{h2}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{hn}). \end{aligned}$$

Dal fatto che (12.14) e (12.15) sono equivalenti segue:

$$\dim \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \dim \mathcal{C}(A) = k$$

ma $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \subseteq \mathbb{R}^h$, da cui la tesi . ∎

Capitolo 13

Sottospazi vettoriali – Esercizi

13.1 Esercizi

In tutti gli esercizi di questo capitolo si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

- $\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale delle n-uple di numeri reali, di dimensione n, riferito alla base canonica ($\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$);

- $\mathbb{R}^{m,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici di tipo (m, n), ad elementi reali, riferito alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

- $\mathbb{R}^{n,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n, ad elementi reali, riferito alla base canonica standard (il caso particolare della precedente);

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine n ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots\dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

- $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine n ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

- $\mathrm{tr}(A)$ indica la traccia della matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, vale a dire la somma degli elementi della diagonale principale.

[1] In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1,1,2)$, $\mathbf{u}_2 = (2,-1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (3,0,h)$; dire per quali valori di h i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti.

[2] In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1,-1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (3,0,1,1)$, $\mathbf{u}_4 = (0,1,-1,0)$; trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$, generato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$.
Verificato che i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ sono linearmente indipendenti, determinare per quali valori di t il vettore $\mathbf{v} = (1,-1,2t-8,t+1) \in \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$.
Per i valori di t trovati, determinare le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto ai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$.

[3] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1,3,2)$, $\mathbf{v} = (-2,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$, verificare che $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ha dimensione 2. Trovare per quali valori di t, il vettore $\mathbf{w} = (t,0,-1)$ appartiene allo spazio $\mathcal{V}$ e, per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

[4] Siano $\mathcal{W}_1$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori: $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,-1,1)$, $\mathcal{W}_2$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori: $\mathbf{v}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-1,2)$. Trovare $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$, $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$ ed una sua base.

[5] Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi: $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, dove:
$\mathbf{a} = (2,0,1,0), \mathbf{b} = (-1,1,0,1), \mathbf{c} = (0,3,-1,-1)$; $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$, dove $\mathbf{e} = (-1,1,5,4)$,
$\mathbf{f} = (0,3,-2,1), \mathbf{g} = (2,7,-16,-5)$.
i) Verificato che l'insieme $\mathcal{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è una base di $\mathcal{W}_1$, stabilire per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (5,-h,1,h)$ appartiene a $\mathcal{W}_1$ e, per tale valore, decomporlo rispetto alla base $\mathcal{B}$.
ii) Trovare un sottospazio $\mathcal{W}_3$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$.

[6] In $\mathbb{R}^4$, scrivere le equazioni di due iperpiani vettoriali, diversi, ma entrambi supplementari della retta vettoriale $\mathcal{H} = \mathcal{L}((2,0,4,3))$.

[7] Sono dati, in $\mathbb{R}^4$, i sottospazi vettoriali:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 2t = 0\}, \\ &\mathcal{K} = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,4,-1,1),(0,0,1,1),(1,2,4,5),(1,-1,0,5)). \end{aligned}$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di $\mathcal{H}$ sia di $\mathcal{K}$.
ii) Determinare la dimensione e una base sia di $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ sia di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.
iii) Il vettore $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ appartiene a $\mathcal{H} + \mathcal{K}$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di $\mathcal{H}$ e di un vettore di $\mathcal{K}$, in tutti i modi possibili (a meno di un cambiamento di variabile libera).

[8] In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino i sottoinsiemi:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 = x_3 \right\}$$

delle matrici simmetriche e:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_4 = 0 \right\}$$

delle matrici a traccia nulla. Si dimostri che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$; si determinino le loro dimensioni ed una base per ciascuno di essi.

[9] Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid 2x - y - z = x + 3y - 2t = 0 \right\},$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x - y + 2 = t = 0 \right\}$$

sono sottospazi vettoriali. In caso affermativo determinarne una base e la dimensione.

[10] Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\},$$
$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0)).$$

i) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{H}$.
ii) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$. Si tratta di una somma diretta?

[11] i) Verificare che le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.
ii) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_4 = x_2 + 2x_3 = 0 \right\},$$

determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$. Determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ e di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

[12] Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2z = 2y = 0\},$$
$$\mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1), (1, 2, 3, -1), (1, 2, 7, 1)).$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di $\mathcal{H}$ sia di $\mathcal{K}$.
ii) Determinare la dimensione e una base di $\mathcal{H} + \mathcal{K}$.

[13] In $\mathbb{R}^5$ i sottospazi:

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + x_2 = x_3 = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{L}((1, 2, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0, -1), (2, 3, 1, 3, 1))$$

sono supplementari?

[14] In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori:

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1, 0), \quad \mathbf{b} = (0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{c} = (1, 1, 0, 0).$$

i) Verificare che $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono linearmente indipendenti.
ii) Determinare un vettore $\mathbf{d}$ in modo che $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ siano linearmente indipendenti.
iii) Dire se il sottospazio $\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y = z + t = 0\}$ è contenuto in $\mathcal{K} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

[15] In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = x + hy + (2 - h)z = -x - h^2 y + (3h - 4)z = 0\}.$$

i) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione e una base di $\mathcal{W}$.
ii) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare un sottospazio supplementare di $\mathcal{W}$ in $\mathbb{R}^3$.

[16] In $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ completare l'insieme libero:

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \right\}$$

fino ad ottenere una base.

[17] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},$$

i) provare che i sottoinsiemi:

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = XA\}, \quad \mathcal{G} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = -XA\}$$

sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
ii) Determinare una base per i sottospazi vettoriali $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.
iii) Data la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

stabilire per quale valore di h la matrice C appartiene al sottospazio vettoriale $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.
Assegnato ad h tale valore, trovare due matrici $C_1 \in \mathcal{F}$ e $C_2 \in \mathcal{G}$ in modo tale che $C = C_1 + C_2$.

[18] In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottoinsieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 + x_4 = x_3 - x_4 = 0\}.$$

i) Verificare che $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base e la dimensione.
Si considerino, inoltre, i sottospazi:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad \text{dove} \quad \mathbf{a} = (1, 0, 2, 0),\ \mathbf{b} = (0, 1, -1, 1),\ \mathbf{c} = (3, -2, 8, -2), \\ &\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \text{dove} \quad \mathbf{e} = (0, 1, 2, 1),\ \mathbf{f} = (2, 1, 3, 1),\ \mathbf{g} = (1, -2, 4, -2). \end{aligned}$$

ii) Si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{W}_2$ e di $\mathcal{W}_3$.
iii) Si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)$.

[19] Si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix},\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{3,3}$? In caso affermativo se ne determini una base e la dimensione.

[20] I sottospazi:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbf{a} = (1, 2, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 3, 0), \mathbf{c} = (2, 1, 0, 0), \mathbf{d} = (5, 4, 0, 0)),$$
$$\mathcal{K} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y - z = x - z = 0\}$$

sono supplementari in $\mathbb{R}^4$?

[21] In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\},$$
$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\};$$

provare che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$.

[22] In $\mathbb{R}^5$, determinare una base e la dimensione dell'intersezione e della somma dei due sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0\},$$
$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0\}.$$

[23] In $\mathbb{R}^5$, determinare una base e la dimensione dell'intersezione e della somma dei due sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0\},$$
$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 13x_1 - 26x_2 + 6x_3 - 9x_4 - 9x_5 = 0\}.$$

[24] In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}.$$

i) Si verifichi che $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Sia $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$, dove:

$$\mathbf{a} = (0, 3, 1, -2, 0),\ \mathbf{b} = (0, 0, 2, 1, 1),\ \mathbf{c} = (0, 6, -10, -10, -6),\ \mathbf{d} = (0, 3, 7, 1, 3),$$

se ne determini una base e la dimensione.
iii) Si provi che $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^5$.
iv) Si determini un sottospazio $\mathcal{W}_3$ di $\mathbb{R}^5$ tale che $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_3) = 1$ e $\dim \mathcal{W}_3 = 3$.

[25] In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che l'insieme $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ è una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ e si esprima la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.

[26] i) Date le seguenti matrici dello spazio vettoriale $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si completi l'insieme $\{A, B\}$ in modo da ottenere una base $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{3,3})$.
ii) Si determinino le componenti della matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

[27] Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$.
i) Provare che $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \{\mathbf{o}\}$.
ii) Determinare tutte le possibili dimensioni di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ e costruire un esempio in ciascuno dei casi.

[28] i) Verificare che $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$.
ii) Trovare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

[29] i) Si verifichi che:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2x_2 + x_4 = x_5 - x_6 = 0 \right\},$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$, se ne calcoli una base e la dimensione.
ii) Si determini una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$:

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -12 \\ -1 & 2 & 12 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

iii) E' vero che $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$?
iv) Si determini una base e la dimensione di $\mathcal{D} \cap (\mathcal{B} + \mathcal{C})$.
v) Si determini un sottospazio vettoriale $\mathcal{E}$ supplementare a $\mathcal{D}$.
vi) Si decomponga la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

nella somma di una matrice di $\mathcal{E}$ e di una matrice di $\mathcal{D}$.
vii) A è invertibile? Se sì, si determini A^{-1}.

[30] Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
i) determinare una base per il sottospazio $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ generato da A, ${}^tA$, $A + {}^tA$.
ii) Dimostrare che il sottoinsieme:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinarne una base.
iii) Determinare una base per i sottospazi $\mathcal{W} + \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \cap \mathcal{U}$.

[31] i) In $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ si consideri l'insieme:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_4 - x_6 = 2x_6 - x_2 = x_3 + 3x_5 = 0 \right\}$$

e si verifichi che $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale, se ne calcoli una base e la dimensione.
ii) Si determini un sottospazio vettoriale $\mathcal{B}$ supplementare a $\mathcal{A}$.
iii) Si decomponga la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

nella somma di una matrice di $\mathcal{A}$ e di una matrice di $\mathcal{B}$.
iv) A è invertibile? Se sì, si determini A^{-1}.
v) Si determini una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$:

$$\mathcal{C} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

vi) È vero che $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$?
vii) Si determini una base e la dimensione di $\mathcal{D} \cap (\mathcal{A} + \mathcal{C})$.

[32] Dato $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$,
i) si determini un altro sottospazio $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathbb{R}^{2,2}$.
ii) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, si scomponga A nella somma di una matrice $A_1 \in \mathcal{U}$ e di una matrice $A_2 \in \mathcal{V}$.

[33] In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}((1,3,0,-1),(2,5,1,2),(1,2,1,0)).$$

i) Si verifichi che $\mathcal{W}$ è un iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e se ne determini la sua equazione.
ii) Si determinino due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, diversi, entrambi supplementari di $\mathcal{W}$.

[34] In $\mathbb{R}^5$ si considerino i sottospazi:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{L}((1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)), \\ \mathcal{V} &= \mathcal{L}((1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)), \end{aligned}$$

determinare una base $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ e una base di $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

[35] Si provi che i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{L}((1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7)) \\ \mathcal{V} &= \mathcal{L}((1,2,-4,11),(2,4,-5,14)) \end{aligned}$$

sono uguali.

[36] i) Determinare l'insieme $\mathcal{C}$ di tutte le matrici di $\mathbb{R}^{3,3}$ che commutano (rispetto al prodotto) con la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Verificare che $\mathcal{C}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,3}$, determinarne una base e la sua dimensione.
iii) Determinare due sottospazi diversi, entrambi supplementari di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}^{3,3}$.

[37] Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1,-1,0,1,1),(1,-2,-2,1,2),(0,1,2,0,-1),(-1,3,4,-1,-3)); \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_4 + 2x_5 = x_2 + x_3 = 0\}, \end{aligned}$$

i) provare che $\mathbb{R}^5 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.
ii) Decomporre il vettore $\mathbf{a} = (0,2,0,0,0)$ nella somma di un vettore $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{W}_1$ e di un vettore $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{W}_2$.

[38] Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1,-1,0,2),(0,2,1,3),(2,0,1,7),(3,-5-1,3)), \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - 2x_3 = 3x_3 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

i) Trovare una base per ciascuno dei sottospazi $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
ii) Verificare che il vettore $\mathbf{a} = (0,-2,-1,3)$ appartiene a $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ determinando esplicitamente due vettori $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{W}_1$ e $\mathbf{a}_2 \in \mathcal{W}_2$ tali che $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$.

[39] Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} / AX = XA, \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

i) Determinare una base per i sottospazi $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ e $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.
ii) Trovare un sottospazio vettoriale $\mathcal{W}_3$ che sia supplementare a $\mathcal{W}_1$.

[40] Si determinino almeno due sottospazi vettoriali diversi ma entrambi supplementari di:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_3 = x_2 + 5x_3 = 0\}.$$

[41] In $\mathcal{S}(R^{3,3})$ completare l'insieme libero:

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

fino ad ottenere una base.

[42] Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((1,0,-2,0,1),(0,1,0,-1,0),(0,1,-1,-1,3),(-1,0,1,0,2)), \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 + 3x_3 - x_5 = x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0\}, \end{aligned}$$

i) determinare una base per ciascuno dei sottospazi vettoriali $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$;
ii) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 2, h, -2, 1)$ appartiene a $\mathcal{W}_1$.

[43] In $\mathbb{R}^5$ sono dati i seguenti sottoinsiemi:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((2,1,1,0,2),(-1,1,0,0,2),(0,2,0,1,1)), \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_5 = x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

i) Provare che $\mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.
ii) Determinare la dimensione e una base per $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ rispettivamente.
iii) Trovare $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ e $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

[44] Completare il seguente insieme:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

in modo da ottenere una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$.

[45] In $\mathbb{R}^4$ sia dato il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y - z = x + 3t = 0\},$$

determinare la dimensione e una base di un sottospazio vettoriale $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \mathbb{R}^4$.

[46] Dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \mathcal{L}((0,1,0,-1),(1,-2,2,1),(1,0,2,-1)),\\ \mathcal{Z} &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-x_2-x_3=2x_2+x_3=0\},\end{aligned}$$

i) trovare una base per $\mathcal{W}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$ e $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$;
ii) stabilire per quale valore di $h\in\mathbb{R}$ il vettore $(1,h,h+1,-h)$ appartiene a $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$.
iii) per il valore di h ricavato nel punto precedente, decomporre il vettore $\mathbf{u}$ così ottenuto nella somma di un vettore di $\mathcal{W}$ e di un vettore di $\mathcal{Z}$.

[47] In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottoinsieme:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x_1+x_2+x_4=x_1-x_4=0\}.$$

i) Verificare che $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base e la dimensione.
Si considerino, inoltre, i sottospazi:

$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2-x_3+2x_4=x_1=0\},$$

e $\mathcal{W}_3=\mathcal{L}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$, dove:

$$\mathbf{a}=(1,-1,2,3),\quad \mathbf{b}=(-1,-2,0,1),\quad \mathbf{c}=(1,-7,6,11).$$

ii) Trovare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_2$ e di $\mathcal{W}_3$.
iii) Individuare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_2+\mathcal{W}_3$ e di $\mathcal{W}_1\cap(\mathcal{W}_2+\mathcal{W}_3)$.

[48] Si determinino le equazioni di due sottospazi vettoriali diversi ma entrambi supplementari di:

$$\mathcal{W} = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+3x_3=4x_2+x_3=0\}.$$

[49] Nello spazio $\mathbf{R}^4$ sono dati i seguenti sottospazi:

$$\mathcal{H}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4 \mid x_3=0,\ x_4=-x_1-x_2\right\},$$

$$\mathcal{K}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4 \mid x_4=0,\ x_3=x_1+x_2\right\}.$$

i) Trovare una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{H}$ e una base $\mathcal{C}$ di $\mathcal{K}$ rispettivamente.
ii) Determinare una base e la dimensione per i sottospazi $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ e $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}$.
iii) Verificare che il vettore $(2,-1,0,-1)$ appartiene ad $\mathcal{H}$ ed esprimerlo come combinazione lineare della base $\mathcal{B}$ scelta.

[50] Dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1 &= \mathcal{L}((0,1,-1,0),(1,-1,-1,1),(2,-1,-3,2)),\\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2=x_3+x_4=0\},\\ \mathcal{W}_3 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3=x_1+x_4=0\},\end{aligned}$$

i) trovare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_2,\mathcal{W}_3,\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2,\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2$;

ii) dire se la somma $\mathcal{W}_2+\mathcal{W}_3$ è diretta.

[51] In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino i sottospazi vettoriali:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_1 + x_3 = 0 \right\}$$

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_1 - x_3 = x_2 = 0 \right\}.$$

Determinare:
i) una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1$ e di $\mathcal{W}_2$;
ii) una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$;
iii) una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

[52] In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino i due sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ {}^tA,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A + 2B \right),$$

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + x_2 = 0 \right\},$$

Determinare una base e la dimensione di:

i) $\mathcal{W}_1$;
ii) $\mathcal{W}_2$;
iii) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$;
iv) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

[53] Dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ & 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 = 0\},$$

i) trovare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$;

ii) dire se la somma $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ è diretta.

[54] Dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((0, 1, -1, 0, 1), (1, -1, -1, 1, -1), (2, -1, -3, 2, 0)), \\ &\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 = 0\}, \end{aligned}$$

i) trovare una base e la dimensione di $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$;

ii) dire se la somma dei sottospazi $\mathcal{L}((1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0))$ e $\mathcal{L}((0, 0, 0, 0, 1))$ è diretta.

13.2 Soluzioni

```
Base[L_] :=
 If[Not[MatrixQ[L]],
Print[
     L′argomento non è una lista di vettori di uguale dimensione],
base = {};
{l, dim} = Dimensions[L];
zeros = Table[0, {dim}];
Print[Vett.Base];
Do[ {nuovabase = Append[base, L[[i]]],
       If[Last[RowReduce[nuovabase]] ≠ zeros,
       base = nuovabase],
 Print[i,  , base] }, {i, l}];
Print[Risultato]; base]
```

Questo programma, scritto dal prof. Stefano Berardi, permette, dato un insieme di vettori dello stesso spazio vettoriale, di estrarne una base, usando il metodo degli scarti successivi.

[1]

```
m = {{1, 1, 2}, {2, -1, 3}, {3, 0, h}};

Solve[Det[m] == 0, h]
{{h → 5}}
```

$h \neq 5.$

[2]

```
u1 = {1, -1, 0, 1}; u2 = {2, 1, 1, 0}; u3 = {3, 0, 1, 1}; u4 = {0, 1, -1, 0};

L = {u1, u2, u3, u4};

B = Base[L]
Vett.Base
1  {{1, -1, 0, 1}}
2  {{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}}
3  {{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}}
4  {{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}, {0, 1, -1, 0}}
Risultato
{{1, -1, 0, 1}, {2, 1, 1, 0}, {0, 1, -1, 0}}

Solve[Det[A = {u1, u2, u4, {1, -1, 2t - 8, t + 1}}] == 0]
{{t → 2}}

v = A[[4]] /. t → 2
{1, -1, -4, 3}

LinearSolve[Transpose[{u1, u2, u4}], v]
{3, -1, 3}
```

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4), \quad t = 2, \quad (3, -1, 3).$

[3]

```
u = {1, 3, 2}; v = {-2, 1, 1}; w = {t, 0, -1};

RowReduce[{u, v}]
{{1, 0, -1/7}, {0, 1, 5/7}}

Solve[w == a u + b v, {t, a, b}]
{{t -> 7, a -> 1, b -> -3}}
```

$t = 7, \quad (1, -3)$.

[4]

```
u1 = {1, 1, -1}; u2 = {2, -1, 1}; v1 = {1, 2, -1}; v2 = {-1, -1, 2};

Reduce[x u1 + y u2 == z v1 + w v2, {x, y, z, w}]
x == -8 w/3 && y == w/3 && z == -w

-w v1 + w v2
{-2 w, -3 w, 3 w}
```

$\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2, 3, -3))$.

[5]

```
a = {2, 0, 1, 0}; b = {-1, 1, 0, 1}; c = {0, 3, -1, -1}; e = {1, 1, 5, 4};
f = {0, 3, -2, 1}; g = {2, 7, -16, -5}; v = {5, -h, 1, h};

L = {a, b, c};

B = Base[L]
Vett.Base
1  {{2, 0, 1, 0}}
2  {{2, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1}}
3  {{2, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1}, {0, 3, -1, -1}}
Risultato
{{2, 0, 1, 0}, {-1, 1, 0, 1}, {0, 3, -1, -1}}

Solve[Det[{a, b, c, v}] == 0]
{{h -> -2}}

h = -2

Solve[v == x a + y b + z c, {x, y, z}]
-2
{{x -> 2, y -> -1, z -> 1}}
```

i) $h = -2$, $(2, -1, 1)$. ii) Per esempio: $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((0, 1, 5, 0), (0, 0, 2, 0))$.

[6] Per esempio: $x + 2y - z + t = 0$, $y + z - t = 0$.

[7]

```
Solve[{x + 2y == 0, 2t == 0}, {x, y, z, t}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -2 y, t → 0}}

L =
  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}, {0, 0, 1, 1}, {1, 2, 4, 5}, {1, -1, 0, 5}};

B = Base[L]

Vett.Base
1  {{1, 2, 0, 1}}
2  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}}
3  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}}
4  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}}
5  {{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}, {1, -1, 0, 5}}

Risultato
{{1, 2, 0, 1}, {2, 4, -1, 1}, {1, -1, 0, 5}}

A = {L[[1]], L[[2]], L[[5]], {-2, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}};

RowReduce[A]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}}

B = x A[[1]] + y A[[2]] + z A[[3]]; F = t A[[4]] + w A[[5]];

Solve[B == F, {x, y, z, t, w}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 51 w/26, y → -w, z → -5 w/26, t → 3 w/26}}

F/.%
{{-3 w/13, 3 w/26, w, 0}}

Solve[{1, 2, 3, 4} == B + F, {x, y, z, t}][[1]]
{x → 1/26 (182 - 51 w), y → -3 + w, z → 5 w/26, t → 3 w/26}

Simplify[B/.%]
{1 + 3 w/13, 2 - 3 w/26, 3 - w, 4}

Simplify[F/.%%]
{-3 w/13, 3 w/26, w, 0}
```

i) $\dim\mathcal{H} = 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}((-2,1,0,0),(0,0,2,0))$, $\dim\mathcal{K} = 3$,

$\mathcal{K} = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,4,-1,1),(1,-1,0,5))$.

ii) $\mathcal{H}+\mathcal{K} = \mathbb{R}^4$, $\dim(\mathcal{H}\cap\mathcal{K}) = 1$, $\mathcal{H}\cap\mathcal{K} = \mathcal{L}((-6,3,26,0))$.

iii) $(1,2,3,4) = \left(1+\dfrac{3}{13}k, 2-\dfrac{3}{26}k, 3-k, 4\right) + \left(-\dfrac{3}{13}k, \dfrac{3}{26}k, k, 0\right)$, $k\in\mathbb{R}$.

[8] $\dim\mathcal{S} = 3$, $\mathcal{S} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$;

$\dim\mathcal{T} = 3$, $\mathcal{T} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$.

[9] $\mathcal{K}$ non è un sottospazio vettoriale. $\dim\mathcal{H} = 2$;

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right).$$

[10]

```
A := {{1, 2, 0, 3}, {-1, 1, 3, 0}, {0, 0, 1, 1}, {1, 1, 0, 0}}

Det[A]
-9
```

i) $\dim\mathcal{H} = 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1, 2, 0, 3), (-1, 1, 3, 0))$.

ii) $\dim(\mathcal{H} + \mathcal{K}) = 4$, $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$.

[11]

```
m = {{1, 2, -1, 0}, {1, 0, 2, -1}, {0, 2, -2, 1}, {4, 1, -2, 3}};

Det[m]
-13

LinearSolve[Transpose[m], {1, 0, 0, 1}]
{-10/13, 7/13, 8/13, 4/13}

Solve[{x1 + 2x2 == 0, x1 + x4 == 0, x2 + 2x3 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::'' svars'' : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 -> x4/2, x3 -> -x4/4}}
```

i) $A = -\frac{10}{13}A_1 + \frac{7}{13}A_2 + \frac{8}{13}A_3 + \frac{4}{13}A_4$.

ii) $\dim\mathcal{A} = 3$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim\mathcal{B} = 2$, $\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = 4$, $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

$\dim(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 1$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\right)$.

[12] i) $\dim\mathcal{H} = 2$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}((2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$;

$\dim\mathcal{K} = 3$, $\mathcal{K} = \mathcal{L}((0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1), (1, 2, 7, 1))$.

ii) $\dim(\mathcal{H} + \mathcal{K}) = 4$, $\mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathcal{L}((2, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 2, 1, -1), (1, -2, 1, 1))$.

[13] Sì.

[14] ii) $\mathbf{d} = (0, 0, 0, 1)$ per esempio. iii) $\mathcal{H} \not\subseteq \mathcal{K}$.

[15]

```
Reduce[{x + y + z == 0, x + h y + (2 - h) z == 0,
    - x - h^2 y + (3h - 4) z == 0}, {x, y, z}]
h == 1&&x == -y - z||h == 2&&x == -2 z&&y == z||
  x == 0&&y == 0&&z == 0&& - 2 + h ≠ 0&& - 1 + h ≠ 0
```

Se $h \notin \{1, 2\}$: $\mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$;
se $h = 1$: $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$;
se $h = 2$, $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-2, 1, 1))$.
ii) Se $h \notin \{1, 2\}$: $\mathbb{R}^3$; se $h = 1$: $\mathcal{L}((1, 0, 0))$ per esempio; se $h = 2$ $\mathcal{L}((0, 1, 2), (0, 0, 1))$ per esempio.

[16] $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

[17]

```
A = {{6, -9}, {4, -6}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};

Solve[A.X == X.A, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> 3 x3 + x4, x2 -> -(9 x3)/4}}

Solve[A.X == -X.A, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 -> (9 x3)/4 + 3 x4}}

Solve[{A.X == X.A, A.X == -X.A}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 -> (3 x4)/2, x3 -> -(2 x4)/3}}

A1 = {12, -9, 4, 0}; A2 = {1, 0, 0, 1}; A3 = {0, 9, 4, 0};
A4 = {-1, 3, 0, 1}; c = {0, h - 2, 0, h - 3};

d = Solve[c == x A1 + y A2 + z A3 + w A4, {x, y, z, w, h}][[1]]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{x -> -1/6 + w/6, y -> 2 - w, z -> 1/6 - w/6, h -> 5}

Simplify[(x/.d[[1]]) A1 + (y/.d[[2]]) A2]
{w, -3/2 (-1 + w), 2/3 (-1 + w), 2 - w}

Simplify[(z/.d[[3]]) A3 + (w/.d[[4]]) A4]
{ - w, (3 (1 + w))/2, -2/3 (-1 + w), w}
```

i) $\mathcal{F} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

ii) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \right)$,

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

iii) $h = 5$, $C_1 = \begin{pmatrix} w & -\frac{3}{2}(-1+w) \\ \frac{2}{3}(-1+w) & 2-w \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -w & \frac{3}{2}(1+w) \\ -\frac{2}{3}(-1+w) & w \end{pmatrix}$, $\quad w \in \mathbb{R}$.

[18]

```
Solve[{x1 + 2x3 + x4 == 0, x3 - x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -3 x4, x3 → x4}}

a = {1, 0, 2, 0}; b = {0, 1, -1, 1}; c = {3, -2, 8, -2};

L = {a, b, c}

B = Base[L]
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {3, -2, 8, -2}}
Vett.Base
1 {{1, 0, 2, 0}}
2 {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}
3 {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}
Risultato
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}

e = {0, 1, 2, 1}; f = {2, 1, 3, 1}; g = {1, -2, 4, -2};

L1 = {e, f, g};

B1 = Base[L1]
Vett.Base
1 {{0, 1, 2, 1}}
2 {{0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}}
3 {{0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}, {1, -2, 4, -2}}
Risultato
{{0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}, {1, -2, 4, -2}}

L2 = {a, b, e, f, g}

B2 = Base[L2]
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}, {2, 1, 3, 1}, {1, -2, 4, -2}}
Vett.Base
1 {{1, 0, 2, 0}}
2 {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}}
3 {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}
4 {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}
5 {{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}
Risultato
{{1, 0, 2, 0}, {0, 1, -1, 1}, {0, 1, 2, 1}}

A = x {0, 1, 0, 0} + y {-3, 0, 1, 1} ; B = z e + t f + w g;

Solve[A == B, {x, y, z, t, w}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 15 w, y → 15 w, z → 40 w, t → -23 w}}

A/.%
{{-45 w, 15 w, 15 w, 15 w}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((0,1,0,0),(-3,0,1,1)),\ \dim \mathcal{W}_1 = 2.$

ii) $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,0,2,0),(0,1,-1,1)),\ \dim \mathcal{W}_2 = 2;$

$\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((0,1,2,1),(2,1,3,1),(1,-2,4,-2)),\ \dim\mathcal{W}_3 = 3.$

iii) $\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_3,\ \mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3) = \mathcal{L}((-3,1,1,1)),\ \dim(\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3)) = 1;$

[19] $\mathcal{H}$ non è un sottospazio vettoriale;

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$\dim\mathcal{K} = 6.$

[20] No.

[21] $\mathcal{W}_1 = \{(-2t_3 - 3t_2 - t_1, t_3, t_2, t_1),\ t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{W}_2 = \{(0,0,0,\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ da cui segue la tesi.

[22] $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 2,\ \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,2,0,0,0),(0,8,-8,3,1)),$

$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 5.$

[23] $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 2, \quad \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0,0,3,2,0),(0,0,3,0,2)),$

$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 5.$

[24] i) $\dim\mathcal{W}_1 = 3, \quad \mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-2,0,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1));$

ii) $\dim\mathcal{W}_2 = 2, \quad \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$

iv) $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((1,-2,0,0,0),(1,0,0,0,0),(0,0,1,0,0)).$

[25]

```
m = {{1, 2, -1, 0}, {0, 3, -1, -2}, {1, -1, 0, 1}, {3, 2, -1, 1}};
a = {2, -1, -1, 2};
LinearSolve[Transpose[m], a]
{2, 0, 3, -1}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2A_1 + 3A_3 - A_4.$$

[26]

```
a = {1, 2, 0}; b = {0, 2, 1}; d = {0, 1, 0}; c = {1, 2, 3};

LinearSolve[Transpose[{a, b, d}], c]
{1, 3, -6}
```

i) $\mathscr{B}' = \left(A, B, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

ii) $C = A + 3B - 6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[27] i) Poiché $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$, dalla relazione di Grassmann segue che $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \geq 1$.

ii) Si possono avere solo i seguenti casi:

1. $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$ se $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 3$, per esempio: $\mathcal{U} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$,

$\mathcal{V} = \mathcal{L}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$, quindi $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

2. $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$ se $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 2 = \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$, per esempio:

$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

[28]

```
a1 = {1, -2, 1}; a2 = {2, 1, 3}; a3 = {4, -1, -5}; a = {4, -11, -7};

Det[{a1, a2, a3}]
-52

LinearSolve[Transpose[{a1, a2, a3}], a]
{4, -2, 1}
```

ii) $A = (4, -2, 1)$ rispetto alla base $\mathscr{B}'$.

[29]

```
Solve[{x1 + x2 + x3 == 0, 2x2 + x4 == 0, x5 - x6 == 0},
  {x1, x2, x3, x4, x5, x6}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -x3 + x4/2, x2 → -x4/2, x5 → x6}}

c = {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7},
    {1, -1, 2, 2, 3, 1}, {2, -1, 1, 0, -2, -12}};

B = Base[c]

Vett.Base
1  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}}
2  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}}
3  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}, {1, -1, 2, 2, 3, 1}}
4  {{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}, {1, -1, 2, 2, 3, 1}}

Risultato
{{1, 2, 3, -2, -3, 1}, {0, 1, 2, 0, 1, 7}, {1, -1, 2, 2, 3, 1}}

A = x{0, 2, -1, 0, 1, 0} + y{0, 1, -2, 0, 0, 1};
B = z{1, 0, 0, 0, 0, 0} + t{0, 0, 1, 0, 0, 0}+
    w{0, 0, 0, 1, 0, 0} + u{0, 0, 0, 0, 0, 1};

Solve[{-1, -1, -1, 2, 1, 1} == A + B, {x, y, z, t, w, u}][[1]]
{x → 1, y → -3, z → -1, t → -6, w → 2, u → 4}

A/.%
{0, -1, 5, 0, 1, -3}

B/.%%
{-1, 0, -6, 2, 0, 4}

a = {{0, -1, -1, -1}, {1, 0, 2, 1}, {1, -2, 0, 1}, {1, -1, -1, 0}};

Det[a]
4

MatrixForm[Inverse[a]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

i) $\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\dim \mathcal{B} = 3$.

ii) $\mathcal{C} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

$\dim \mathcal{C} = 3$.

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \ \dim \mathcal{D} = 2.$$

iii) $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{4,4})$.

iv) $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap (\mathcal{B} + \mathcal{C})$.

v) $\mathcal{E} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$

vi) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -5 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

vii) $\det A = 4, \ \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

[30] i) $\mathcal{W} = \mathcal{L}(A, {}^tA)$. ii) $\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $\mathcal{W} + \mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$, $\quad \mathcal{W} \cap \mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

[31]

```
a = {{0, 1, 2}, {1, 3, 1}, {2, 1, 5}};

Det[a]
-13

MatrixForm[Inverse[a]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

i) $\mathcal{A} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\dim \mathcal{A} = 3$.

ii) Per esempio $\mathcal{B} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

iv) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$.

v) $\mathcal{C} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\dim \mathcal{C} = 3$.

$\mathcal{D} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\dim \mathcal{D} = 3$.

vi) Sì, vii) $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap (\mathcal{A} \oplus \mathcal{C})$.

[32] i) $\mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

[33] ii) Per esempio: $\mathcal{L}((1,0,0,0))$, $\mathcal{L}((0,1,0,0))$.

[34] $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{L}((1,3,-2,2,3),(0,1,-1,2,-1),(0,0,1,0,-1))$; $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{L}((1,4,-3,4,2))$.

[35] $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{L}((1,2,-1,3),(0,0,3,-8))$.

[36]

```
X = {{x1, x2, x3}, {x4, x5, x6}, {x7, x8, x9}};
A = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, 0}};
Reduce[A.X == X.A, {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9}]
x1 == x5&&x2 == x6&&x4 == 0&&x7 == 0&&x8 == 0&&x9 == x5
```

i) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$, $\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

ii) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$

iii) Per esempio:

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

[37]

```
L = {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2},
   {0, 1, 2, 0, -1}, {-1, 3, 4, -1, -3}};
B = Base[L]
Vett.Base
1  {{1, -1, 0, 1, 1}}
2  {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}
3  {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}
4  {{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}
Risultato
{{1, -1, 0, 1, 1}, {1, -2, -2, 1, 2}}
Solve[{x1 - x4 + 2x5 == 0, x2 + x3 == 0}, {x1, x2, x3, x4, x5}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → x4 - 2 x5, x2 → -x3}}
RowReduce[{a = {1, -1, 0, 1, 1}, b = {1, -2, -2, 1, 2},
   c = {1, 0, 0, 1, 0}, d = {-2, 0, 0, 0, 1}, e = {0, -1, 1, 0, 0}}]
{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0},
  {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}
A = x a + y b; B = z c + t d + w e;
Solve[{0, 2, 0, 0, 0} == A + B, {x, y, z, t, w}]
{{x → 2, y → -1, z → -1, t → 0, w → -2}}
A/.%
{{1, 0, 2, 1, 0}}
B/.%%
{{-1, 2, -2, -1, 0}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-1,0,1,1),(1,-2,-2,1,2))$,
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,0,0,1,0),(-2,0,0,0,1),(0,-1,1,0,0))$, da cui $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^5$;
ii) $(0,2,0,0,0) = (1,0,2,1,0) + (-1,2,-2,-1,0)$.

[38] i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-1,0,2),(0,2,1,3))$, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2,0,1,3),(-1,1,0,0))$,
$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,-1,0,2),(0,2,1,3),(0,0,0,1))$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0,2,1,3))$.
ii) $\mathbf{a}_1 = 3(1,-1,0,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,1,-1,-3)$.

[39]

```
A = {{1, 3}, {0, -1}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Solve[A.X == X.A]
Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x3 → 0, x1 → 2 x2/3 + x4}}
a = {1, 0, 0, 1}; b = {2, 3, 0, 0}; c = {1, 0, 0, -1};
d = {0, 1, 0, 0}; e = {0, 0, 1, 0};
B = x a + y b; F = z c + t d + w e;
Solve[B == F, {x, y, z, t, w}]
Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -t/3, y → t/3, z → t/3, w → 0}}
B/.%
{{t/3, t, 0, -t/3}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),$

$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^{2,2}.$

ii) Per esempio: $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$

[40] Per esempio: $\mathcal{L}((0,1,0),(1,0,0)); \mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1))$.

[41] $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$

[42]

```
a1 = {1, 0, -2, 0, 1}; a2 = {0, 1, 0, -1, 0};
a3 = {0, 0, -1, 0, 3}; x = {1, 2, h, -2, 1};
Solve[x == x1 a1 + x2 a2 + x3 a3, h]
{{h → -2}}
```

i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,0,-2,0,1),(0,1,0,-1,0),(0,0,-1,0,3)),$

$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,-1,0,0,1),(0,-1,0,1,0),(-3,2,1,0,0)),$

$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-1,0,1,0,2),(0,-1,0,1,0)),$

$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,0,-2,0,1),(0,1,0,-1,0),(0,0,-1,0,3),(0,0,0,-1,6)).$

ii) $h = -2$.

[43] i) $\mathcal{W}_2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ perché i suoi elementi sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo; si può direttamente dimostrare che $\mathcal{W}_2$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per numeri reali.

ii) $\dim \mathcal{W}_1 = 3$, $((2,1,1,0,2),(-1,1,0,0,2),(0,2,0,1,1))$ è una base di $\mathcal{W}_1$.

$\dim \mathcal{W}_2 = 2$, $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,1,0,0,1),(0,-1,1,0,0))$.

iii) $\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 4$, $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,1,0,0,1),(0,2,0,0,3),(0,0,2,0,3),(0,0,0,1,-2))$;

$\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((2,1,1,0,2))$.

[44] Per esempio: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

[45] $\mathcal{H} = \mathcal{L}((-3,-6,0,1),(0,1,1,0))$, per esempio: $\mathcal{K} = \mathcal{L}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

[46]

```
L = {a = {0, 1, 0, -1}, b = {1, -2, 2, 1}, c = {1, 0, 2, -1}};

Base[L]

Vett.Base
1  {{0, 1, 0, -1}}
2  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}
3  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}
Risultato
{{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}

Solve[{x1 - x2 - x3 == 0, 2x2 + x3 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> x3/2, x2 -> -x3/2}}

d = {1, -1, 2, 0}; e = {0, 0, 0, 1};

L1 = {a, b, d, e};

Base[L1]

Vett.Base
1  {{0, 1, 0, -1}}
2  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}
3  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}}
4  {{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}, {0, 0, 0, 1}}
Risultato
{{0, 1, 0, -1}, {1, -2, 2, 1}, {0, 0, 0, 1}}

A = x a + y b; B = z d + w e;

Solve[A == B, {x, y, z, w}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x -> z, y -> z, w -> 0}}

A/.%
{{z, -z, 2 z, 0}}

F = Solve[{1, h, h + 1, -h} == A + B]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{h -> 1, w -> 1, x -> 3 - z, y -> 1 - z}}

Simplify[A/.F]
{{1 - z, 1 + z, 2 - 2 z, -2}}

Simplify[B/.F]
{{z, -z, 2 z, 1}}
```

i) $\mathcal{W} = \mathcal{L}((0,1,0,-1),(1,-2,2,1))$; $\mathcal{Z} = \mathcal{L}((1,-1,2,0),(0,0,0,1))$;

$\mathcal{W}+\mathcal{Z} = \mathcal{L}((0,1,0,-1),(1,-2,2,1),(0,0,0,1))$, $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z} = \mathcal{L}((1,-1,2,0))$

ii) $h = 1$; iii) $(1,1,2,-1) = (1-z, 1+z, 2-2z, -2) + (z, -z, 2z, 1)$, $z \in \mathbb{R}$.

[47]

```
Solve[{2x1 + x2 + x4 == 0, x1 - x4 == 0}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x2/3, x4 -> -x2/3}}

Solve[{x1 + x2 - x3 + 2x4 == 0, x1 == 0}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> 0, x2 -> x3 - 2 x4}}

L = {a = {1, -1, 2, 3}, b = {-1, -2, 0, 1}, c = {1, -7, 6, 11}};

B = Base[L]

Vett.Base
1  {{1, -1, 2, 3}}
2  {{1, -1, 2, 3}, {-1, -2, 0, 1}}
3  {{1, -1, 2, 3}, {-1, -2, 0, 1}}

Risultato
{{1, -1, 2, 3}, {-1, -2, 0, 1}}

x = {0, 1, 1, 0}; y = {0, -2, 0, 1};

RowReduce[{x, y, a, b}]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

i) $\mathcal{W}_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perché formato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 4 incognite. $\dim \mathcal{W}_1 = 2$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-3,0,1),(0,0,1,0))$.

ii) $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0,1,1,0),(0,-2,0,1))$; $\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

iii) $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathbb{R}^4$, quindi $\mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3) = \mathcal{W}_1$.

[48] $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-12,-1,4))$; se $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}' = \mathbb{R}^3$, allora per esempio:

$\mathcal{W}' = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$ oppure $\mathcal{W}' = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 0\}$.

[49] i) $\mathcal{B} = \mathcal{L}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1))$, $\mathcal{C} = \mathcal{L}((1,0,1,0),(0,1,1,0))$;
ii) $\mathcal{H} + \mathcal{K} = \mathcal{L}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(1,0,1,0))$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \mathcal{L}((1,-1,0,0))$;
iii) $(2,-1,0,-1) = 2(1,0,0,-1) - (0,1,0,-1)$.

[50] i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((1,-1,-1,1),(0,1,-1,0))$, $\dim \mathcal{W}_1 = 2$;
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$, $\dim \mathcal{W}_2 = 2$;
$\mathcal{W}_3 = \mathcal{L}((0,-1,1,0),(-1,1,0,1))$, $\dim \mathcal{W}_3 = 2$;
$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,-1,-1,1),(0,1,-1,0),(0,0,-1,1))$, $\dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 = 3$,
$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((1,-1,-1,1))$, $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1$.
ii) $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

[51] i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\dim \mathcal{W}_1 = 3$;

$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),\ \dim \mathcal{W}_2 = 2.$

ii) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^{2,2}.$

iii) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$

[52] i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}(A, {}^tA, B),\ \dim \mathcal{W}_1 = 3;$

ii) $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right),\ \dim \mathcal{W}_2 = 2;$

iii) $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^{2,2};$

iv) $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$

[53] i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((-2,1,0,3),(0,0,1,-2)),\ \dim \mathcal{W}_1 = 2;$
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-2,1,0,3),(0,0,1,-1)),\ \dim \mathcal{W}_2 = 2;$
$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-2,1,0,3),(0,0,1,-2),(0,0,1,-1)),\ \dim(W_1 + W_2) = 3;$
$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-2,1,0,3)),\ \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1;$
ii) la somma $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ non é diretta.

[54] i) $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}((0,1,-1,0,1),(1,-1,-1,1,-1),(2,-1,-3,2,0)),\ \dim \mathcal{W}_1 = 3;$
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-1,1,0,0,0),(0,0,-1,1,0)),\ \dim \mathcal{W}_2 = 2;$
$\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((0,1,-1,0,1),(1,-1,-1,1,-1),(2,-1,-3,2,0),(-1,1,0,0,0)),\ \dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = 4;$
$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{L}((-1,1,1,-1,0)),\ \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1.$
ii) Sí, la somma é diretta.

Capitolo 14

Spazi Vettoriali Euclidei

Lo scopo di questo capitolo è di estendere il concetto di prodotto scalare agli spazi vettoriali di dimensione superiore a tre, e, quindi, di introdurre le nozioni di perpendicolarità e di angolo anche in questi casi, permettendo, di conseguenza, lo studio della geometria euclidea negli spazi di dimensione qualsiasi.

14.1 Definizione di Prodotto Scalare

Definizione 14.1 *Sia V uno spazio vettoriale costruito su $\mathbb{R}$. Si definisce* **prodotto scalare** *la funzione:*

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \tag{14.1}$$

per cui valgano le seguenti proprietá:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;
2. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V$;
3. $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;
4. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ *e* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Uno spazio vettoriale V su cui è definito un prodotto scalare prende il nome di **spazio vettoriale euclideo**.

Esempio 14.1 Il solito prodotto scalare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \ \mathbf{y}\| \cos(\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}})$ conferisce a V_3 e a V_2 la struttura di spazio euclideo.

Esempio 14.2 Su $\mathbb{R}^n$ si definisce un prodotto scalare "naturale" che ricalca il calcolo in componenti, rispetto ad una base ortonormale, del prodotto scalare in V_3, ricordato nell'esempio precedente. Precisamente si pone:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \Sigma_{i=1}^n x_i y_i. \tag{14.2}$$

Si lascia per esercizio la verifica delle quattro proprietá di definizione di prodotto scalare. Con la notazione familiare di:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la (14.2) si scrive come:

$$X \cdot Y = {}^tXY. \tag{14.3}$$

Il prodotto scalare (14.3) prende il nome di **prodotto scalare standard su** $\mathbb{R}^n$, che viene cosí dotato della struttura di spazio euclideo.

Esempio 14.3 Si consideri la funzione: $\bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + 5x_3y_3, \tag{14.4}$$

si verifichi che $\bullet$ é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, chiaramente diverso dal prodotto scalare standard.

L'esempio appena incontrato permette di affermare che, almeno su $\mathbb{R}^n$, é possibile definire infiniti prodotti scalari, quindi infinite strutture euclidee.

Esempio 14.4 Si consideri la funzione $* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,$$

si osserva che $*$ non é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, per esempio $(0, 0, 1) * (0, 0, 1) = -1$ che contraddice il quarto assioma di definizione di prodotto scalare.

Esempio 14.5 Si consideri la funzione $\star : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, x_3) \star (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2,$$

$\star$ non é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, per esempio $(0, 0, 1) \star (0, 0, 1) = 0$ che contraddice il quarto assioma di definizione di prodotto scalare.

Il teorema seguente dimostra che uno spazio vettoriale reale di dimensione finita ammette sempre un prodotto scalare.

Teorema 14.1 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Esiste un prodotto scalare su V tale che, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = {}^tXY, \tag{14.5}$$

dove:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

e x_i e y_i, $i = 1, \dots, n$, sono le componenti di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

La dimostrazione è lasciata al Lettore per esercizio.

Dal teorema precedente segue che ogni spazio vettoriale reale è uno spazio Euclideo e poichè esistono infinite basi sullo stesso spazio vettoriale, esistono anche infiniti prodotti scalari sullo stesso spazio vettoriale.

Esercizio 14.1 Verificare che la funzione:

$$\cdot : \mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}, \mid (A, B) \mapsto A \cdot B = \operatorname{tr}({}^tAB) \tag{14.6}$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^{n,n}$.

Esempio 14.6 Se si considera il precedente prodotto scalare in $\mathbb{R}^{2,2}$, si ha che:

$$A \cdot B = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

Quindi, se si usa la base canonica $(E_{ij},\ i, j = 1, 2)$ di $\mathbb{R}^{2,2}$, il precedente prodotto scalare in componenti corrisponde al prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$. Si può verificare che la stessa proprietà vale in $\mathbb{R}^{n,n}$ per ogni n.

14.2 Norma di un vettore

Definizione 14.2 *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo. Si definisce* **norma** *di un vettore $\mathbf{x}$ di V il numero reale positivo definito da:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Si osservi che la precedente definizione ha senso perché, per il quarto assioma di definizione di prodotto scalare, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

Esempio 14.7 In V_3, dotato del solito prodotto scalare, la norma di un vettore $\mathbf{x}$ coincide con la sua usuale lunghezza.

Esempio 14.8 Sullo spazio Euclideo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, dotato del prodotto scalare standard, si ha $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Esempio 14.9 Se si considera su $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare definito nell'Esempio 14.3 si ha che $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2}$.

Esempio 14.10 Sullo spazio Euclideo $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, dotato del prodotto scalare standard, si ha $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 14.11 In generale se su uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n si considera il prodotto scalare (14.5) la norma di un vettore $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$ è data da:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{{}^tXX} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Esempio 14.12 La norma di un vettore $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ rispetto al prodotto scalare considerato nell'Esempio 14.6 è data:

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}.$$

Un oggetto si chiama "norma" solo se definisce un numero reale positivo che verifica determinate proprietà, come si verifica nel teorema seguente.

Teorema 14.2

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, *per ogni* $\mathbf{x} \in V$ *e* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *se e solo se* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\mathbf{x} \in V$.
3. **Teorema di Pitagora:** *Se* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, *allora* $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.
4. **Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:** $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|, \ \forall\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
5. **Disuguaglianza triangolare:** $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \ \forall\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Dimostrazione:

1. La dimostrazione è lasciata per esercizio.
2. La dimostrazione è lasciata per esercizio.
3. Segue da:
$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2. \tag{14.7}$$
4. La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz è banalmente soddisfatta se uno dei vettori coincide con il vettore nullo. Proviamola, quindi, nel caso in cui $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ siano entrambi diversi dal vettore nullo. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si puó considerare il polinomio di secondo grado in λ:
$$\|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2.$$
Per la proprietà 1. si ha che $\lambda^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e quindi il trinomio di secondo grado deve avere discriminante negativo, cioè $((\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - \|\mathbf{x}\|^2\,\|\mathbf{y}\|^2) \leq 0$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

5. Usando (14.7) e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$. ▮

Come conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha che $\dfrac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \leq 1$ e quindi:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \leq 1,$$

per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$. Si puó allora dare la seguente:

Definizione 14.3 *Dati $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ si definisce come* **angolo** *tra i due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ l'angolo $\alpha \in [0,\pi]$ tale che:*

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

Dalla precedente definizione si può facilmente verificare che $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ se e solo $\mathbf{x}$ è **ortogonale** a $\mathbf{y}$. Inoltre la precedente nozione di angolo permette di introdurre l'usuale geometria analitica dello spazio in spazi Euclidei di dimensione maggiore di 3.

14.3 Basi ortonormali

Definizione 14.4 *Sia $(V,\cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Una base $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ di V si dice* **ortonormale** *se verifica le seguenti condizioni:*

1. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, *per ogni $i \neq j$, $i,j = 1,\dots,n$.*
2. $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, *per ogni $i = 1,\dots,n$.*

Esempio 14.13 In $\mathbb{R}_3$ la base canonica:

$$(\mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1))$$

è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

Più in generale in $\mathbb{R}^n$, rispetto al prodotto scalare standard, la base canonica

$$\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1 = (1,0,\dots,0),\dots,\mathbf{e}_n = (0,\dots,0,1))$$

è una base ortonormale.

Esercizio 14.2 Si determini in $\mathbb{R}^3$ una base ortonormale rispetto al prodotto scalare:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3. \tag{14.8}$$

Soluzione: È immediato verificare che i vettori della base standard $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ sono a due ortogonali e quindi verificano la condizione 1. della Definizione 14.4. Se si calcola la norma dei tre vettori, rispetto al prodotto scalare che si sta considerando, si ha:

$$\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{e}_3\| = 2.$$

Quindi i vettori $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1, \dfrac{1}{2}\mathbf{e}_3\right)$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare (14.8).

Esempio 14.14 In $\mathbb{R}^{n,n}$ la base standard (E_{ij}), $i,j = 1,\dots,n$, è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare definito nell'Esercizio 14.6.

Se si scrive l'espressione del prodotto scalare in componenti, rispetto ad una base ortonormale, su uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione n, si ottiene la stessa espressione del prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$, come si può dedurre dal seguente teorema, la cui dimostrazione é un facile esercizio.

Teorema 14.3 *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo.*

1. *Se $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, è una base ortonormale e, dati due vettori qualsiasi:*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n$$

allora:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = {}^tXY,$$

dove per ${}^tXY$ si denota il prodotto della matrice riga e della matrice colonna formate rispettivamente dalle componenti di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

2. *Se $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ è una base di V tale che, per ogni coppia di vettori qualsiasi:*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n,$$

su ha:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$

allora $\mathcal{B}$ è una base ortonormale.

Si può provare che su uno spazio vettoriale euclideo esiste sempre una base ortonormale. A tale scopo é necessario dimostrare il seguente:

Lemma 14.1 *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Un insieme $I = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di n vettori tale che:*

1. $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$, *per ogni $i = 1, \dots n$;*

2. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, *per ogni $i \neq j$, $i, j = 1, \dots n$*

è una base.

Dimostrazione: Occorre dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, cioè l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli. Infatti, se si considera l'equazione vettoriale:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e si moltiplicano scalarmente entrambi i membri con ogni $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, n$, si ha $\lambda_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0$. Dalla condizione 1. segue che $\lambda_i = 0$, per ogni $i = 1, \dots, n$. ▮

Teorema 14.4 *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di V. A partire dalla base $\mathcal{B}$ è possibile costruire una base ortonormale $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.*

Come conseguenza del precedente Teorema si ha anche che su uno spazio vettoriale euclideo esistono infinite basi.

Dimostrazione: Per dimostrare il teorema si utilizza un metodo di calcolo per costruire una base ortonormale noto come il **processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt**.

A partire dalla base $\mathcal{B}$ si procede con un numero finito di passi, nel modo seguente:

1) si può considerare come primo vettore della base ortonormale il versore $\mathbf{e}_1 = \text{vers}\,\mathbf{v}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$.

2) Per costruire il secondo vettore $\mathbf{e}_2$ si considera il vettore $\mathbf{a}_2 = \mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{e}_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e si determina λ in modo tale che $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. Imponendo tale condizione si ottiene:

$$\lambda = -\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e_1}.$$

Quindi $\mathbf{e}_2 = \text{vers}(\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e_1})\mathbf{e}_1)$ è un vettore di norma 1 e ortogonale a $\mathbf{e}_1$.

3) Per costruire il terzo vettore $\mathbf{e}_3$, si considera il vettore $\mathbf{a}_3 = \mathbf{v}_3 + \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e si impongono le due condizioni

$$\begin{cases} \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda_1, \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + \lambda_2. \end{cases}$$

Il terzo vettore si ottiene quindi come versore del vettore $\mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$.

Iterando questo procedimento si ottiene, quindi, un insieme di n vettori

$$\mathbf{e}_k = \text{vers}(\mathbf{v}_k - (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - \ldots - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_{k-1})\mathbf{e}_{k-1}), \; k = 1, \ldots, n,$$

a due ortogonali e di norma unitaria. Per Il Lemma 14.1, i vettori $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ costituiscono una base. ▮

Si osservi che se $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ è una base ortonormale, dato un vettore $\mathbf{v}$, si ha: che

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n.$$

Il vettore:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_{k-1})\mathbf{e}_{k-1}$$

rappresenta, geometricamente, il vettore proiezione di $\mathbf{v}$ sul sottospazio generato dai vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$.

Inoltre, si può applicare il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt considerando come vettore $\mathbf{e}_1$ il versore di uno qualunque dei vettori $\mathbf{v}_i$ della base. Poiché esistono infinite basi in V si puó concludere che esistono infinite basi ortonormali nello spazio euclideo $(V, \cdot)$, ed é altrettanto chiaro che una base ortonormale rispetto ad un prodotto scalare non é necessariamente ortonormale rispetto ad un altro prodotto scalare (cfr. Esercizio 14.2).

Esercizio 14.3 Si consideri sullo spazio euclideo $(\mathbb{R}^4, \cdot)$, dotato del prodotto scalare standard, la base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ con:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 0),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -1), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 5).$$

Determinare una base ortonormale a partire da $\mathcal{B}$.

Soluzione: Applichiamo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B}$. Si considera:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0, 0).$$

Il secondo vettore $\mathbf{e}_2$ è dato dal versore di:

$$\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = (0, 1, -1, 0) - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0, 0) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -1, 0\right).$$

Quindi $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\sqrt{30}}{6}\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, -1, 0\right)$.

Analogamente si considera come $\mathbf{e}_3$ il versore di:

$$\mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2.$$

e così via.

Si consideri la matrice P del cambiamento di base da una base ortonormale $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ad un'altra base ortonormale $\mathscr{B}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$. P è una matrice invertibile che ha sulle colonne le componenti dei vettori $\mathbf{e}'_i$, $i = 1, \dots n$, rispetto alla base $\mathscr{B}$ e si può verificare che l'elemento di posto i, j del prodotto ${}^tPP$ è dato dal prodotto scalare $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$ scritto in componenti rispetto alla base $\mathscr{B}$. Quindi ${}^tPP = I$, cioè P è una matrice ortogonale. Poichè si ha anche che $P\,{}^tP = I$, ragionando nello stesso modo si deduce anche che i vettori riga costituiscono una base ortonormale. Segue cosí l'importante:

Teorema 14.5 *Due basi in uno spazio vettoriale euclideo sono ortonormali se e solo se la matrice del loro cambiamento di base é una matrice ortogonale.*

Per le matrici ortogonali si hanno le seguenti proprietà, alcune delle quali sono già state anticipate nel Capitolo 4.

Teorema 14.6

1. *Il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale.*
2. *La matrice identità è ortogonale.*
3. *L'inversa di una matrice ortogonale P^{-1} è ortogonale.*
4. *Se P è una matrice ortogonale, anche la sua trasposta ${}^tP$ é ortogonale.*
5. *P è una matrice ortogonale se e e solo se le righe e le colonne di P sono le componenti di una base ortonormale.*
5. *Il determinante di una matrice ortogonale P vale ± 1.*

Dimostrazione:

1. Se P e Q sono matrici ortogonali si ha:

   $$ {}^t(PQ)PQ = {}^tQ\,{}^tPPQ = I $$

   e quindi la matrice prodotto PQ è ortogonale.
2. La verifica è lasciata per esercizio.
3. Da ${}^tP = P^{-1}$ segue che $({}^tP)^{-1} = (P^{-1})^{-1}$ da cui la tesi.
4. Da ${}^tP = P^{-1}$ segue che ${}^t({}^tP) ={}^t (P^{-1})$ da cui la tesi.
5. La verifica è lasciata per esercizio.
6. Per il Teorema di Binet 3.17 si ha che $\det({}^tPP) = \det({}^tP)\det P = \det I = 1$. Quindi $(\det P)^2 = 1$. ∎

Non vale il viceversa della proprietà 6.. Ad esempio, se si considera la matrice

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

si ha che il determinante di A è 1 ma A non è ortogonale.

Esercizio 14.4 Determinare una matrice ortogonale P in $\mathbb{R}^{3,3}$ in modo tale che il primo vettore riga sia $\mathbf{a} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Soluzione. Per determinare la matrice ortogonale occorre completare l'insieme libero $\{\mathbf{a}\}$ a una base ortonormale $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Si può, ad esempio, completare l'insieme libero $\{\mathbf{a}\}$ ad una base con i due vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1).$$

Per determinare una base ortonormale, a partire dalla base $(\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, si può applicare il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, considerando

$$\mathbf{b} = \text{vers}(\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}) = \text{vers}(1, 0, 0) = \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{c} = \text{vers}(\mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}) = \text{vers}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

La matrice ortogonale cercata è ad esempio:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

14.4 Il complemento ortogonale

Siano $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e $\mathcal{W}$ un suo sottospazio vettoriale di dimensione $k \leq n$.

Definizione 14.5 *Si dice* **complemento ortogonale** *di $\mathcal{W}$ e lo si denota con $\mathcal{W}^\perp$ il sottoinsieme di V formato da tutti i vettori di V ortogonali ad ogni vettore di $\mathcal{W}$, cioè*

$$\mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{W}\}.$$

Osservazione 14.1 Scelta una base $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ di $\mathcal{W}$, si può osservare che la condizione $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{W}$ è equivalente a

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i = 0, \forall i = 1, \ldots, k.$$

Infatti si ha:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k) = 0,$$

per ogni $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$. Ma questa condizione è verficata se e solo se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i = 0$, per ogni $i = 1, \ldots, k$.

Si può provare il seguente:

Teorema 14.7 1. *$\mathcal{W}^\perp \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V.*

2. $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp = V$.

3. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

Dimostrazione:

1. La dimostrazione è lasciata al Lettore per esercizio.

2. Per provare che $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = V$ si può osservare che scelta una base $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ di $\mathcal{W}$ e, costruita la matrice A avente come vettori riga i vettori della base, si ottiene una matrice $A \in \mathbb{R}^{k,n}$ di rango k il cui nullspace coincide con $\mathcal{W}^\perp$. Quindi dal Teorema 11.18 segue che $\dim \mathcal{W}^\perp + \dim \mathcal{W} = n = \dim V$. La verifica che $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$ segue dal fatto che se $\mathbf{x} \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ si ha che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ e quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. È ovvia conseguenza di 2.. Infatti $\mathcal{W}^\perp \oplus (\mathcal{W}^\perp)^\perp = V$ ma si ha anche che $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{W} = V$ e quindi segue 3. per l'unicità del complemento ortogonale. ▮

Si può osservare che $\mathcal{W}^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V supplementare di $\mathcal{W}$, ma mentre esistono infiniti sottospazi vettoriali di V supplementari di $\mathcal{W}$, il complemento ortogonale è unico.

Osservazione 14.2 Si osservi che se $\mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$, allora $\mathcal{W}^\perp = V$ e se $\mathcal{W} = V$ allora $\mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Esercizio 14.5 Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ munito del prodotto scalare standard, determinare il complemento ortogonale $\mathcal{W}^\perp$ del sottospazio vettoriale

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Soluzione. Per l'Osservazione 14.1 si può prima determinare una base di $\mathcal{W}$ e poi l'insieme dei vettori $\mathbf{x}$ ortogonali a tutti i vettori della base.
Una base di $\mathcal{W}$ è, ad esempio, data dai due vettori:

$$\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (-1, 0, 1).$$

Il complemento ortgonale $\mathcal{W}$ è formato da tutti i vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V$ che verificano le due condizioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1 = -x_1 + x_2 = 0, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_2 = -x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Si vede che $\mathcal{W}^\perp$ corrisponde al nullspace della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioè al complemento ortogonale dello spazio delle righe $R(A)$ e $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{L}(1, 1, 1)$.

Si osservi che una base di $\mathcal{W}^\perp$ ha come componenti i coefficienti dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ che definisce $\mathcal{W}$. Si giustifichi teoricamente questo fatto, ma si presti particolare attenzione a **non** applicare questa regola nel caso in cui $\mathcal{W}$ sia definito come combinazione lineare di alcuni vettori.

Esercizio 14.6 In $\mathbb{R}^{2,2}$ si consideri il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Si determinino due sottospazi vettoriali supplementari a $\mathcal{W}$ e il suo complemento ortogonale, rispetto al prodotto scalare definito nell'Esercizio 14.6.

Soluzione: Innanzi tutto si osservi che, per le proprietà della traccia di una matrice quadrata, $\mathcal{W}$ è un sottospazio vettoriale. È facile ottenere che:

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

pertanto $\mathcal{W}$ è un iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$. I sottospazi $\mathcal{W}_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $\mathcal{W}_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ sono entrambi supplementari di $\mathcal{W}$; il complemento ortogonale $\mathcal{W}^\perp$ coincide con $\mathcal{W}_1$.

Esercizio 14.7 Siano $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sottospazi vettoriali dello spazio euclideo $(V, \cdot)$. Dimostrare che:

$$(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)^\perp = \mathcal{W}_1^\perp \cap \mathcal{W}_2^\perp,$$
$$(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)^\perp = \mathcal{W}_1^\perp + \mathcal{W}_2^\perp.$$

Capitolo 15

Per saperne di piú sugli spazi vettoriali euclidei

Esempio 15.1 Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e sia $\mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ una sua base ortonormale. Sia $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ un sottospazio di V generato dai k vettori $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ linearmente indipendenti dati da:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix}.$$

A é dunque una matrice di $\mathbb{R}^{k,n}$ di rango k. Il complemento ortogonale di $\mathcal{W}$ é formato dai vettori $\mathbf{x}$ di V la cui matrice X delle componenti é soluzione del sistema lineare omogeneo:

$$AX = 0.$$

Pertanto il nullspace di A $\mathcal{N}(A)$ coincide con $\mathcal{W}^\perp$. Se si indica con $\mathcal{R}(A)$ lo spazio delle righe di A e con $C(A)$ lo spazio delle colonne di A (cfr. Capitolo 11) segue:

$$\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A), \quad C(A)^\perp = \mathcal{N}({}^tA).$$

Esempio 15.2 Si considerino i due prodotti scalari seguenti su $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \\ \mathbf{x} \odot \mathbf{y} &= 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$ e $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1))$ é la base canonica di $\mathbb{R}^3$. É ben noto che $\mathcal{B}$ é anche una base ortonormale rispetto al prodotto scalare $\cdot$ ma non é ortonormale rispetto a $\odot$.

La base $\mathcal{B}' = \left(\left(\mathbf{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \mathbf{v}_2 = \left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right), \mathbf{v}_3 = (0,0,1)\right)$ é ortonormale rispetto al prodotto scalare $\odot$, ma, ovviamente, la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non é ortogonale. Si osservi inoltre che se $\mathbf{x} = x_1'\mathbf{v}_1 + x_2'\mathbf{v}_2 + x_3'\mathbf{v}_3$, $\mathbf{y} = y_1'\mathbf{v}_1 + y_2'\mathbf{v}_2 + y_3'\mathbf{v}_3$, allora $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = x_1'y_1' + x_2'y_2' + x_3'y_3'$ essendo $\mathcal{B}'$ una base ortonormale rispetto a $\odot$.

Sia $\mathbf{a}_1 = (1,0,2), \mathbf{a}_2 = (1,3,4), \mathbf{a}_3 = (0,3,4)$ una base di $\mathbb{R}^3$. A partire da tale base, usando il metodo di Gram–Schmidt si vogliono determinare una base ortonormale rispetto a $\cdot$ e una base ortonormale rispetto a $\odot$. Nel primo caso si ottiene: $\mathcal{C} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{4}{7\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5}}{7}, \frac{2}{7\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)\right)$. La matrice:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{7\sqrt{5}} & -\frac{6}{7} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{7\sqrt{5}} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

é ortogonale.
Rispetto al prodotto scalare $\odot$ si ottiene la base ortonormale:
$\mathcal{C}' = \left(\mathbf{v}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, 0, \frac{2}{\sqrt{7}}\right), \mathbf{v}_2' = \left(-\sqrt{\frac{2}{231}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{22}}, \sqrt{\frac{3}{154}}\right), \mathbf{v}_3' = \left(-\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{2\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}\right)\right)$.
La matrice R che ha sulle colonne le componenti della base $\mathcal{C}'$ non é una matrice ortogonale, mentre lo deve essere la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}'$, ottenuta dal prodotto $P^{-1}R$. Si lascia per esercizio sia la verifica dell'ortogonalitá dell'ultima matrice sia la giustificazione del fatto che essa si ottenga proprio nel modo indicato.

Capitolo 16

Spazi Vettoriali Euclidei – Esercizi

16.1 Esercizi

In tutti gli esercizi di questo capitolo, salvo esplicita dichiarazione, si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

- $\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale euclideo delle n-uple di numeri reali, di dimensione n, dotato del prodotto scalare standard, che rende ortonormale la base canonica $(\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1))$.

- V_3 lo spazio vettoriale euclideo reale, di dimensione 3, dei vettori ordinari, riferito alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. In quest'ambito: "$\wedge$"indica il prodotto vettoriale o esterno e "$\cdot$"il prodotto scalare.

[1] Nello spazio vettoriale euclideo ordinario V_3, è dato il piano vettoriale:

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

.

i) Si determini il complemento ortogonale $\mathcal{V}^\perp$ di $\mathcal{V}$.

ii) Si scrivano tutti i vettori $\mathbf{v}$ di V_3 tali che il volume del tetraedro generato da $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}$ sia 2. L'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ così individuato è un sottospazio vettoriale di V_3?

iii) Dato il vettore $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ si calcolino le proiezioni ortogonali di $\mathbf{a}$ su $\mathcal{V}$ e su $\mathcal{V}^\perp$.

[2] Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ si verifichi che i due vettori:

$$\mathbf{a}_1 = (1, -2, 1, 3), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 1, -3, 1) \tag{16.1}$$

sono ortogonali. Si completi l'insieme $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ fino ad ottenere una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

[3] Dato:

$$\mathcal{W} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = XA, \text{ dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$, determinare il suo complemento ortogonale (rispetto al prodotto scalare $X \cdot Y = \mathrm{tr}({}^tXY)$, $X, Y \in \mathbb{R}^{2,2}$).

[4] Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (3, 0, 4), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (2, -2, 4), \quad \mathbf{v}_4 = (4, 2, 4)$$

e sia $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.
i) Trovare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathcal{W}$.
ii) Completare $\mathcal{B}$ fino ad ottenere una base ortonormale $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$.
iii) Determinare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{D}$ e viceversa.

[5] Dato il sottospazio $\mathcal{H} = \mathcal{L}((1, -1, 3, 1))$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, trovare una base ortonormale per il sottospazio $\mathcal{H}^\perp$.

[6] Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Indicati con $\mathcal{R}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ gli spazi vettoriali generati dalle righe e dalle colonne di A, rispettivamente, si determinino:
i) base e dimensione di $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{C}(A)$ e di $\mathcal{R}(A) + \mathcal{C}(A)$;
ii) il complemento ortogonale di $\mathcal{C}(A)$ in $\mathbb{R}^4$, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

[7] Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + t = z - t = 0\},$$
$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y - z = x + t = 0\},$$

i) verificare che la somma di $\mathcal{U}$ e di $\mathcal{V}$ è diretta;
ii) trovare una base ortonormale di $\mathcal{U}^\perp$.

[8] Dato il sottospazio:

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 2x - y - z = 0\}$$

determinare una base ortonormale di $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$ a partire da una base di $\mathcal{W}$.

[9] i) In $\mathbb{R}^5$, i sottospazi:

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = x_3 = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{L}((1, 2, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 0, -1), (2, 3, 1, 3, 1)),$$

sono supplementari?
ii) Determinare le equazioni del complemento ortogonale di $\mathcal{A}$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^5$ e una sua base ortonormale.

[10] Data la base:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{a} = (1, 0, 1), \mathbf{b} = (0, 1, 1), \mathbf{c} = (2, 1, 2))$$

di $\mathbb{R}^3$, determinare una base ortonormale, a partire da $\mathcal{B}$, utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt.

[11] In V_3 è dato il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determinare una base ortonormale del piano vettoriale ortogonale a $\mathbf{v}$.

[12] Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1,-1),\ \mathbf{v}_2 = (1,-1,0,0),\ \mathbf{v}_3 = (0,0,1,1).$$

i) Verificare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
ii) Trovare una base ortonormale di $\mathcal{W}$ a partire dalla base $\mathcal{B}$.

[13] Determinare una matrice ortogonale in modo tale che la sua prima riga sia data da:

$$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

[14] Determinare una base ortonormale per il complemento ortogonale $\mathcal{F}^\perp$ del sottospazio:

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y = z-t = y+z = 0\}.$$

[15] In $\mathbb{R}^4$ é dato il sottospazio $\mathcal{U} = \mathcal{L}((0,1,0,-1),(1,-1,1,0))$ e sia $\mathcal{B}$ una sua base.
i) Trovare una base ortonormale $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{U}^\perp$.
ii) Costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ a partire dalla base $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}$.

[16] In $\mathbb{R}^4$ si consideri il vettore $\mathbf{a} = (1,2,-1,2)$.
i) Si scriva l'equazione del complemento ortogonale $\mathcal{L}(\mathbf{a})^\perp$ di $\mathcal{L}(\mathbf{a})$;
ii) si determini una base di $\mathcal{L}(\mathbf{a})^\perp$;
iii) si determini una base ortonormale di $\mathcal{L}(\mathbf{a})^\perp$.

[17] Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ è dato il sottospazio vettoriale:

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 2x_3 + x_1 = 0\},$$

determinare le equazioni del complemento ortogonale di W e una sua base ortonormale.

[18] Completare l'insieme libero:

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,0,-1), \mathbf{u}_2 = (1,2,0)\}$$

in modo da ottenere una base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Applicare quindi il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla precedente base per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

[19] Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{W} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

e il suo complemento ortogonale $\mathcal{W}^\perp$.

[20] Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,2,3,4))$$

di $\mathbb{R}^4$ e estendere tale base ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

[21] i) In $\mathbb{R}^4$ scrivere le equazioni del complemento ortogonale $\mathcal{W}^\perp$ del sottospazio:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = -x_2 + x_3 = 0\}.$$

ii) Determinare una base e la dimensione di $\mathcal{W}^\perp$.
iii) Determinare una base ortonormale di $\mathcal{W}^\perp$.

[22] i) In $\mathbb{R}^4$, rispetto al prodotto scalare standard, scrivere l'equazione del complemento ortogonale $\mathcal{W}^\perp$ del sottospazio $\mathcal{W} = \mathcal{L}((1, 2, 1, 0))$ e determinarne una base.
ii) Determinare una base ortonormale di $\mathcal{W}^\perp$.

16.2 Soluzioni

[1]

```
a1 = {1, 1, 0}; a2 = {1, -1, 1};
NullSpace[{a1, a2}]
{{-1, 1, 2}}
v = {x, y, z};
Solve[Det[{a1, a2, v}] == 12, v]
Solve ::'' svars'' : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 12 + y + 2 z}}
```

i) $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{L}(\mathbf{a}_3 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

ii) $\mathbf{v} = (12 + x_2 + 2x_3)\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$; l'insieme di tali vettori non costituisce un sottospazio vettoriale di V_3.

iii) $\mathbf{a} = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \dfrac{1}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.

[2]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
a1 = {1, -2, 1, 3}; a2 = {2, 1, -3, 1};
a1.a2
0
GramSchmidt[{a1, a2, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}, Normalized → False]
{{1, -2, 1, 3}, {2, 1, -3, 1}, {1/3, 1/3, 1/3, 0}, {-1/3, 1/3, 0, 1/3}}
```

$$\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)\right).$$

[3]

```
A = {{1, 3}, {0, -1}}; X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
Solve[A.X == X.A]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x3 -> 0, x1 -> 2 x2/3 + x4}}
a = Tr[Transpose[X].{{2, 3}, {0, 0}}];
b = Tr[Transpose[X]];
Solve[{a == 0, b == 0}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 -> -x4, x2 -> 2 x4/3}}
```

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

[4]

```
m = {{3, 0, 4}, {1, 2, 0}, {2, -2, 4}, {4, 2, 4}};
b = RowReduce[m]
{{1, 0, 4/3}, {0, 1, -2/3}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`
GramSchmidt[{b[[1]], b[[2]]}]
{{3/5, 0, 4/5}, {8/(5 Sqrt[29]), 5/Sqrt[29], -6/(5 Sqrt[29])}}
A = GramSchmidt[{%[[1]], %[[2]], {0, 0, 1}}]
{{3/5, 0, 4/5}, {8/(5 Sqrt[29]), 5/Sqrt[29], -6/(5 Sqrt[29])}, {-4/Sqrt[29], 2/Sqrt[29], 3/Sqrt[29]}}
MatrixForm[Transpose[A]]
( 3/5    8/(5 Sqrt[29])    -4/Sqrt[29]
  0      5/Sqrt[29]         2/Sqrt[29]
  4/5   -6/(5 Sqrt[29])     3/Sqrt[29] )
A.Transpose[A]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

i) $\mathscr{B} = \left(\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{8}{5\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{6}{5\sqrt{29}}\right)\right)$.

ii) $C = \left(\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{8}{5\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{6}{5\sqrt{29}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}\right)\right)$.

iii) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{8}{5\sqrt{29}} & -\frac{4}{\sqrt{29}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{5} & -\frac{6}{5\sqrt{29}} & \frac{3}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base da C a $\mathcal{D}$;

${}^tA = A^{-1}$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{D}$ a $\mathcal{C}$.

[5] $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0,\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \sqrt{\frac{2}{11}}, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{33}}, \frac{1}{2\sqrt{33}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\right)\right).$

[6] i) La somma $\mathcal{R}(A) + \mathcal{C}(A)$ è diretta, quindi la loro intersezione è $\{\mathbf{0}\}$;

ii) $\mathcal{C}(A)^{\perp} = \mathcal{L}((3, -2, 1, 0), (-4, 1, 0, 1))$.

[7]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{2, -1, 0, 1}, {2, -1, 1, 0}}]
```

$\left\{\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\sqrt{\frac{2}{33}}, -\frac{1}{\sqrt{66}}, \sqrt{\frac{6}{11}}, -\frac{5}{\sqrt{66}}\right\}\right\}$

ii) $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\sqrt{\frac{2}{33}}, -\frac{1}{\sqrt{66}}, \sqrt{\frac{6}{11}}, -\frac{5}{\sqrt{66}}\right)\right).$

[8]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{1, 1, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, 0, 1}}]
```

$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right\}$

$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right).$

[9] i) Sì;

ii) $\mathcal{A}^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 = x_4 = x_5 = 0\} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right), (0, 0, 1, 0, 0)\right).$

[10]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{1, 0, 1}, {0, 1, 1}, {2, 1, 2}}]
```

$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$

[11]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{-1, 1, 0}, {1, 0, 1}}]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right\}$$

$$\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right).$$

[12]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

m = {{1, 0, 1, -1}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}};
RowReduce[m]
{{1, 0, 0, -2}, {0, 1, 0, -2}, {0, 0, 1, 1}}

GramSchmidt[m]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{\frac{2}{\sqrt{15}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right\}, \left\{0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

ii) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$

[13]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

MatrixForm[
  GramSchmidt[{{0, Sqrt[2]/2, -Sqrt[2]/2}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}}]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Per esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$

[14]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{-1, 1, 0, 0}, {1, 0, 1, 0}, {-1, 0, 0, 1}}]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right\}$$

$$\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

[15] i) $\mathcal{B}' = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)\right).$

ii) $\mathcal{B}' = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right).$

[16] i) $y_1 + 2y_2 - y_3 + 2y_4 = 0$.
ii) $((1,0,1,0),\ (0,1,2,0),\ (0,0,2,1))$.

iii) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)\right).$

[17] $\mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{L}((1,0,2,0),(0,1,-2,0))$ $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2,0)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,5,-2,0)$.

[18] $\mathbf{u}_1 = (1,0,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$;

$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

[19] $\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0), \frac{1}{\sqrt{12}}(1,-1,1,3)\right)$, $W^{\perp} = \mathcal{L}((1,-1,1,-1))$.

[20] $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0), \frac{1}{\sqrt{147}}(1,-1,1,12), \frac{1}{7}(-4,4,-4,1)\right).$

[21] i) $\mathcal{W} = \mathcal{L}((-1,1,1,0),(0,0,0,1))$;

$\mathcal{W}^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = x_4 = 0\}$;

ii) $\mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{L}((1,0,1,0),(0,1,-1,0))$;

iii) $\mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right).$

[22] i) $\mathcal{W}^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$;

$\mathcal{W}^\perp = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,1,-2,0),(-1,0,1,0))$.

ii) $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{L}\left((0,0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right)$.

Capitolo 17

Applicazioni Lineari

Scopo di questo capitolo è introdurre la nozione di applicazione lineare tra due spazi vettoriali, mettendoli così in relazione l'un l'altro in modo da poter definire il concetto di movimento in uno spazio vettoriale.

Definizione 17.1 *Dati due spazi vettoriali V e W entrambi definiti su $\mathbb{R}$, si dice* **applicazione lineare** *o* **trasformazione lineare** *o* **omomorfismo** *da V in W una funzione $f : V \longrightarrow W$ che verifica le seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \\ &f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in V. \end{aligned} \tag{17.1}$$

V prende il nome di **dominio** di f e W ne è il **codominio**.

Segue un elenco di funzioni di cui si lascia al Lettore la verifica dell'eventuale linearità.

Esempio 17.1 $i : V \longrightarrow V$ tale che $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall\mathbf{x} \in V$, l'**applicazione identica** o **identità**, è un'applicazione lineare.

Esempio 17.2 $O : V \longrightarrow V$ tale che $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\forall\mathbf{x} \in V$, l'**applicazione lineare nulla**, è un'applicazione lineare.

Esempio 17.3 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x,y) = 3x + 2y$ è lineare.

Esempio 17.4 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x,y) = 3x + 2y + 5$ non è un'applicazione lineare.

Esempio 17.5 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x,y) = x^2 + 2y$ non è un'applicazione lineare.

Esempio 17.6 $f : V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$, con $\cdot$ prodotto scalare e $\mathbf{a}$ vettore fissato non nullo, è lineare.

Esempio 17.7 $f : V_3 \longrightarrow V_3$ tale che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x}$, con $\wedge$ prodotto vettoriale e $\mathbf{a}$ vettore fissato non nullo è lineare.

Esempio 17.8 $f : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(A) = \det A$ non è un'applicazione lineare.

Esempio 17.9 $f : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(A) = \operatorname{tr} A$ è un'applicazione lineare.

Esempio 17.10 Se $V = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$, è noto dalla Definizione 10.4 che ogni vettore $\mathbf{x}$ di V si decompone in modo unico come $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, con $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{W}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{W}_2$, le funzioni: $f_1 : V \longrightarrow V, \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}_1$ e $f_2 : V \longrightarrow V, \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}_2$ sono applicazioni lineari e prendono il nome di **proiezioni** di V su $\mathcal{W}_1$ e su $\mathcal{W}_2$ rispettivamente.

Esempio 17.11 La funzione $f : V_2 \longrightarrow V_2$, definita da $f((x_1,x_2)) = (-x_1,x_2)$, dove (x_1,x_2) sono le componenti di un qualsiasi vettore di V_2, rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i},\mathbf{j})$, è lineare. Si tratta dell'applicazione che associa ad ogni vettore il suo simmetrico rispetto a $\mathbf{j}$.

Esempio 17.12 La funzione $f : V_3 \longrightarrow V_3$, definita da $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, -x_3)$, dove (x_1, x_2, x_3) sono le componenti di un qualsiasi vettore di V_3 rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, è lineare. Si tratta dell'applicazione che associa ad ogni vettore il suo simmetrico rispetto al piano vettoriale generato da $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Esempio 17.13 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $f(X) = AX$ dove $X \in \mathbb{R}^n$ (ma è considerata come una matrice colonna di $\mathbb{R}^{n,1}$) e $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è un'esempio di applicazione lineare per le proprietà del prodotto di matrici. Più in generale: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita da $f(X) = AX$, con $X \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è anch'essa un'applicazione lineare.

La dimostrazione del seguente teorema è lasciata per esercizio:

Teorema 17.1 *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione linerare, si ha:*

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$*; dove $\mathbf{0}_V$ indica il vettore nullo di V e $\mathbf{0}_W$ indica il vettore nullo di W;*
2. $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} \in V$*;*
3. $f(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{x}_n), \ \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}_i \in V, i = 1, \ldots, n.$

17.1 Come si definisce un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali di dimensione finita

Teorema 17.2 (Teorema fondamentale delle applicazioni lineari.) *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Dato $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, insieme di vettori qualsiasi di uno spazio vettoriale W, allora esiste ed è unica l'applicazione lineare:*

$$f : V \longrightarrow W$$

tale che:

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{a}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

In altri termini: per assegnare un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W, di cui almeno V di dimensione finita, è sufficiente dare i trasformati, mediante la funzione, dei vettori di una base di V.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + x_n \mathbf{v}_n \in V$, si definisce f ponendo:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + x_n \mathbf{a}_n.$$

Si prova il teorema nei quattro passi seguenti:

1. f è una funzione, infatti il vettore $f(\mathbf{x})$ è ovunque definito ed è univocamente determinato, per l'esistenza e l'unicità delle componenti di $\mathbf{x}$, rispetto alla base $\mathcal{B}$.

2. Dalla definizione di f si ha $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{a}_i, \ i = 1, \ldots, n$.

3. Per dimostrare la linearità di f si deve verificare che:

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La tesi segue dalla definizione di f, ponendo: $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + x_n \mathbf{v}_n$, $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + y_n \mathbf{v}_n$. Un semplice calcolo prova che: $f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = (\alpha x_1 + \beta y_1) \mathbf{a}_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) \mathbf{a}_2 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) \mathbf{a}_n = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$.

4. L'applicazione f è unica. Infatti, se, per assurdo, esistesse un'applicazione lineare $g : V \longrightarrow W$, $g \neq f$, tale che $g(\mathbf{v}_i) = \mathbf{a}_i, \ i = 1, \ldots, n$, allora $g(\mathbf{x}) = g(x_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + x_n \mathbf{v}_n) = x_1 g(\mathbf{v}_1) + \ldots + x_n g(\mathbf{v}_n) = x_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + x_n \mathbf{a}_n$, per ogni $\mathbf{x} \in V$; ciò implicherebbe $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} \in V$ e quindi $g = f$, che è assurdo . ▮

17.2 Matrice associata ad un'applicazione lineare. Equazioni di un'applicazione lineare

Dal Teorema 17.2 segue che definire una applicazione lineare tra due spazi vettoriali di dimensione finita equivale a dare le immagini degli elementi di una base del dominio. Siano, quindi, V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base, e W uno spazio vettoriale di dimensione m e $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ una sua base. Si intende definire l'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ ponendo:

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ f(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{cases} \tag{17.2}$$

che equivale ad assegnare la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \tag{17.3}$$

ottenuta mettendo, ordinatamente, in colonna le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}$ espressi rispetto alla base $\mathcal{C}$. La matrice A prende il nome di **matrice associata all'applicazione lineare f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$** e si indica come: $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. La scelta di porre in colonna le componenti è una convenzione, che si ripercuote fortemente sulle considerazioni successive. In notazione matriciale le relazioni (17.2) si scrivono come:

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix}. \tag{17.4}$$

Dato un generico vettore $\mathbf{x}$ di V, ci si propone di calcolare la sua immagine $f(\mathbf{x})$ mediante la matrice A. Sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Poniamo $f(\mathbf{x}) = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \dots + y_m\mathbf{w}_m$, se si indica con $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ la matrice delle componenti di $f(\mathbf{x})$ rispetto alla base $\mathcal{C}$, allora:

$$f(\mathbf{x}) = {}^tY \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix}. \tag{17.5}$$

Per la linearità di f si ha:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + x_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{v}_n) = {}^tX \begin{pmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix}.$$

Da (17.5) e da (17.4) segue:

$$f(\mathbf{x}) = {}^tY \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix} = {}^tX \begin{pmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix} = {}^tX\,{}^tA \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix},$$

ossia, per l'unicità delle componenti di un vettore rispetto ad una base:

$$Y = AX, \tag{17.6}$$

che è il legame cercato tra le componenti di un vettore $\mathbf{x}$ e la sua immagine $f(\mathbf{x})$. Il sistema lineare (17.6) di m equazioni in n incognite prende il nome di **equazioni dell'applicazione lineare** f.

Gli esempi che seguono mettono in luce la fondamentale importanza delle relazioni appena dimostrate.

Esempio 17.14 La matrice associata all'applicazione identità: $i : V \longrightarrow V$ tale che $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in V$ è la matrice unità di ordine n se $\dim V = n$ (cfr. Esempio 17.1).

Esempio 17.15 La matrice associata all'applicazione nulla: $O : V \longrightarrow V$ tale che $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \forall \mathbf{x} \in V$ è la matrice nulla di ordine n se $\dim V = n$ (cfr. Esempio 17.2).

Esempio 17.16 Le equazioni dell'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (2x + 3y, y, 3x - 2z) \tag{17.7}$$

sono:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = y \\ z' = 3x - 2z, \end{cases} \tag{17.8}$$

quindi la matrice associata all'applicazione lineare, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, l'immagine del vettore $(2, 0, 3)$ si calcola mediante il prodotto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oppure sostituendo ordinatamente in (17.8) i numeri $2, 0, 3$ al posto di x, y, z, rispettivamente.

Esempio 17.17 Riprendiamo l'Esempio 17.7: in V_3, spazio vettoriale dei vettori ordinari, riferito ad una base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si consideri l'endomorfismo $f : V_3 \longrightarrow V_3$ definita da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}$, con $\mathbf{a}$ vettore di V_3 non nullo. La matrice associata ad f, rispetto alla base $\mathcal{B}$ può essere determinata in due modi:

i) si calcola $f(\mathbf{x})$, ponendo $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, si ha:

$$f(\mathbf{x}) = (-a_3x_2 + a_2x_3)\mathbf{i} + (a_3x_1 - a_1x_3)\mathbf{j} + (-a_2x_1 + a_1x_2)\mathbf{k},$$

allora la matrice associata ad f, rispetto alla base $\mathcal{B}$, è:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

si osservi che A è una matrice antisimmetrica.

ii) Si può pervenire alla matrice A calcolando le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ e mettendo sulle colonne, rispettivamente, le componenti di $f(\mathbf{i})$, $f(\mathbf{j})$, $f(\mathbf{k})$.

Esempio 17.18 Rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio, la matrice associata all'applicazione lineare: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ definita da:

$$f((a,b,c)) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice di $\mathbb{R}^{4,3}$ data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 17.1 Si scrivano le matrici associate alle applicazioni lineari introdotte negli Esempi 17.3, 17.6, 17.9, 17.10, 17.11, 17.12, 17.13, dopo aver fissato basi opportune nel dominio e nel codominio.

Esercizio 17.2 In $\mathbb{R}^3$, rispetto alla base standard $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, è dato l'endomorfismo f tale che:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \\ 2f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \end{cases}$$

scrivere la matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$.

Soluzione: Si osservi che si ottiene la soluzione risolvendo il sistema di equazioni vettoriali assegnato e si osservi anche che esiste ed è unica la soluzione solo se la matrice dei coefficienti di tale sistema ha rango massimo. Procediamo, quindi, con la riduzione per righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = 6\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = 9\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \end{cases}$$

quindi la matrice cercata è:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

17.3 Cambiamenti di base e applicazioni lineari

Per la lettura di questo paragrafo si deve fare costante riferimento al Paragrafo 11.3 sul cambiamento di base in uno spazio vettoriale. Si vogliono, infatti, determinare le relazioni che intercorrono tra tutte le matrici associate alla stessa applicazione lineare, costruite cambiando base sia nel dominio sia nel codominio. Dal paragrafo precedente segue che, dati due spazi vettoriali V e W, entrambi costruiti su $\mathbb{R}$, supponendo che $\dim V = n$ e data $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ base di V, supponendo inoltre che $\dim W = m$ e data $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ base di W, la matrice associata ad f, rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{C}$ è $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathbb{R}^{m,n}$. Detta $X \in \mathbb{R}^{n,1}$ la matrice delle componenti di un generico vettore $\mathbf{x}$ di V, rispetto alla base $\mathcal{B}$, la matrice Y delle componenti di $f(\mathbf{x})$, rispetto a $\mathcal{C}$ è data da:

$$Y = AX \tag{17.9}$$

.

Si inizia con l'effettuare un cambiamento di base in V. Sia $\mathscr{B}' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n)$ una nuova base di V, allora la matrice $X' \in \mathbb{R}^{n,1}$ delle componenti del vettore $\mathbf{x}$, rispetto alla base $\mathscr{B}'$ si ottiene mediante le equazioni del cambiamento di base:

$$X = PX', \tag{17.10}$$

dove P indica la matrice invertibile di ordine n del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ in $\mathscr{B}'$.
Si effettua anche un cambiamento di base in W. Sia $\mathcal{C}' = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_m)$ una nuova base di W, allora le componenti del vettore $f(\mathbf{x})$, rispetto alla base $\mathcal{C}'$ sono date da:

$$Y = QY', \tag{17.11}$$

dove Q indica la matrice invertibile di ordine m del cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ in W. Di conseguenza, indicata con A' la matrice $A' = M^{\mathscr{B}',\mathcal{C}'}(f) \in \mathbb{R}^{m,n}$ associata ad f, rispetto alle basi $\mathscr{B}'$ e $\mathcal{C}'$, le equazioni di f, rispetto a tali basi, sono:

$$Y' = A'X'. \tag{17.12}$$

Scopo di questo paragrafo è quello di individuare la relazione che intercorre tra A e A'. Sostituendo le equazioni (17.10) e (17.11) in (17.9) si ha:

$$QY' = APX'$$

ossia:

$$A' = Q^{-1}AP \tag{17.13}$$

che stabilisce la relazione cercata tra le infinite matrici associate ad f.

Nel caso particolare di un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ ed effettuando un solo cambiamento di base, la (17.13) si riduce a:

$$A' = P^{-1}AP. \tag{17.14}$$

Le matrici associate all'endomorfismo f, calcolate rispetto alla stessa base nel dominio e nel codominio, sono in relazione tra loro mediante la (17.14), e prendono il nome di **matrici simili**. Per esse vale il seguente teorema la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 17.3 *Matrici simili hanno:*

1. *lo stesso determinante,*
2. *la stessa traccia.*

Esercizio 17.3 In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori: $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, -2)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, -1)$, dopo aver verificato che costituiscono una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$, si consideri l'endomorfismo g così definito:

$$g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1,\ g(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ g(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,\ g(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_3.$$

Si scrivano le matrici associate a g sia rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia rispetto alla base canonica $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione: La matrice P, ottenuta mettendo in colonna le componenti dei vettori di $\mathcal{C}$, è la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathcal{C}$ solo se ha rango 4, infatti si ha che:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\det P = 1$. La matrice associata a g rispetto alla base $\mathcal{C}$ è:

$$A' = M^{\mathcal{C},\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da (17.14) segue che la matrice A associata a g, rispetto alla base canonica $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^4$, si ottiene dal prodotto:

$$A = PA'P^{-1}.$$

17.4 Immagine e controimmagine di sottospazi vettoriali

Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W entrambi definiti su $\mathbb{R}$. In questo paragrafo vogliamo studiare l'immagine mediante f di un generico sottospazio vettoriale $\mathcal{H}$ di V e la controimmagine mediante f di un generico sottospazio $\mathcal{K}$ di W. Iniziamo con il seguente teorema.

Teorema 17.4 *Sia $\mathcal{H} \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V allora l'insieme $f(\mathcal{H})$ definito da:*

$$f(\mathcal{H}) = \{\mathbf{y} \in W \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{H},\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$

è un sottospazio vettoriale di W.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Più precisamente, se $\dim V = n$, supponiamo che $\dim \mathcal{H} = h \leq n$. Sia $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_h)$ una base di $\mathcal{H}$, allora ogni vettore $\mathbf{x}$ di $\mathcal{H}$ si esprime come: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_h\mathbf{a}_h$, con $x_1, x_2, \dots, x_h \in \mathbb{R}$. Di conseguenza: $f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \dots + x_h f(\mathbf{a}_h)$ da cui segue che i vettori $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_h)$ sono generatori di $f(\mathcal{H})$, in altri termini:

$$\dim f(\mathcal{H}) \leq h.$$

Esercizio 17.4 Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3),$$

calcolare una base e la dimensione di $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Soluzione: Si verifica che $\dim \mathcal{H} = 2$ e una base di $\mathcal{H}$ è data da $(\mathbf{a} = (1, 0, -1), \mathbf{b} = (0, 1, -1))$, pertanto $f(\mathcal{H})$ è generato da $(f(\mathbf{a}) = (1, 1, 0, 1), f(\mathbf{b}) = (1, 0, -1, 1))$. Si vede che si tratta di due vettori l.i., pertanto costituiscono una base di $f(\mathcal{H})$ e $\dim f(\mathcal{H}) = 2$.

Data l'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, come caso particolare del precedente si può considerare il sottospazio di W dato da $f(V)$, che comporta la seguente:

Definizione 17.2 *Si definisce* **sottospazio immagine** *e si indica con $\operatorname{im} f$ il sottospazio $f(V)$ di W.*

In modo naturale si ha il seguente:

Teorema 17.5 *Un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ è suriettiva se e solo se $\operatorname{im} f = W$.*

Se $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ é una sua base, allora segue che

$$\operatorname{im} f = \mathcal{L}(f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n))$$

quindi:

$$\dim \operatorname{im} f \leq \dim V.$$

Se $\dim W = m$ e $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ è una base di W, indicata con A la matrice di $\mathbb{R}^{m,n}$ associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, dal Paragrafo 17.2 segue che:

$$\dim \operatorname{im} f = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{rank}(A),$$

dove $\mathcal{C}(A)$ indica lo spazio delle colonne della matrice A. Vale anche l'evidente ma importante:

Teorema 17.6 *Tutte le matrici associate alla stessa applicazione lineare hanno le stesso rango. In particolare matrici simili hanno lo stesso rango.*

Osservazione 17.1 Non esiste alcuna applicazione lineare suriettiva da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Perchè?

Esercizio 17.5 Si calcoli $\mathrm{im} f$ dove $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ è l'applicazione lineare definita nell'Esercizio 17.4.

Soluzione: La matrice associata ad f (rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$) è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

riducendo A per colonne si ottiene:

$$A \underset{C_2 \to C_1 - C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_2 - C_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathrm{rank}(A) = 2$ e anche $\dim \mathrm{im} f = 2$, una base di $\mathrm{im} f$ è data dalle due colonne non nulle della matrice ridotta per colonne, ossia $\mathrm{im} f = \mathcal{L}((1, 2, 1, 0), (0, 1, 1, -1))$.

Occupiamoci ora del problema analogo relativo ad un sottospazio $\mathcal{K}$ di W. Si ha:

Teorema 17.7 *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra i due spazi vettoriali V e W. La* **controimmagine** *di un sottospazio vettoriale $\mathcal{K}$ di W definita da:*

$$f^{-1}(\mathcal{K}) = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) \in \mathcal{K}\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione: È un facile esercizio. Si faccia però molta attenzione a non confondere la notazione $f^{-1}(\mathcal{K})$ con f^{-1} che, come si vedrà in seguito, indica l'inversa di f, ma f^{-1} non sarà definita per ogni f. ∎

Osservazione 17.2 Può succedere che la controimmagine di un sottospazio vettoriale sia l'insieme vuoto? In quali casi tale controimmagine coincide con tutto il dominio? Invece è quasi evidente che $f^{-1}(\mathcal{K}) = f^{-1}(\mathcal{K} \cap \mathrm{im} f)$.

Esercizio 17.6 Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita come:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$$

si calcoli la controimmagine del sottospazio vettoriale $\mathcal{K}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{K} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \mid y_1 + y_2 = 0\}.$$

Soluzione: $\mathcal{K}$ è dato da:

$$\mathcal{K} = \{(t_1, -t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$

quindi le componenti dei vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ la cui immagine appartiene a $\mathcal{K}$ sono le soluzioni dell'equazione vettoriale $AX = Y$, con A matrice associata ad f (rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$) e Y componenti del generico vettore di $\mathcal{K}$.
Nel nostro caso si ha:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & t_1 \\ 2 & 1 & 1 & -t_1 \\ 1 & 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 1 & -1 & t_3 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_1 - R_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & -1 & 3t_1 \\ 0 & 1 & -1 & t_1 - t_2 \\ 0 & 1 & -1 & t_3 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3 \to R_2 - R_3 \\ R_4 \to R_2 - R_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & -1 & 3t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2t_1 + t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3t_1 - t_3 \end{array}\right)$$

da cui si ottiene che il sistema è compatibile se e solo se:

$$\begin{cases} t_2 = -2t_1 \\ t_3 = 3t_1 \end{cases}$$

Si controlli per esercizio che tali condizioni coincidono con la definizione di $\mathcal{K} \cap \operatorname{im} f$. Risolvendo il sistema lineare si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -3t_1 + \lambda, \quad \forall \lambda, t_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

da cui segue:

$$f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((-1, 1, 1), (1, 0, -3)).$$

Si osservi che, in alternativa, in questo caso, si poteva pervenire allo stesso risultato sostituendo nell'equazione di $\mathcal{K}: y_1 + y_2 = 0$ le equazioni dell'applicazione lineare relative: $y_1 = x_1 + x_2$ e $y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3$, da cui segue:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

che è l'equazione di $f^{-1}(\mathcal{K})$.

Estremamente importante è il caso particolare della controimmagine del sottospazio $\{\mathbf{0}_W\}$ del codominio, da cui segue la definizione:

Definizione 17.3 *Il* **nucleo** *di un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ è il sottospazio vettoriale di V controimmagine del sottospazio $\{\mathbf{0}_W\}$ del codominio W e si indica con:*

$$\ker f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W\}.$$

Osservazione 17.3 Il fatto che $\ker f$ sia un sottospazio vettoriale di V segue dal Teorema 17.7

Esempio 17.19 Nel caso dell'identità, definita nell'Esempio 17.1, $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ e $\operatorname{im} f = V$

Esempio 17.20 Nel caso dell'applicazione nulla, definita nell'Esempio 17.2, $\ker f = V$ e $\operatorname{im} f = \{\mathbf{0}\}$.

Esempio 17.21 Nel caso dell'applicazione lineare definita nell'Esempio 17.6 $\ker f$ è il piano perpendicolare al vettore $\mathbf{a}$ mentre $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$.

Il calcolo del sottospazio $\operatorname{im} f$ costituisce un test per valutare l'eventuale suriettività dell'applicazione lineare in questione. Lo studio di $\ker f$, invece, è legato all'iniettività di f, e precisamente:

Teorema 17.8 *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W, f è iniettiva se e solo se* $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$.

Dimostrazione: Se $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$, si tratta di dimostrare che f è iniettiva, ossia che se $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ allora $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Ma da $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ segue $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}_V$ da cui la tesi.
Viceversa, se f è iniettiva e se si suppone, per assurdo, che esista un vettore $\mathbf{x} \in \ker f$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ allora $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, che è assurdo . ∎

Per il calcolo esplicito di $\ker f$, consideriamo la matrice A associata all'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, rispetto alle basi $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di V e $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ di W. Per definizione un vettore $\mathbf{x}$ appartiene a $\ker f$ se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$, che, usando le equazioni dell'applicazione lineare f equivale a:

$$AX = 0 \tag{17.15}$$

dove X indica le componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, quindi calcolare $\ker f$ equivale a risolvere il sistema lineare omogeneo (17.15). Dal Teorema 11.18 segue:

$$\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rank}(A).$$

Esempio 17.22 Calcoliamo $\ker f$ nel caso dell'applicazione lineare introdotta nell'Esercizio 17.7. Riducendo per righe la matrice associata ad f si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to 2R_1 - R_2 \\ R_3 \to R_1 - R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_2 - R_3 \\ R_4 \to R_2 - R_4}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene che $\operatorname{rank}(A) = 2 = \dim \operatorname{im} f$, mentre $\dim \ker f = 1 = 3 - 2$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo ridotto associato alla matrice ridotta per righe segue che: $\ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 1))$. Si osservi che, per determinare esplicitamente $\operatorname{im} f$, si deve ridurre la matrice A per colonne.

Esercizio 17.7 Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

con $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$.

Soluzione: La matrice associata ad f, rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det A = -4$, il rango di A è 3, quindi $\dim \operatorname{im} f = 3$, ossia $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ e $\dim \ker f = 0$, quindi $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

Il lemma che segue stabilisce che condizione equivalente all'iniettivitá dell'applicazione lineare é che la dimensione dell'immagine di ogni sottospazio vettoriale coincida con la dimensione del sottospazio stesso. Infatti:

Lemma 17.1 *L'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ é iniettiva se e solo se l'immagine di ogni insieme libero é un insieme libero.*

Dimostrazione: Sia $f : V \longrightarrow W$ iniettiva e sia $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ un insieme di vettori l.i., si tratta di dimostrare che l'insieme $\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_k)\}$ é libero. La tesi segue dalla definizione di vettori l.i. e dal Teorema 17.8. Viceversa, dal fatto che $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}_V$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ segue che necessariamente $\ker f = \{\mathbf{0}_V\}$, da cui la tesi . ∎

Definizione 17.4 *Un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ che sia biiettiva prende il nome di* **isomorfismo** *tra V e W. Se è possibile definire un isomorfismo tra due spazi vettoriali questi si dicono* **isomorfi**.

Il teorema che segue stabilisce una relazione tra le dimensioni di $\ker f$ e di V e il rango della matrice associata all'applicazione lineare f da cui si ottiene un'altra dimostrazione del Teorema del Rango 11.14.

Teorema 17.9 *(***Il Teorema del Rango.***) Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, allora:*

$$\dim \ker f + \dim im f = \dim V.$$

Si osservi che $\dim \ker f = \dim \mathcal{N}(A) = n - \dim \mathcal{R}(A)$, con A matrice associata ad f e $\mathcal{N}(A)$ il nullspace di A e $\dim \operatorname{im} f = \dim \mathcal{C}(A)$, da cui segue che $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{C}(A)$, vale a dire il Teorema del Rango, 11.14.

Dimostrazione: Supponiamo che $\dim V = n$ e $\dim \ker f = h \leq n$. Se $h = 0$ e se $h = n$ il teorema è dimostrato. (Perchè?) Supponiamo $h < n$ e sia $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h)$ una base di $\ker f$. Per il Teorema 11.9 completiamo tale insieme di vettori fino ad ottenere una base di V: $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_h, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-h})$. Consideriamo il sottoinsieme di W: $\mathcal{C} = (f(\mathbf{b}_1), f(\mathbf{b}_2), \ldots, f(\mathbf{b}_{n-h}))$, la tesi segue se si dimostra che $\mathcal{C}$ è una base di $\operatorname{im} f$.

Iniziamo con il dimostrare che C è un insieme di generatori di $\operatorname{im} f$. Sia $\mathbf{x}$ un vettore di V, come tale si ha:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_h\mathbf{a}_h + x_{h+1}\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_{n-h},$$

da cui:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{a}_1) + \ldots + x_h f(\mathbf{a}_h) + x_{h+1} f(\mathbf{b}_1) + \ldots + x_n f(\mathbf{b}_{n-h}) = x_{h+1} f(\mathbf{b}_1) + \ldots + x_n f(\mathbf{b}_{n-h})$$

poichè i vettori $\mathbf{a}_i$ appartengono a $\ker f$, quindi C è un sistema di generatori di $\operatorname{im} f$.
Per l'indipendenza lineare si ha:

$$\lambda_1 f(\mathbf{b}_1) + \ldots + \lambda_{n-h} f(\mathbf{b}_{n-h}) = \mathbf{0}_W$$

ossia:

$$f(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + +\lambda_{n-h}\mathbf{b}_{n-h}) = \mathbf{0}_W$$

da cui segue che il vettore $\lambda_1\mathbf{b}_1 + \ldots + +\lambda_{n-h}\mathbf{b}_{n-h}$ appartiene a $\ker f$, come tale si può scrivere come c.l. della base $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h)$ di $\ker f$, dall'espressione esplicita di tale combinazione lineare e dal fatto che $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_h, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-h})$ è una base di V segue la tesi . ▮

Nel caso particolare di un endomorfismo di V, tutti i risultati man mano ottenuti si possono riassumere nel seguente teorema, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 17.10 *Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V, allora:*

1. *f è un isomorfismo se e solo se $\ker f = \mathbf{0}_V$.*
2. *f è un isomorfismo se e solo se $\operatorname{im} f = V$.*

L'ultimo teorema di questo paragrafo stabilisce la condizione necessaria e sufficiente affinchè due spazi vettoriali siamo isomorfi:

Teorema 17.11 *Due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se essi hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione: Il fatto che due spazi vettoriali isomorfi abbiamo la stessa dimensione segue in modo evidente dai teoremi precedenti.
Viceversa, consideriamo due spazi vettoriali V e W tali che $\dim V = \dim W = n$, il teorema segue se siamo in grado di definire un isomorfismo tra di essi. Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ e $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ basi di V e di W rispettivamente. Definiamo $f : V \longrightarrow W$ ponendo $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$, f è l'isomorfismo cercato. I dettagli della dimostrazione sono lasciati al Lettore . ▮

Esempio 17.23 Il cambiamento di base in uno spazio vettoriale (descritto nel Paragrafo 11.3) é un esempio di automorfismo dello spazio vettoriale stesso. Si lascia per esercizio la sua descrizione esplicita e il calcolo della matrice ad esso associata.

17.5 Operazioni tra applicazioni lineari

In questo paragrafo si inizia con il dimostrare che l'insieme:

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ è un'applicazione lineare}\}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Infatti, date $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$, si definisce **somma** di f e di g la funzione data da:

$$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V,$$

$f + g$ è ancora un elemento di $\mathcal{L}(V, W)$, la verifica è lasciata per esercizio.

Si dimostra anche facilmente che, per la somma di applicazioni lineari appena definita, valgono le prorietà commutativa ed associativa. Esiste, inoltre, l'elemento neutro dato dall'applicazione lineare nulla definita nell'Esempio 17.2 e l'applicazione lineare opposta di $f \in \mathcal{L}(V, W)$, data da: $(-f)(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in V$.
In modo altrettanto naturale, è possibile definire il **prodotto di una funzione per un numero reale** $f \in \mathcal{L}(V, W)$ come:

$$(\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si verifica che tale prodotto è ancora un'applicazione lineare per cui valgono le quattro proprietà di definizione di prodotto di un numero reale per un vettore (la verifica è un facile esercizio). Segue che $\mathcal{L}(V, W)$ è un esempio di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Siano $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ base di V e $\dim W = m$ e $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ base di W. Siano $A = M^{\mathcal{B},C}(f) \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice associata a f e $B = M^{\mathcal{B},C}(g) \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice associata a g; è un esercizio dimostrare che $A + B$ è la matrice associata a $f + g$, rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e C. Inoltre λA è la matrice associata a λf. Viene così definita, in modo naturale, la funzione:

$$\psi : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$$

tale che $\psi(f) = A$, ossia ψ è la funzione che associa ad ogni applicazione lineare f la sua matrice (rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e C del dominio e del codominio).
È un esercizio verificare che ψ è un isomorfismo, quindi, segue dal Teorema 17.11 che

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = mn.$$

Occupiamoci ora della composizione di due applicazioni lineari opportunamente definite. Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, ponendo $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di V, $\dim W = m$ e $C = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ una base di W, indichiamo con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e C. Sia $g : W \longrightarrow Z$ un'altra applicazione lineare, posto $\dim Z = p$ e $\mathcal{D} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p)$ una base di Z, indichiamo con $B \in \mathbb{R}^{p,m}$ la matrice associata a g rispetto alle basi C e $\mathcal{D}$. La funzione:

$$g \circ f : V \longrightarrow Z \mid (g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

prende il nome di **composizione** delle applicazioni lineari f e g. È un facile esercizio verificare che $g \circ f$ è un'applicazione lineare. Procediamo, quindi, al calcolo della matrice ad essa associata. Le equazioni dell'applicazione lineare f sono $Y = AX$, dove X indica la matrice colonna di $\mathbb{R}^{n,1}$ delle componenti del generico vettore $\mathbf{x}$ di V e Y indica la matrice colonna di $\mathbb{R}^{m,1}$ delle componenti di $f(\mathbf{x})$. Calcolando l'immagine di $f(\mathbf{x})$ mediante g si ottiene $Z = BY$ dove Z indica la matrice colonna di $\mathbb{R}^{p,1}$ delle componenti di $g(f(\mathbf{x}))$, sostituendo si ha:

$$Z = BY = BAX,$$

quindi la matrice $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ associata a $g \circ f$, rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ è data dal prodotto:

$$C = BA.$$

Questo risultato costituisce un'altra giustificazione della definizione di prodotto di matrici (righe per colonne) introdotto nel Capitolo 3

Esercizio 17.8 Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ riferiti alle rispettive basi canoniche $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Date le applicazioni lineari:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad B = M^{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 & 0 \\ -5 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h = g$.

Soluzione: All'applicazione lineare h (rispetto alla basi canoniche del dominio e del codominio) si associa una matrice $X \in \mathbb{R}^{3,4}$, tale che $AX = B$. Si tratta, quindi, di risolvere l'equazione matriciale così ottenuta usamdo i metodi insegnati nel Capitolo 3.

Nel caso particolare di $\mathcal{L}(V,V)$, ossia dello spazio vettoriale degli endomorfismi di V (a volte anche indicato con $End(V)$), la composizione è un'operazione interna, per cui vale la proprietà associativa, esiste l'elemento neutro (l'applicazione lineare identica) ma non vale la proprietà commutativa. Da nozioni elementari di algebra segue che una funzione è invertibile se e solo se è una biiezione. Supponiamo che $f \in End(V)$ sia una biiezione, esiste, allora la funzione inversa f^{-1} di f definita come l'unica funzione per cui: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$, con i identità di V. Si ha:

Teorema 17.12 *Se f è un endomorfismo di V invertibile, anche f^{-1} è un endomorfismo di V.*

Dimostrazione: È un esercizio lasciato al Lettore.

Dal fatto che la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari sia il prodotto delle matrici associate alle due applicazioni (scegliendo opportunamente le basi) segue che all'applicazione lineare inversa di f sia associata la matrice inversa a quella associata ad f (rispetto alla stessa scelta di basi in V). Si noti l'assoluto accordo tra risultati noti sull'esistenza dell'inversa di una matrice quadrata (rango massimo) e sull'esistenza dell'inverso di un endomorfismo (biiettività quindi rango massimo della matrice associata).

Esempio 17.24 Sia $R[\theta] : V_2 \longrightarrow V_2$ la **rotazione**, in senso antiorario di angolo θ di ogni vettore $\mathbf{x}$ del piano V_2. Dal cambiamento di basi ortonormali è noto che la matrice di tale applicazione lineare, rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$, è:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{17.16}$$

mentre le equazioni di $R[\theta]$, che applicata ad un vettore $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ fornisce il vettore $R[\theta](\mathbf{x}) = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$, sono:

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y \end{cases} \tag{17.17}$$

Si lascia per esercizio la verifica del fatto che la composizione delle rotazioni: $R[\alpha]$ e $R[\beta]$, rispettivamente di angoli α e β è la rotazione $R[\alpha+\beta]$. Analogamente l'inversa della rotazione $R[\theta]$ è la rotazione $R[-\theta]$.

Capitolo 18

Diagonalizzazione

Questo capitolo è di importanza fondamentale per le sue svariate applicazioni in matematica e in fisica. Si vuole determinare, nel caso di un endomorfismo, tra tutte le infinite matrici ad esso associate almeno una matrice particolarmente semplice: una matrice diagonale. In altri termini si vuole determinare una base opportuna dello spazio vettoriale V, su cui l'endomorfismo è definito, rispetto alla quale la matrice ad esso associata sia diagonale. Purtroppo questo scopo non può essere sempre raggiunto, come inizieremo a mettere in evidenza con alcune definizioni ed esempi.

18.1 Autovalori, Autovettori, Autospazi

Iniziamo con l'introdurre una definizione fondamentale per lo scopo che ci siamo proposti.

Definizione 18.1 *Sia $f : V \longrightarrow V$ un vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ è il vettore nullo di V) si dice* **autovettore** *di f se esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}, \tag{18.1}$$

λ si dice **autovalore relativo all'autovettore** $\mathbf{x}$.

Osservazione 18.1 È evidente dalla definizione di autovettore la necessità di scegliere $\mathbf{x}$ diverso dal vettore nullo di V, infatti $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Anteponiamo due facili proprietà agli esempi, per poter meglio capire la definizione appena enunciata.

Teorema 18.1 *Sia $\mathbf{x}$ un autovettore dell'endomorfismo f di V, allora l'autovalore λ ad esso relativo è unico.*

Dimostrazione: Per assurdo siano $\lambda \neq \lambda'$ due autovalori di $\mathbf{x}$, allora: $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} = \lambda'\mathbf{x}$ da cui $(\lambda - \lambda')\mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi segue la tesi . ▮

Teorema 18.2 *Sia λ un autovalore di un endomorfismo f di V, tutti gli autovettori relativi a λ insieme con il vettore nullo di V costituiscono un sottospazio vettoriale di V, indicato esplicitamente come:*

$$V_\lambda = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\} \tag{18.2}$$

detto **autospazio relativo all'autovalore** λ.

Dimostrazione: È un facile esercizio che segue dalla Definizione 10.1 di sottospazio vettoriale . ▮

Esempio 18.1 L'identità $i : V \longrightarrow V$, definita in 17.1, ammette solo l'autovalore 1, l'autospazio V_1 coincide con V. Si osservi che la matrice ad essa associata è la matrice unità, che è una matrice diagonale avente 1 (l'autovalore) sulla diagonale principale.

Esempio 18.2 L'applicazione lineare nulla, definita nell'Esempio 17.2, ammette solo l'autovalore 0, l'unico autospazio V_0 coincide con V. Anche in questo caso si osservi che la matrice nulla ad essa associata è diagonale e sulla diagonale principale ha l'autovalore 0.

Esempio 18.3 Sia f un qualsiasi endomorfismo non iniettivo. Dal Teorema 24.1 si ha che $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$, per definizione di nucleo, allora, f ammette l'autovalore 0 e l'autospazio ad esso relativo V_0 coincide con $\ker f$. Viceversa, se f è iniettivo, allora $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, quindi non esiste l'autovalore 0 per f.

Esempio 18.4 Sia $f : V_3 \longrightarrow V_3$ l'applicazione lineare così definita: $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ con $\mathbf{u}$ versore fissato nello spazio dei vettori ordinari V_3. Si vede che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ solo se $\mathbf{x}$ è un vettore perpendicolare a $\mathbf{u}$. Quindi esiste l'autovalore 0 e l'autospazio ad esso relativo è $V_0 = \ker f$ che coincide con il piano vettoriale ortogonale ad $\mathbf{u}$. D'altra parte, l'unica altra possibilità per avere $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ è $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, che si ottiene solo se $\mathbf{x}$ è parallelo ad $\mathbf{u}$, pertanto esiste anche l'autovalore 1 e l'autospazio $V_1 = \mathcal{L}(\mathbf{u})$. Si osservi che:

$$V_0 \oplus V_1 = V_3.$$

Esempio 18.5 A titolo di esempio, procediamo con il calcolo degli eventuali autovalori della rotazione, in senso antiorario, di angolo θ nel piano, (cfr. Esempio 17.24) vale a dire alla trasformazione lineare $R[\theta] : V_2 \longrightarrow V_2$ le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y. \end{cases}$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di $R[\theta]$ ed $\mathbf{x}$ un autovettore ad esso relativo, allora $R[\theta](\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ ossia:

$$\begin{cases} \cos\theta x - \sin\theta y = \lambda x \\ \sin\theta x + \cos\theta y = \lambda y. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare omogeneo precedente si ottiene che esistono soluzioni non nulle se e solo se il rango della matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}$$

è 1, ossia se il determinante di tale matrice è nullo, in altri termini, se e solo se:

$$\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0$$

ossia se e solo se $\cos\theta = \pm 1$, da cui segue che solo le rotazioni di angolo 0 e π ammettono autovalori, ma tali rotazioni coincidono con l'identità, già studiata in un esempio precdente, e con la rotazione di angolo π di equazioni

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

che ammette solo l'autovalore -1 perchè definita da $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}, \ \forall \mathbf{x} \in V_2$.

Prima di procedere al calcolo degli autovalori e degli autovettori nel caso generale, procedimento che generalizza l'esempio appena esposto, citiamo una conseguenza importante delle definizioni date.

Teorema 18.3 *La somma degli autospazi è diretta. In altri termini, indicati con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di f, allora:*

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Si osservi che il teorema appena enunciato afferma solo che $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq V$, lo studio dell'uguaglianza tra questi due insiemi sarà oggetto di un prossimo paragrafo.

Dimostrazione: Proponiamo solo la dimostrazione nel caso di due autospazi, il caso generale è conseguenza del lemma trascritto di seguito la cui dimostrazione è rimandata al Capitolo 19.
Dimostrare che $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ equivale a provare che $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$, (cfr. Teorema 10.4), infatti, se per assurdo esiste $\mathbf{x} \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, allora $f(\mathbf{x}) = \lambda_1\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}$ da cui segue $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi $\lambda_1 = \lambda_2$.

Lemma 18.1 *Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ autovalori distinti di un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ e siano $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_k}$ gli autospazi ad essi corrispondenti. Scelti in modo arbitrario gli autovettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, uno per ciascuno del corrispondente autospazio, allora l'insieme $\mathcal{I} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ è libero.*

Infatti dal Lemma appena citato segue che la somma degli autospazi è necessariamente diretta. Preso $\mathbf{x}$ in $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$, supponiamo, per assurdo, che ammetta due decomposizioni diverse del tipo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \ldots + \mathbf{y}_k$$

dove $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in V_{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, k,$ allora si ha che:

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2) + \ldots + (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k) = \mathbf{0}$$

in evidente contrasto con l'enunciato del Lemma . ∎

18.2 Determinazione degli autovalori e degli autospazi

Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V, supponiamo che $\dim V = n$ e che $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sia una sua base. Indicate con $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ e con $X \in \mathbb{R}^{n,1}$ la matrice delle componenti di un vettore $\mathbf{x}$ di V rispetto alla base $\mathcal{B}$, la formula (18.1) si traduce, in componenti, nella relazione:

$$AX = \lambda X$$

vale a dire in:

$$(A - \lambda I)X = 0 \tag{18.3}$$

dove $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ indica la matrice unità e $0 \in \mathbb{R}^{n,1}$ la matrice nulla. Dalla teoria dei sistemi lineari omogenei descritta nel Paragrafo 1.2.1, segue che il sistema lineare omogeneo (18.3) ammette soluzioni non nulle se e solo se $\operatorname{rank}(A - \lambda I) < n$, ossia se e solo se:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{18.4}$$

Si perviene allo stesso risultato, riscrivendo (18.1) come:

$$(f - \lambda i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

(facendo uso delle definizioni di somma e di prodotto per scalari di endomorfismi introdotte nel Paragrafo 17.5), dove i indica l'applicazione identica di V, pertanto gli autovettori di f, relativi all'autovalore λ, coincidono con gli elementi di $\ker(f - \lambda i)$.

Procediamo alla studio dettagliato dell'equazione (18.4) che prende il nome di **polinomio caratteristico** della matrice A o dell'endomorfismo f. Iniziamo con la sua determinazione nel caso particolare delle matrici quadrate di ordine 2, ossia nel caso di endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione 2. Si osservi che, affinchè queste affermazioni abbiano senso, ci si aspetta di dimostrare che tutte le matrici associate allo stesso endomorfismo (le matrici simili) hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Esempio 18.6 Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2},$$

calcoliamo il suo polinomio caratteristico ponendo:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

da cui segue:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A + \det A = 0.$$

Nel caso di una matrice quadrata di ordine n, si ottiene che:

$$\det(A-\lambda I) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{tr}\,A\lambda^{n-1} + \ldots + \det A = O \tag{18.5}$$

infatti:

1. trattandosi del calcolo del determinante di $A-\lambda I$, matrice quadrata di ordine n, ciascun termine di tale determinante é il prodotto di n termini appartenenti a righe e colonne diverse (cfr. Capitolo 3), quindi il poninomio in λ che si ottiene avrá necessariamente grado n.

2. Il termine di grado massimo si ha solo dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale: $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)$, quindi il coefficiente di tale termine deve essere $(-1)^n$.

3. Anche il termine di grado $n-1$ si ottiene solo dal prodotto degli elementi della diagonale principale (provare, per esempio, a fare il calcolo esplicito nel caso particolare delle matrici quadrate di ordine 3), é abbastanza facile notare che il suo coefficiente deve essere $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}\,A$.

4. Il termine noto si ottiene ponendo $\lambda = 0$, quindi deve essere $\det A$. Allora l'equazione (18.4) ammette la soluzione 0 se e solo se $\det A = 0$, in assoluto accordo con ció che era giá stato osservato: esiste l'autovalore nullo se e solo se $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$.

5. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra in cui si afferma che ogni polinomio di grado n, a coefficienti complessi, ammette n radici, segue che ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ammette **al piú** n autovalori.

6. Se un'equazione, a coefficienti reali, ammette una radice complessa, allora ammette anche una seconda rdice complessa che é la coniugata della precedente (si pensi alla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado), pertanto una matrice reale quadrata di ordine pari puó non ammettere autovalori (non si dimentichi che si sta solo trattando il caso degli spazi vettoriali reali), mentre una matrice reale quadrata di ordine dispari ammette almeno un autovalore.

Esempio 18.7 Se si considera ad esempio la matrice quadrata di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha che il suo polinomio caratteristico é

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 4$$

e quindi non ha radici reali.

Esempio 18.8 Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo che, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, è associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

vogliamo calcolare gli autovalori e gli autospazi di f (o, il che è lo stesso, di A).
Si inizia con il calcolo del determinante:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

e si ha:

$$\det(A-\lambda I) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+2)^2 = 0$$

da cui si ottengono tre autovalori: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Ci si aspetta, quindi, di ottenere tre autospazi. Si procede al loro calcolo uno alla volta.

V_{λ_1} coincide con $\ker f$, che si ottiene riducendo per righe la matrice A. Si lasciano i dettagli per esercizio, si ottiene $\mathrm{rank}(A) = 3$, quindi $\dim \ker f = \dim V_{\lambda_1} = 1$ e $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,0,-1,1))$.

Per $\lambda_2 = 1$ si ottiene:

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

con $\mathrm{rank}(A - I) = 3$ e quindi risolvendo il sistema lineare omogeneo corrispondente all'equazione matriciale $(A - I)X = 0$ si ottiene

$$V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,2,3,-2)).$$

Nel caso di $\lambda_3 = -2$ si ha:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\mathrm{rank}(A + 2I) = 2$ e quindi:

$$V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,1,0,0)).$$

Dimostriamo ora il teorema già annunciato, vale a dire: matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, infatti si ha:

Teorema 18.4 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimesione n. Il polinomio caratteristico non dipende dalla base di V scelta per la sua determinazione.*

Dimostrazione: Si ottiene la tesi provando che:

$$\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I)$$

con A matrice quadrata di ordine n, P matrice invertibile di ordine n, I matrice unità di ordine n. Usando le proprietà del prodotto di matrici, la formula di Binet e il calcolo del determinante dell'inversa di una matrice si ha:

$$\det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I)\ . \ \blacksquare$$

Osservazione 18.2 Si osservi che esistono matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma che non sono simili, per esempio le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I dettagli della spiegazione sono lasciati al Lettore.

Il teorema che segue stabilisce un'importante relazione tra la dimensione di un autospazio e la molteplicità del proprio autovalore nel polinomio caratteristico. A tale scopo ricordiamo che una radice α di un polinomio $p(\lambda)$ (il cui coefficiente del termine di grado massimo è 1) si dice avere **molteplicità** h se il polinomio $(\lambda - \alpha)^h$ divide $p(\lambda)$ ma $(\lambda - \alpha)^{h+1}$ non divide $p(\lambda)$.

Teorema 18.5 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, sia α un suo autovalore di molteplicità m_α e sia V_α l'autospazio relativo ad α, allora:*

$$1 \leq \dim V_\alpha \leq m_\alpha.$$

Dimostrazione: Se α é un autovalore, allora $\dim V_\alpha \geq 1$. Per dimostrare l'altra parte della tesi si supponga che $\dim V_\alpha = k \leq n = \dim V$. Se $k = n$, la tesi é ovvia perché $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$. Supponiamo, quindi, $k < n$. Sia $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ una base di V_α. Completiamo tale base fino ad ottenere la base di V (cfr. Teorema 11.9): $\mathcal{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n)$. La matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ assume la forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

il cui polinomio carateristico é:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - \alpha)^k Q(\lambda)$$

dove $Q(\lambda)$ é un polinomio in λ di grado $n - k$, ció significa che la molteplicitá di α é almeno k. ∎

Esempio 18.9 Si osservi che nell'Esempio 18.8 si sono ottenuti 3 autovalori distinti: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $m_{\lambda_1} = 1$, $\lambda_2 = 1$ con molteplicità $m_{\lambda_2} = 1$ e $\lambda_3 = -2$ di molteplicità $m_{\lambda_3} = 2$. I tre autospazi V_{λ_1}, V_{λ_2}, V_{λ_3} avevano dimensione $1, 1, 2$ rispettivamente e:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3} = \mathbb{R}^4.$$

Esercizio 18.1 Si calcolino gli autovalori e gli autospazi della matrice quadrata:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico della matrice A é dato da:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Si ottengono quindi come autovalori di A: $\lambda_1 = 2$ con molteplicitá $m_{\lambda_1} = 1$ e $\lambda_2 = 1$ con molteplicitá $m_{\lambda_2} = 2$. Gli autospazi relativi ai due autovalori sono:

$$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1, 0, 0)),$$
$$V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0, 1, 0)).$$

In questo caso si ha quindi che $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.

18.3 Applicazioni lineari semplici e matrici diagonalizzabili

Iniziamo con due importanti definizioni, palesemente equivalenti.

Definizione 18.2 *Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ di uno spazio vettoriale reale V si dice* **semplice** *se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è diagonale.*

Definizione 18.3 *Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice* **diagonalizzabile** *se esiste una matrice invertibile P di ordine n tale che:*

$$P^{-1}AP = D$$

con D matrice diagonale di ordine n.

Nei paragrafi precedenti abbiamo incontrato alcuni esempi di endomorfismi semplici, quali ad esempio, l'applicazione identità, l'applicazione nulla. In questo paragrafo cercheremo di precisare quando un endomorfismo è semplice e come si procede, in pratica, alla diagonalizzazione di una matrice quadrata, dopo aver controllato che ciò sia possibile.

Il primo teorema (la cui dimostrazione è evidente, quindi è lasciata per esercizio) provvede un metodo pratico, utile per riconoscere se un endomorfismo è semplice.

Teorema 18.6 *$f: V \longrightarrow V$ è semplice se e solo se esiste una base di autovettori di V.*

Possiamo perciò enunciare quelli che usualmente vengono indicati come i **criteri di diagonalizzazione**.

Teorema 18.7 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
1) f é semplice.
2) $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di f e $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ i relativi autospazi.
3) $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_k}$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di f e $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ i relativi autospazi.
4) Ogni radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di f é reale e per ogni radice (cioé autovalore) λ_i di molteplicitá m_{λ_i} si ha che la dimensione dell'autospazio V_{λ_i} coincide con la molteplicitá m_{λ_i}.

Dimostrazione: Per provare l'equivalenza delle quattro affermazioni si proveranno le seguenti implicazioni:

$$1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1).$$

Per provare l'implicazione $1) \Rightarrow 4)$ supponiamo quindi che f sia semplice, cioé che esista una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia diagonale, con gli autovalori di f come elementi della diagonale principale. Se indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di f e con $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_k}$ le relative molteplicitá, si ha che il polinomio caratteristico di f é dato da:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}},$$

da cui segue che ogni radice del polinomio caratteristico é reale. Inoltre, per ogni autovalore λ_i si ha:

$$\dim V_{\lambda_i} = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_i I) = m_{\lambda_i}.$$

Per provare l'implicazione $4) \Rightarrow 3)$ si puó osservare che per ipotesi ogni radice del polinomio caratteristico é reale e quindi la somma delle moltiplicitá delle radici distinte, cioé degli autovalori distinti, coincide con il grado del polinomio caratteristico.
Per l'implicazione $3) \Rightarrow 2)$ sappiamo giá che la somma di tutti gli autospazi relativi agli autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ é diretta. Per 3) tale somma diretta ha dimensione n e quindi coincide con V.
Per provare l'ultima implicazione $2) \Rightarrow 1)$ si puó osservare che, se per ogni autospazio V_{λ_i}, $i = 1, \ldots, k$ si considera una base $\mathcal{B}_i$, allora l'unione:

$$\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$$

é una base di V poiché la somma degli autospazi é diretta ed è formata da autovettori di f. ▮

Osservazione 18.3 La decomposizione 2) é anche nota come **decomposizione spettrale** di V.

In base ai precedenti criteri si ha quindi che l'endomorfismo dell'Esempio 18.8 è semplice, mentre l'endomorfismo dell'Esempio 18.1 non è semplice, in quanto per l'autovalore $\lambda_2 = 1$ si ha che $\dim V_{\lambda_2} < m_{\lambda_2}$.
Come conseguenza immediata del Teorem 18.6 si ha il seguente

Teorema 18.8 *Se f é un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n con n autovalori distinti, allora f é semplice.*

La dimostrazione é lasciata come esercizio al Lettore.

18.4 Il Teorema Spettrale e gli Endomorfismi Autoaggiunti

Nel caso particolare delle matrici simmetriche si puó dimostrare il fondamentale:

Teorema 18.9 Il Teorema Spettrale.

1. *Sia A una matrice simmetrica, allora A è sempre diagonalizzabile, esistono quindi una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che:*
$$D = P^{-1}AP.$$

2. *Sia A una matrice simmetrica, è sempre possibile individuare una matrice* **ortogonale** *Q tale che:*
$$D = Q^{-1}AQ = {}^{t}QAQ.$$

Per dimostrare il teorema precedente conviene studiare le proprietà delle applicazioni lineari la cui matrice associata è simmetrica. Purtroppo le dimostrazioni complete di alcune affermazioni sono immediate solo nel caso degli spazi vettoriali definiti sul campo complesso $\mathbb{C}$ e non sono dimostrabili in campo reale, pertanto, in questa sede, si segnaleranno i passaggi delle dimostrazioni che non siamo ancora in grado di dimostrare e si rimada al corso di Geometria e Algebra Lineare II per le dimostrazioni complete.

Definizione 18.4 *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo e f un endomorfismo di V. f si dice* **autoaggiunto** *se:*

$$f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Esempio 18.10 Sia $V = \mathbb{R}^2$ con la struttura standard di spazio euclideo, l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito da $f(x, y) = (y, x + 2y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ è autoaggiunto. Infatti:

$$f(x, y) \cdot (x', y') = (y, x + 2y) \cdot (x', y') = yx' + xy' + 2yy';$$

$$(x, y) \cdot f(x', y') = (x, y) \cdot (y', x' + 2y') = xy' + yx' + 2yy'.$$

Teorema 18.10 *Se V è uno spazio vettoriale euclideo ed f è un endomorfismo autoaggiunto, allora tutte le soluzioni del polinomio caratteristico di f sono reali.*

Dimostrazione: Useremo, nel corso della dimostrazione, alcune nozioni elementari sui numeri complessi, per la loro facilitá non richiedono particolare dimestichezza con l'argomento. Sia $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ un autovalore di A e $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ un suo autovettore. (V é pensato come spazio vettoriale definito su $\mathbb{C}$). I vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sono vettori reali di V. Sia f l'endomorfismo autoaggiunto associato ad A, allora $f(\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{z}$. Sostituendo le espressioni precedenti si ha: $f(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = (a + ib)(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$. Sviluppando i calcoli e uguagliando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene: $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x} - b\mathbf{y}$, $f(\mathbf{y}) = b\mathbf{x} + a\mathbf{y}$. Essendo f autoaggiunto: $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{y})$, sostituendo le espressioni precedenti si ottiene: $b(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) = 0$ da cui segue $b = 0$ ossia la tesi . ▮

Teorema 18.11 *Se λ_1 e λ_2 sono due autovalori distinti di un endomorfismo autoaggiunto, allora i relativi autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} sono ortogonali.*

Dimostrazione: $\forall \mathbf{x} \in V_{\lambda_1}$ e $\forall \mathbf{y} \in V_{\lambda_2}$ si ha:

$$f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (\lambda_1 \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda_2 \mathbf{y}) = \lambda_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \lambda_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Segue che $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0$, ma $\lambda_1 \neq \lambda_2$, perciò $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. ▮

Teorema 18.12 *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione n e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. f è autoaggiunto se e solo se la matrice $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{R}^{n,n}$ è simmetrica.*

Dimostrazione: Indicati con: A la matrice dell'endomorfismo, X, Y, AX, AY le matrici colonne delle componenti, rispettivamente, dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{y})$ nella base $\mathscr{B}$, l'espressione:

$$\mathbf{x} \cdot f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$$

si può scrivere nella seguente forma matriciale equivalente:

$${}^tX\,(AY) = {}^t(AX)Y$$

oppure:

$${}^tXAY = {}^tX\,{}^tAY,$$

la quale, essendo valida per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, fornisce $A = {}^tA$. Quindi la matrice A è simmetrica. Il viceversa del teorema si prova procedendo "a rovescio" nel calcolo. ∎

Teorema 18.13 *Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è una matrice simmetrica, tutte le radici della sua equazione caratteristica sono reali.*

Dimostrazione: È immediata conseguenza del Teorema 18.10.

Analogamente segue il:

Teorema 18.14 *Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è una matrice simmetrica reale, tutte le radici dell'equazione caratteristica di A sono reali. In particolare A ha n autovalori reali, se contati ciascuno con la relativa molteplicità.*

Prima di enunciare il teorema che permette di compiere un altro passo essenziale nella diagonalizzazione delle matrici simmetriche dobbiamo inserire la seguente:

Definizione 18.5 *Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo e $\mathcal{W}$ un sottospazio vettoriale di V. $\mathcal{W}$ si dice* **invariante** *per f se $f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$.*

Esempio 18.11 Ogni autospazio é invariante per l'endomorfismo a cui é riferito. Si lasciano i dettagli di questa dimostrazione per esercizio.

Esercizio 18.2 Sia $f : V_3 \longrightarrow V_3$ l'endomorfismo, la cui matrice associata, rispetto alla base ortonormale positiva $\mathscr{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ di V_3, é:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si descriva il significato geometrico di f e si dimostri che il piano $\mathcal{L}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ é un sottospazio invariante di f.

Esercizio 18.3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tale che $f^3 = f \circ f \circ f = 0$ e tale che $f^2 \neq 0$, con 0 applicazione nulla di V. Si dimostri che $\ker(f^2)$ (che contiene $\ker(f)$) é un sottospazio invariante per f. (Si osservi che $f^3(\mathbf{x}) = f(f^2(\mathbf{x}))$, $\forall \mathbf{x} \in V$).

Teorema 18.15 *Se f è un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale euclideo V e $\mathcal{W}$ è un sottospazio vettoriale di V invariante rispetto a f, allora anche il complemento ortogonale $\mathcal{W}^\perp$ è invariante rispetto a f.*

Dimostrazione: Per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{W}^\perp$ e per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$ si ha: $f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{y}) = 0$, poichè $f(\mathbf{y}) \in \mathcal{W}^\perp$ per ipotesi. Quindi $f(\mathbf{x})$ è ortogonale a tutti gli elementi di $\mathcal{W}$ e perciò appartiene a $\mathcal{W}^\perp$. ∎

Teorema 18.16 *Sia f un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale euclideo V di dimensione n. Esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di f.*

Ciò significa che, praticamente, si procede in questo modo:

1. il teorema afferma che: se f autoaggiunto allora è semplice quindi:

   $$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}, \; k \leq n,$$

   dove $\lambda_i, \; i = 1, \ldots, k$, sono gli autovalori distinti di f.
2. Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ allora $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$, (Teorema 18.11).
3. Si trova una base per ciascun autospazio, la si normalizza con il metodo di Gram–Schmidt.
4. L'unione delle basi così ottenute è una base ortonormale formata da autovettori di f.

Dimostrazione: Sia $\mathcal{W} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}, \; k \leq n,$ dove $\lambda_i, \; i = 1, \ldots, k$, sono gli autovalori distinti di f. Per definizione $\mathcal{W} \subseteq V$. Si vuole provare che $\mathcal{W} = V$. Se, per assurdo, $\mathcal{W} \neq V$, allora $V = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$ con $\mathcal{W}^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$. Si ha: $f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$ perchè somma diretta di autospazi e $f(\mathcal{W}^{\perp}) \subseteq \mathcal{W}^{\perp}$ per il Teorema 18.15. La restrizione f' di f a $\mathcal{W}^{\perp}$ $f' : \mathcal{W}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{W}^{\perp}$, così definita: $f'(\mathbf{w}) = f(\mathbf{w}), \; \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}^{\perp}$, è ancora un endomorfismo autoaggiunto (essere autoaggiunto è una proprietà di tipo universale). f' ammette almeno un autovalore (essendo questi tutti reali), ciò implica l'esistenza di un autovettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ di f' in $\mathcal{W}^{\perp}$. Però $\mathbf{x}$ è anche autovettore di f e come tale deve appartenere a $\mathcal{W}$, da cui l'assurdo. Allora $\mathcal{W} = V$. ∎

Come immediata conseguenza dei Teoremi precedenti si ha la dimostrazione del teorema spettrale.

Esercizio 18.4 Sia f èndomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{18.6}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che f è autoaggiunto e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f. Inoltre, diagonalizzare la matrice A mediante una matrice ortogonale.

Soluzione: f è autoaggiunto perchè la matrice di f è reale simmetrica e la base canonica è ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.
Per trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi A si devono determinare gli autospazi di f. Si ottiene:

autovalori: $\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 2, \; \lambda_3 = 3;$

autospazi: $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1)), \; V_{\lambda_2} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)), \; V_{\lambda_3} = \mathcal{L}(\mathbf{v}_3 = (1, 1, -1)).$

La base ortonormale richiesta si ottiene, semplicemente, considerando i versori di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (perchè?), quindi la matrice ortogonale che diagonalizza A è:

$$P = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

da cui:

$$^{t}PAP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 18.5 Sia V uno spazio vettoriale euclideo e $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ due suoi sottospazi supplementari, ossia $V = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$. Si considerino i due endomorfismi f_1 e f_2 di V, proiezioni su $\mathcal{W}_1$ e su $\mathcal{W}_2$ rispettivamente, vale a dire: se $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, per ogni $\mathbf{x}$ in V $(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{W}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{W}_2)$ allora $f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$ e $f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2$ (cfr. 17.10).
Dire se e quando f_1 e f_2 sono autoaggiunti.

Capitolo 19

Per saperne di piú sulle applicazioni lineari

19.1 Per saperne di piú sugli autospazi

Esercizio 19.1 Si dimostri il Lemma 18.1. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ autovalori distinti di un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ e siano $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_k}$ gli autospazi ad essi corrispondenti. Scelti in modo arbitrario gli autovettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, uno per ciascuno del corrispondente autospazio, allora l'insieme $\mathcal{I} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ è libero.

Dimostrazione: Si procede per induzione sul numero k di sottospazi. Il caso $k = 1$ é ovvio.
Supponiamo, per ipotesi induttiva che i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ siano l.i. dove ogni $\mathbf{x}_i$ é un autovettore di V_{λ_i}. Si tratta di dimostrare che l'insieme: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k)$ é libero, con $\mathbf{x}_k$ autovettore di V_{λ_k}.
Per assurdo si suppone che ció non avvenga, vale a dire che:

$$\mathbf{x}_k = \mu_1\mathbf{x}_1 + \mu_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}, \tag{19.1}$$

(si precisi bene perché l'affermazione precedente sia equivalente a supporre che i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ siano l.d.). Si applichi l'endomorfismo f ad ambo i membri di (19.1), si sfrutti la sua linearitá e il fatto che ogni vettore $\mathbf{x}_i$ é un autovettore, si ha:

$$\lambda_k\mathbf{x}_k = \mu_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \mu_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} \tag{19.2}$$

invece, moltiplicando ambo i membri di (19.1) per λ_k si ha:

$$\lambda_k\mathbf{x}_k = \mu_1\lambda_k\mathbf{x}_1 + \mu_2\lambda_k\mathbf{x}_2 + \ldots + \mu_{k-1}\lambda_k\mathbf{x}_{k-1} \tag{19.3}$$

uguagliando (19.2) e (19.3) segue:

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{x}_2 + \ldots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}$$

i vettori coinvolti nella relazione precedente sono l.i. per ipotesi induttiva, quindi tutti i coefficienti sono nulli, ma, essendo gli autovalori distinti si ottiene: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{k-1} = 0$, risultato che sotituito nella formula 19.1 comporta $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, assurdo, trattandosi di un autovettore . ▮

19.2 Forme lineari – Dualitá

In questo paragrafo si intendono studiare le particolari proprietá delle applicazioni lineari $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, ricordando che il campo dei numeri reali é un esempio di spazio vettoriale reale di dimensione 1.

Definizione 19.1 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, cioè un elemento di $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, si dice* **forma lineare** *o* **funzionale lineare** *su V. Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ si dice* **spazio vettoriale duale** *di V e lo si indica con V^*.*

Esempio 19.1 Una forma lineare f su $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come:

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \ a_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, n,$$

per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Il nucleo di f è dato dai vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ per i quali $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ e costituisce perciò un iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Alla dimensione dello spazio vettoriale V^* si perviene con il seguente:

Teorema 19.1 *Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, allora:*

$$\dim V = \dim V^*.$$

Dimostrazione: Sia $\dim V = n$ e $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Per il Teorema 17.2, esistono e sono uniche le applicazioni lineari $f_i : V \longrightarrow \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, n$, così definite:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{v}_1) = 1 \\ f_1(\mathbf{v}_2) = 0 \\ \vdots \\ f_1(\mathbf{v}_n) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(\mathbf{v}_1) = 0 \\ f_2(\mathbf{v}_2) = 1 \\ \vdots \\ f_2(\mathbf{v}_n) = 0, \dots\dots, \end{cases} \quad \begin{cases} f_n(\mathbf{v}_1) = 0 \\ f_n(\mathbf{v}_2) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{v}_n) = 1, \end{cases}$$

che si possono anche scrivere nella forma:

$$f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker ($\delta_{ij} = 0, i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$). Di conseguenza $\forall \mathbf{x} \in V, \ \mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ risulta:

$$f_i(\mathbf{x}) = x_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Ciò premesso, occorre provare che $\mathscr{B}^* = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ è una base di V^*, ossia:

i) $\mathscr{B}^*$ è un sistema di generatori. Infatti, per ogni forma $f \in V^*$, posto:

$$f(\mathbf{v}_1) = a_1, \ f(\mathbf{v}_2) = a_2, \dots, f(\mathbf{v}_n) = a_n$$

e per ogni vettore $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in V$, si ha:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1 f(\mathbf{v}_1) + x_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{v}_n) = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n \\ &= a_1 f_1(\mathbf{x}) + a_2 f_2(\mathbf{x}) + \dots + a_n f_n(\mathbf{x}) = (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Allora:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n.$$

ii) $\mathscr{B}^*$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti. A tale scopo basta osservare che la matrice associata ad f è $M(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ perciò $f = \mathbf{0}_{V^*}$ (forma nulla di V) se e solo se $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. ∎

Definizione 19.2 *La base $\mathscr{B}^*$ dello spazio V^*, costruita nel modo su esposto, è detta* **base duale** *della base $\mathscr{B}$ di V.*

Esempio 19.2 Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineare, perciò: $f((x,y)) = f(x,y) = ax + by, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\mathscr{B} = ((1,0),(0,1))$ è la base standard di $\mathbb{R}^2$, la sua base duale $\mathscr{B}^* = (f_1, f_2)$ è data dalle forme che operano nel modo seguente:

$f_1(x,y) = x f_1(1,0) + y f_1(0,1) = x,$

$f_2(x,y) = x f_2(1,0) + y f_2(0,1) = y,$

da cui si ottiene: $f(x,y) = a f_1(x,y) + b f_2(x,y)$, ossia: $f = a f_1 + b f_2$.

N.B. Si dovrebbe scrivere $f(\mathbf{x}) = f((x, y))$ con $\mathbf{x} = (x, y)$; per semplicitá si omettono (anche in seguito) le doppie parentesi.

Esempio 19.3 Si consideri V_3, spazio dei vettori ordinari, riferito alla base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Fissato un vettore $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, la funzione:

$$\mathbf{a}\cdot : V_3 \longrightarrow \mathbb{R},$$

definita da $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in V_3$, ("$\cdot$" indica il prodotto scalare tra vettori) è una forma lineare. In particolare la base duale di $\mathcal{B}$ è data da: $\mathcal{B}^* = (\mathbf{i}\cdot, \mathbf{j}\cdot, \mathbf{k}\cdot)$. Si tratta delle forme che associano ad ogni vettore le rispettive componenti.

19.2.1 Cambiamento di base in V^*

Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_i)$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_i), i = 1, \ldots, n$, due basi di V e siano $\mathcal{B}^* = (f_i)$ e $\mathcal{B}'^* = (f'_i), i = 1, \ldots, n$, le basi duali di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$, rispettivamente. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è $P = (a_{ij})$ e, quindi:

$$\mathbf{v}'_i = a_{1i}\mathbf{v}_1 + a_{2i}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{ni}\mathbf{v}_n,\ i = 1, \ldots, n;$$

mentre la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'^*$ a $\mathcal{B}^*$ è $Q = (b_{ij})$, ossia:

$$f_i = b_{1i}f'_1 + b_{2i}f'_2 + \ldots + b_{ni}f'_n,\ i = 1, \ldots, n.$$

(Sia P sia Q sono matrici invertibili, di ordine n, ad elementi in $\mathbb{R}$).
Da quanto precede si osserva che:

$$f_i(\mathbf{v}'_j) = (b_{1i}f'_i + b_{2i}f'_2 + \ldots + b_{ni}f'_n)(\mathbf{v}'_j) = b_{ji};$$

$$f_i(\mathbf{v}'_j) = f_i(a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{mj}\mathbf{v}_n) = a_{ij};$$

vale a dire:

$$Q = {}^tP;$$

in altri termini, la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'^*$ a $\mathcal{B}^*$ è la trasposta della matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Esercizio 19.2 In $\mathbb{R}^2$, riferito alla base canonica $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1))$ ($\mathcal{B}^* = (f_1, f_2)$ base duale di $\mathcal{B}$), trovare la base $\mathcal{B}'^* = (f'_1, f'_2)$ duale della base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1 = (-1, 2), \mathbf{e}'_2 = (1, -1))$.

R. In base al risultato precedentemente esposto, la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'^*$ a $\mathcal{B}^*$ è $Q = {}^tP$, con

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si perviene allo stesso risultato mediante il calcolo esplicito che si può impostare in questo modo. Si ponga:

$$f'_1(x, y) = a_1x + a_2y, \quad f'_2(x, y) = b_1x + b_2y$$

e si determinino i coefficienti a_1, a_2, b_1, b_2 in modo che $f'_i(\mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}$. Risolvendo i sistemi lineari che si deducono si ha:

$$\begin{aligned} f'_1(x, y) &= x + y = (f_1 + f_2)(x, y) \\ f'_2(x, y) &= 2x + y = (2f_1 + f_2)(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

La matrice del cambiamento di base (ottenuta, per definizione, ponendo in colonna le componenti delle forme su ottenute) è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = {}^tP^{-1}.$$

Osservazione 19.1 A completamento dell'esercizio, si riassumono, in forma matriciale, le relazioni che intercorrono tra le due basi di $\mathbb{R}^2$, le basi duali corrispondenti e le relative equazioni del cambiamento di base:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = {}^t(P^{-1}) \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}.$$

Esercizio 19.3 Determinare la base duale della base: $\mathcal{B} = ((1,0,-2),(0,1,-1),(2,1,2))$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

R. Sia $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3)$ la base duale di $\mathcal{B}$, allora: $f_1 = (1,0,2)$, $f_2 = (0,1,-1)$, $f_3 = (2,1,2)$; le componenti sono date rispetto alla base duale della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

19.2.2 Spazio biduale

Fissato un vettore $\mathbf{x} \in V$, al variare di $f \in V^*$, gli scalari $f(\mathbf{x})$ definiscono una funzione:

$$\widetilde{\mathbf{x}} : V^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \widetilde{\mathbf{x}}(f) = f(\mathbf{x}), \quad \forall f \in V^*.$$

Si può, pertanto, dare la seguente:

Definizione 19.3 *Per ogni spazio vettoriale V, il duale dello spazio V^* di dice* **spazio biduale** *e di indica con V^{**}. Esso rappresenta $\mathcal{L}(V^*, \mathbb{R})$.*

Osservazione 19.2 Per lo spazio V^{**} si ha:

$$\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}.$$

Teorema 19.2 *Per ogni vettore $\mathbf{x} \in V$, l'applicazione $\widetilde{\mathbf{x}}$ è lineare, cioè appartiene allo spazio $\mathcal{L}(V^*, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. È una immediata conseguenza della definizione.

Teorema 19.3 *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e V^{**} lo spazio biduale di V. L'applicazione $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ tale che $\varphi(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{x}}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, è un isomorfismo.*

Si osservi che, dalla definizione, tale isomorfismo non dipende dalla scelta di basi in V o in V^{**}, pertanto si tratta di un *isomorfismo canonico.*

Dimostrazione. Si prova che:

a) φ è lineare, ossia $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \varphi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}) + \beta\varphi(\mathbf{y})$. Infatti, $\forall f \in V^*$:

$$\varphi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(f) = (\widetilde{\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}})(f) = f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})$$
$$= \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) = \alpha\widetilde{\mathbf{x}}(f) + \beta\widetilde{\mathbf{y}}(f) = (\alpha\varphi(\mathbf{x}) + \beta\varphi(\mathbf{y}))(f).$$

b) $\ker f = \{\mathbf{o}\}$. Se $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{o}_{V^{**}}$, $\forall f \in V^*$, risulta : $\widetilde{\mathbf{x}}(f) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ allora $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.
Poichè $\dim V = \dim V^{**} = n$, per note proprietà, φ è un isomorfismo . ∎

Osservazione 19.3 Si considerino una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ di V e la sua base duale $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. I vettori così definiti:

$$\widetilde{\mathbf{e}_1} = \varphi(\mathbf{e}_1), \ \widetilde{\mathbf{e}_2} = \varphi(\mathbf{e}_2), \dots, \widetilde{\mathbf{e}_n} = \varphi(\mathbf{e}_n)$$

formano una base $\widetilde{\mathcal{B}}$ di V^{**}. Dal Teorema 5.4 e dal fatto che $\widetilde{\mathbf{e}_i}(f_j) = f_j(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$, $\widetilde{\mathcal{B}}$ è la base duale di $\mathcal{B}^*$. Allora ogni elemento $\widetilde{\mathbf{x}}$ di V^{**} si scompone, rispetto alla base $\widetilde{\mathcal{B}}$, come: $\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{x_1}\widetilde{\mathbf{e}_1} + \widetilde{x_2}\widetilde{\mathbf{e}_2} + \ldots + \widetilde{x_n}\widetilde{\mathbf{e}_n}$, dove le componenti $\widetilde{x_i}$ sono date da: $\widetilde{x_i} = \widetilde{\mathbf{x}}(f_i)$. D'altra parte: $\widetilde{\mathbf{x}}(f_i) = f_i(\mathbf{x}) = x_i$, quindi $\widetilde{x_i} = x_i$.
È così provato che le componenti di $\mathbf{x} \in V$, relative alla base $\mathcal{B}$, sono anche le componenti dell'immagine di $\mathbf{x}$ tramite l'isomorfismo canonico $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$, relativamente alla base $\widetilde{\mathcal{B}}$, biduale della base $\mathcal{B}$; perciò, anche in questo senso, lo spazio V^{**} si può identificare con V.

19.2.3 Isomorfismo canonico tra V e V^*, solo per gli spazi euclidei

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. In questo caso lo spazio duale V^* è canonicamente isomorfo a V. Si perviene a questo importante risultato in questo modo:

Teorema 19.4 *Fissato $\mathbf{x} \in V$, la funzione $\mathbf{x}\cdot : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\forall \mathbf{y} \in V$, ("$\cdot$"prodotto scalare su V) è una forma lineare.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\mathbf{x}\cdot(a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2) = a\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1 + b\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_2$, $\forall a, b, \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$. ▮

N.B. Si osservi che la proprietà precedente è falsa nel caso di uno spazio vettoriale Hermitiano. In questo caso, a chi è canonicamente isomorfo V^*?

Teorema 19.5 *Sia V uno spazio euclideo, la funzione*

$$i : V \longrightarrow V^*, \quad \textit{data da} \quad i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot,$$

è un isomorfismo. Viene così definito l'isomorfismo canonico tra i due spazi vettoriali.

Dimostrazione. Si dimostra facilmente che la funzione i è lineare. L'iniettività segue dal calcolo di $\ker i$, ossia:
$\ker i = \{\mathbf{x} \in V \mid i(\mathbf{x}) = \mathbf{o}_{V^*}\} = \{\mathbf{x} \in V / \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{y} \in V\} = \{\mathbf{o}\}$.

19.2.4 Trasposta di un'applicazione lineare

Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale V in uno spazio vettoriale W (entrambi costruiti su $\mathbb{R}$). Per ogni forma $f \in W^*$, la composizione $f \circ F$ è un'applicazione lineare da V in $\mathbb{R}$, ossia $f \circ F \in V^*$. Si può, allora, dare la seguente:

Definizione 19.4 *Data un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$, l'applicazione ${}^tF$ da W^* in V^* così definita:*

$${}^tF(f) = f \circ F, \quad \forall f \in W^*$$

si dice **trasposta** *dell'applicazione lineare F.*

Teorema 19.6 *L'applicazione ${}^tF$ è lineare.*

Dimostrazione. È conseguenza immediata della definizione.

Osservazione 19.4 La denominazione "trasposta"per l'applicazione ${}^tF$ deriva dal seguente teorema:

Teorema 19.7 *Siano $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare ed A la matrice di F rispetto alle basi $(\mathbf{v}_i)$ di V e $(\mathbf{v}'_j)$ di W. Allora ${}^tA$ è la matrice di ${}^tF$ relativa alle basi duali di $(\mathbf{v}'_j)$ e di $(\mathbf{v}_i)$, rispettivamente.*

Dimostrazione: Indicata con $M(f)$ la matrice della generica forma lineare f di W^*, si consideri la definizione dell'applicazione lineare ${}^tF :{}^t F(f) = f \circ F, f \in W^*$. Essa si puó porre nella forma matriciale: $M[({}^tF)(f)] = {}^t[M(f)M(F)]$, tenuto conto che entrambi i membri rappresentano un vettore colonna e che $M(f)$ é un vettore riga. Si ottiene, pertanto, la relazione: $M({}^tF)\,{}^tM(f) = {}^tM(F)\,{}^tM(f)$ che sussiste per ogni ${}^tM(f)$ e perció prova l'asserto . ▮

Teorema 19.8 *Se $F, G \in \mathcal{L}(V, W)$ e $a \in \mathbb{R}$, allora:*

i) ${}^t(F + G) = {}^tF + {}^tG$,

ii) ${}^t(aF) = a\,{}^tF$.

La dimostrazione si lascia per esercizio.

Teorema 19.9 *Siano U, V, W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{R}$, allora, per ogni $F \in \mathcal{L}(V, W)$ e per ogni $G \in \mathcal{L}(V, U)$, nello spazio $\mathcal{L}(U^*, V^*)$ abbiamo:*

$$ {}^t(G \circ F) = {}^tF \circ {}^tG. $$

Dimostrazione. Dalla definizione di applicazione lineare trasposta, si può scrivere:

${}^t(G \circ F)(h) = h \circ (G \circ F), \quad \forall h \in U^*$,

${}^tG(h) = h \circ G, \quad \forall h \in U^*$,

${}^tF(f) = f \circ F, \quad \forall f \in W^*$.

Sostituendo nell'ultima relazione f con $h \circ G$, si ottiene:

${}^tF(h \circ G) = (h \circ G) \circ F = h \circ (G \circ F) = (G \circ F)(h), \ \forall h \in U^*$.

Poichè: ${}^tF(h \circ G) = {}^tF(G(h)) = ({}^tF \circ {}^tG)(h)$, risulta:

$({}^tF \circ {}^tG)(h) = {}^t(G \circ F)(h)$,

da cui la tesi . ∎

Se $F \in End(V)$, allora ${}^tF \in End(V^*)$ e:

$$ {}^tI_V(f) = f \circ I_V = I_{V^*}(f), \quad \forall f \in V^*, $$

dove I_V è l'isomorfismo identico di V e I_{V^*} è l'isomorfismo identico di V^*. Pertanto ${}^tI_V = I_{V^*}$. Ciò premesso, si può enunciare il:

Teorema 19.10 *Per ogni isomorfismo $F \in Gl(V)$, si ha ${}^tF \in Gl(V^*)$ e:*

$$ ({}^tF)^{-1} = {}^t(F^{-1}). $$

Dimostrazione. Per ogni $F \in Gl(V)$ anche $F^{-1} \in Gl(V)$ e si ha:

$$ F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = I_V, $$

da cui si ottiene:

$$ {}^t(F \circ F^{-1}) = {}^t(F^{-1} \circ F)\ {}^tI_V = I_{V^*} $$

e per il Teorema precedente:

$$ {}^t(F^{-1}) \circ {}^tF = {}^tF \circ {}^t(F^{-1}) = I_{V^*}, $$

quindi ${}^tF \in Gl(V^*)$ e la sua inversa $({}^tF)^{-1}$ è ${}^t(F^{-1})$. ∎

Esercizio 19.4 Siano $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, è:

$$ M(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} $$

ed $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma lineare di matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la forma ${}^t\!F(f)$.

Soluzione: Per definizione di applicazione lineare trasposta, ${}^tF(f) = f \circ F$, la cui matrice associata è data da:

$$M(f \circ F) = M(f)M(F).$$

Quindi:

$$M(f \circ F) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

e la forma richiesta risulta essere:

$${}^t\!F(f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -x + 2y - 3z - 2t.$$

19.3 Isometrie e similitudini

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, di dimensione finita e sia "$\cdot$" il prodotto scalare di V. La definizione seguente estende (in modo naturale) a dimensioni superiori il concetto elementare di isometria o **movimento euclideo** nel piano e nello spazio.

Definizione 19.5 *Un isomorfismo f di V prende il nome di* **isometria** *se:*

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Osservazione 19.5 Si puó generalizzare la definizione precedente al caso di isomorfismi tra due spazi vettoriali euclidei in questo modo: dati due spazi vettoriali euclidei V e W, con la stessa dimensione, un isomorfismo $f : V \longrightarrow W$ si dice isometria se "conserva " la norma dei vettori.

Esempio 19.4 Ogni rotazione $R[\theta]$ (in senso antiorario) di angolo θ del piano vettoriale V_2 é un'isometria (cfr. Esempio 17.24). Da fatti noti, segue, quindi, che una matrice associata a $R[\theta]$ (rispetto alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$) é del tipo:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Esempio 19.5 L'identitá: $i : V \longrightarrow V$, definita da $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, é un'isometria.

Esempio 19.6 L'applicazione $-i : V \longrightarrow V$ definita da $-i(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, é un'isometria.

Alcune tra le principali proprietá delle isometrie sono riassunte nel seguente:

Teorema 19.11 *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n.*

1) *Ogni endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ tale che $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V$, é un'isometria.*

2) *Se f é un'isometria allora:*

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

3) *La composizione di due isometrie é un'isometria.*

4) *L'inversa di un'isometria é un'isometria.*

5) *f é un'isometria di V se e solo se le immagini dei vettori di una base ortonormale di V formano una base ortonormale di V.*

6) *Gli autovalori di un'isometria sono:* ± 1

7) *f é un'isometria di V se e solo se la matrice associata ad f, rispetto ad una base ortonormale di V, é una matrice ortogonale.*

Dimostrazione.
1) É sufficiente provare che $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. Infatti se $\mathbf{x} \in \ker f$ si ha $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$; d'altra parte $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{0}\| = 0 = \|\mathbf{x}\|$, quindi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2) Segue dal fatto che:

$$\|f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 = \|f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\|^2 = \|f(\mathbf{x})\|^2 + 2f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) + \|f(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$$

e:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2.$$

3) Se f e g sono isometrie, allora $\|(f\circ g)(\mathbf{x})\| = \|f(g(\mathbf{x}))\| = \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in V$.

4) Sia f un'isometria. Si ha: $\|f(f^{-1}(\mathbf{x}))\| = \|i(\mathbf{x})\|$, ma $\|f(f^{-1}(\mathbf{x}))\| = \|f^{-1}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in V$, da cui la tesi, (i é l'identitá in V).

5) Se f é un'isometria e $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ una base ortonormale, allora $\mathcal{B}' = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n))$ é una base ortonormale perché f conserva la norma dei vettori e i loro prodotti scalari. Viceversa, siano $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ e $\mathcal{B}' = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n))$ due basi ortonormali. Dato $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in V$, allora $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, d'altra parte $f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_n f(\mathbf{e}_n)$, quindi $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Si osservi che il calcolo della norma dei vettori $\mathbf{x}$ e $f(\mathbf{x})$ ha assunto l'espressione suddetta in quanto riferito a due basi ortonormali.

6) Sia λ un autovalore di f, quindi $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, allora: $\|f(\mathbf{x})\|^2 = \|\lambda\mathbf{x}\|^2 = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ da cui la tesi.

7) Sia A la matrice associata ad f, rispetto ad una base ortonormale di V, e siano $X' = AX$ le equazioni di f. Poiché, per ogni $\mathbf{x} \in V$, $\|f(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ e ricordando che $\|\mathbf{x}\|^2 = {}^tXX$ si ha ${}^tX'X' = {}^t(AX)(AX) = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tXX$, da cui segue la tesi. Si osservi che $\|\mathbf{x}\|^2 = {}^tXX$ solo se X é la matrice colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto ad una base ortonormale . ∎

Osservazione 19.6 i) Dalla definizione di isometria e da 2) segue che le isometrie conservano gli angoli tra i vettori.

ii) Da 3) e da 4) segue che l'insieme delle isometrie é un gruppo (si veda la definizione di gruppo nell'ultimo paragrafo di questo capitolo) rispetto alla composizione di funzioni.

iii) Si osservi che se un isomorfismo conserva i prodotti scalari allora non é necessariamente un'isometria, (le similitudini sono un'esempio di questo fatto).

iv) Si osservi che se un'isomorfismo ha autovalori pari a ± 1 non é detto che sia un'isometria, per esempio si consideri l'isomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 19.5 Si consideri in $\mathbb{R}^2$ la struttura euclidea determinata dal prodotto scalare $(x_1, x_2) \cdot (x_2, y_2) = x_1 y_1 + 4x_2 y_2$. Verificare che l'isomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ & \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

é un'isometria di $\mathbb{R}^2$. Per quale motivo $A \notin O(2)$?

Soluzione: Le equazioni di f sono:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + x_2 \\ \\ x'_2 = -\frac{1}{4} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2. \end{cases}$$

É sufficiente verificare che:

$\|f(\mathbf{x})\|^2 = (x'_1)^2 + 4(x'_2)^2 = x_1^2 + 4x_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2, \ \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

La matrice A non é ortogonale perché non é associata ad una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare introdotto), infatti A é associata alla base $((1,0),(0,1))$, ma $\|(0,1)\| = 2$.

Definizione 19.6 *Sia $f : V \longrightarrow V$ un isomorfismo dello spazio euclideo V. f prende il nome di* **similitudine** *di rapporto a se:*

$$\|f(\mathbf{x})\| = a\|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} \in V,$$

da cui si deduce che a deve essere un numero reale positivo non nullo.

Osservazione 19.7 Ogni isometria é una similitudine di rapporto 1.

Il seguente teorema, di cui non si riporta la dimostrazione, in quanto si tratta di un semplice esercizio, riassume alcune tra le principali proprietá delle similitudini.

Teorema 19.12 *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n.*

1) *Se f é una similitudine allora f conserva gli angoli tra i vettori.*

2) *Se f é una similitudine di rapporto a allora gli autovalori di f sono: $\pm a$.*

3) *La matrice associata ad una similitudine di rapporto a, rispetto ad una base ortonormale di V, é aA con $A \in O(n)$.*

19.4 Diagonalizzazione simultanea

Ricordando che un endomorfismo f su uno spazio vettoriale V si dice diagonalizzabile se esiste una base di V di autovettori di f, si può introdurre la seguente:

Definizione 19.7 *Due endomorfismi* f *e* g *su* V*, entrambi diagonalizzabili, si dicono* **simultaneamente diagonalizzabili** *se esiste una base di* V *i cui vettori sono sia autovettori di* f *sia autovettori di* g*. Più precisamente: se* A *e* B *sono, rispettivamente, le matrici associate a* f *e a* g *rispetto ad una base di* V*, allora* f *e* g *sono simultaneamente diagonalizzabili se esiste una matrice* P*, invertibile, tale che:*

$$A = PDP^{-1}, \quad B = PD'P^{-1},$$

dove D *e* D' *sono due matrici diagonali (*D *ha sulla diagonale principale gli autovalori di* f*, contati con la relativa molteplicità, e* D' *quelli di* g*).*

Il teorema seguente ha il duplice scopo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinchè due endomorfismi siano simultaneamente diagonalizzabili e di spiegare, nella sua dimostrazione, il metodo che si deve seguire per determinare una base comune di autovettori.

Teorema 19.13 *Siano* f *e* g *due endomorfismi sullo stesso spazio vettoriale* V*, ciascuno dei quali sia diagonalizzabile. Essi sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se:*

$$f \circ g = g \circ f,$$

ossia se e solo se:

$$AB = BA$$

per le matrici associate a f *e a* g*.*

Dimostrazione: Se f e g sono simultaneamente diagonalizzabili, allora valgono le formule:

$$A = PDP^{-1}, \quad B = PD'P^{-1},$$

da cui è immediato provare che $AB = BA$.

Viceversa, supponiamo che gli endomorfismi f e g siano diagonalizzabili e che il loro prodotto commuti. Indicati con $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_h}$ gli autospazi relativi a f, sussiste la relazione: $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_h}$.
Si osserva, intanto, che l'endomorfismo g trasforma ogni vettore di V_{λ_i} in un vettore dello stesso autospazio. Infatti, per ogni vettore $\mathbf{x} \in V_{\lambda_i}$, risulta che:

$$f(g(\mathbf{x})) = (f \circ g)(\mathbf{x}) = (g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = g(\lambda_i \mathbf{x}) = \lambda_i g(\mathbf{x})$$

quindi $g(\mathbf{x}) \in V_{\lambda_i}$.
Sia $\mathbf{y}$ un autovettore di g, ossia $g(\mathbf{y}) = \mu \mathbf{y}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Come immediata conseguenza della decomposizione spettrale di V negli autospazi di f, $\mathbf{y}$ si può scrivere, in modo unico, come:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \ldots + \mathbf{w}_h, \quad \mathbf{w}_i \in V_{\lambda_i}, \ i = 1, \ldots, h.$$

Poichè $\mathbf{y}$ è autovettore, almeno uno dei $\mathbf{w}_i$ è non nullo. Per quanto osservato e per la linearità di g, si ha:

$$g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{w}_1) + g(\mathbf{w}_2) + \ldots + g(\mathbf{w}_h) = \mu \mathbf{y} = \mu \mathbf{w}_1 + \mu \mathbf{w}_2 + \ldots + \mu \mathbf{w}_h,$$

dove $g(\mathbf{w}_i) \in V_{\lambda_i}, i = 1, \ldots, h$. Per l'unicità della decomposizione di un vettore nella somma dei vettori degli autospazi, si ottiene:

$$g(\mathbf{w}_1) = \mu \mathbf{w}_1, \ g(\mathbf{w}_2) = \mu \mathbf{w}_2, \ldots, g(\mathbf{w}_h) = \mu \mathbf{w}_h.$$

Questo prova che per ogni autovettore di g è possibile determinare almeno un autovettore simultaneo di f e di g.
Infine, per la diagonalizzabilità di g, esiste una base $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n)$ di autovettori di g, ciascuno dei quali si può decomporre nella somma di autovettori simultanei di f e di g. Questi ultimi autovettori sono, ovviamente, dei generatori dello spazio V e perciò da essi si può estrarre una base . ∎

Esercizio 19.6 Sono dati due endomorfismi f e g su $\mathbb{R}^3$ le cui matrici, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verificare che f e g sono simultaneamente diagonalizzabili e determinare una base comune di autovettori.

Soluzione: f e g sono simultaneamente diagonalizzabili perchè:

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ -7 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

L'endomorfismo f ha autovalori:

$$\lambda_1 = 2,\ m_{\lambda_1} = 2, \quad \lambda_2 = 3,\ m_{\lambda_2} = 1$$

ed autospazi:

$$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,0)), \quad V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,1));$$

mentre l'endomorfismo g ha autovalori:

$$\lambda'_1 = 1,\ m_{\lambda'_1} = 1, \quad \lambda'_2 = 3,\ m_{\lambda'_2} = 2$$

ed autospazi:

$$V_{\lambda'_1} = \mathcal{L}(\mathbf{y}_1 = (1,1,1)), \quad V_{\lambda'_2} = \mathcal{L}(\mathbf{y}_2 = (0,1,0), \mathbf{y}_3 = (0,0,1)).$$

È evidente che gli autovettori di g: $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ sono anche autovettori di f e, quindi, costituiscono la base richiesta ($\mathbf{y}_1 \in V_{\lambda_1}$). Si consiglia di usare il programma *Mathematica* per lo svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 19.7 Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 48 & -12 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -3 & -12 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 12 & -12 & 4 & 12 \\ 9 & -12 & 3 & 12 \end{pmatrix},$$

provare che sono simultaneamente diagonalizzabili e che commutano. Determinare, quindi, una matrice che le diagonalizza simultaneamente.

Soluzione: Gli autovalori e gli autospazi di A e di B sono, rispettivamente:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 4,$

$V_1 = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1 = (-1,0,0,1), \mathbf{v}_2 = (-1,0,4,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,0,0)),\ V_2 = \mathcal{L}(\mathbf{v}_4 = (-1,0,3,0));$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 3,$

$V'_1 = \mathcal{L}(\mathbf{v}'_1 = (0,1,0,1), \mathbf{v}'_2 = (-1,0,3,0)),\ V'_2 = \mathcal{L}(\mathbf{v}'_3 = (0,1,4,0)),\ V'_3 = \mathcal{L}(\mathbf{v}'_4(-1,0,0,1));$

ciò che prova la diagonalizzabilità di entrambe le matrici.

A e B commutano, infatti:

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il Teorema precedente assicura l'esistenza di una base comune di autovettori che si determinano seguendo il metodo esposto nella dimostrazione. Perciò si considera, ad esempio, la base $\mathscr{B}' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4)$ di $\mathbb{R}^4$ e si decompongono i vettori della base $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ di $\mathbb{R}^4$ attraverso i vettori della base $\mathscr{B}'$, con l'avvertenza di raggruppare e sommare gli autovettori appartenenti alo stesso autospazio. Si hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_4 \\ \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_3 + \mathbf{v}'_4 \\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_4 \\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}'_2, \end{cases}$$

dalle quali risulta che (casualmente) i vettori della base $\mathscr{B}'$ sono autovettori comuni alle due matrici. Scambiando il ruolo delle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$, si avrebbe:

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}'_4 = \mathbf{v}_1, \end{cases}$$

dove si osserva che la base comune è formata dai vettori $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4$, ossia, nuovamente, la base $\mathscr{B}'$.

Un altro modo per determinare una base comune di autovettori di due matrici A e B diagonalizzabili e che commutano, consiste nell'estrarre una base dell'insieme unione delle basi dei sottospazi: $V_i \cap V'_j$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$, con $r, s \leq n$, dove V_i e V'_j rappresentano gli autospazi delle matrici A e B rispettivamente.

Nel caso in esame, ommettendo i calcoli per brevità, si ottiene:

$$\begin{aligned} V_1 \cap V'_1 &= \mathcal{L}((0, 1, 0, 1)), \\ V_1 \cap V'_2 &= \mathcal{L}((0, 1, 4, 0)), \\ V_1 \cap V'_3 &= \mathcal{L}((-1, 0, 0, 1)), \\ V_2 \cap V'_1 &= \mathcal{L}((-1, 0, 3, 0)), \\ V_2 \cap V'_2 &= \{\mathbf{0}\}, \\ V_2 \cap V'_3 &= \{\mathbf{0}\}, \end{aligned}$$

ossia, nuovamente, i vettori di $\mathscr{B}'$. Anche attraverso questo modo di procedere, appare evidente che la base richiesta non è unica.

Osservazione 19.8 Si vuole concludere il paragrafo con un'osservazione che puó suggerire un ulteriore metodo per risolvere lo stesso problema.

Il cambiamento di base in $\mathbb{R}^n$, di matrice P (avente per colonne i vettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$) trasforma B nella matrice $R = P^{-1}BP$ avente per colonne i vettori $(g(\mathbf{v}_1), g(\mathbf{v}_2), \ldots, g(\mathbf{v}_n))$ che appartengono agli autospazi di f (come segue dal teorema precedente). Di conseguenza, R risulta costituita da blocchi in numero pari al numero di autospazi V_{λ_i} di f e con ordine dato dalla dimensione di V_{λ_i}. Poiché ciascuno di tali blocchi é diagonalizzabile, per la diagonalizzabilitá di g, esiste una matrice Q che diagonalizza R, ossia la matrice: $Q^{-1}(P^{-1}BP)Q = (PQ)^{-1}B(PQ)$ assume la forma diagonale (si tenga conto che il cambiamento di base di matrice Q opera tra due basi i cui rispettivi vettori appartengono agli stessi autospazi di f). Allora la matrice PQ diagonalizza g, ma diagonalizza anche f perché $(PQ)^{-1}A(PQ) = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = Q^{-1}DQ = D$, dove D é una matrice diagonale simile ad A. La base cercata si ottiene, pertanto, dalle colone della matrice PQ.

Applichiamo questo metodo all'esercizio precedente, si ha:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad R = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é una matrice che diagonalizza R, mentre per quanto osservato:

$$PQ = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é una matrice che diagonalizza simultaneamente A e B, com'é anche immediato osservare dalle sue colonne che riproducono ancora la base $\mathcal{B}'$.

19.5 Il Teorema di Cayley–Hamilton

Il teorema che segue, di svariate applicazioni, é sorprendente, perché afferma, in pratica che sostituendo una matrice quadrata nel suo polinomio caratteristico si ottiene la matrice nulla; infatti:

Teorema 19.14 Il Teorema di Cayley–Hamilton. *Ogni matrice quadrata è uno zero del suo polinomio caratteristico.*

Dim. Sia $P(\lambda)$ il polinomio caratteristico della matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0. \tag{19.4}$$

Sia $B(\lambda)$ l'aggiunta della matrice $A - \lambda I$, (cfr. Definizione 3.12). Gli elementi di $B(\lambda)$, essendo i cofattori della matrice $(A - \lambda I)$, di ordine n, sono polinomi in λ di grado non superiore a $n-1$. Quindi si può scrivere:

$$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + B_1\lambda + B_0, \tag{19.5}$$

dove le B_i sono matrici quadrate di ordine n i cui elementi non dipendono da λ. Per capire meglio: se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

allora si ha:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Poiché:

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

allora:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 4\lambda + 5 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 0 \\ -\lambda + 4 & \lambda - 2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ricordando il calcolo esplicito della matrice inversa (cfr. Teorema 3.17), segue che:

$$(A - \lambda I)B(\lambda) = \det(A - \lambda I)I.$$

Sostituendo le espressioni di (19.4) e (19.5) ed uguagliando i coefficienti dei termini di ugual grado si ha:

$$\begin{array}{l} B_{n-1} = (-1)^n I \\ AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1}I \\ AB_{n-2} - B_{n-3} = a_{n-2}I \\ \dots\dots\dots \\ AB_1 - B_0 = a_1 I \\ AB_0 = a_0 I. \end{array}$$

Moltiplicando le precedenti equazioni, rispettivamente, per $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$ e sommando si ha:

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0. \qquad (19.6)$$

Esempio 19.7 Sia A una matrice quadrata di ordine 2, dal teorema di Cayley–Hamilton segue che:

$$A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I.$$

Si possono così ottenere le potenze di A in funzione delle potenze precedenti, per esempio:

$$A^3 = \mathrm{tr}(A)A^2 - \det(A)A; \quad A^4 = \mathrm{tr}(A)A^3 - \det(A)A^2$$

e così via.

Esempio 19.8 Se A è invertibile, poichè da (19.6), si ha

$$A\left[(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 I\right] = -\det(A)I,$$

moltiplicando entrambi i membri per A^{-1}, si ottiene:

$$A^{-1} = -(\det(A))^{-1}(a_0 A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_1 I).$$

Per esempio, se A è una matrice quadrata di ordine 2, la formula precedente si riduce a:

$$A^{-1} = -(\det(A))^{-1}(A + \mathrm{tr}(A)I).$$

Esercizio 19.8 Determinare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

usando il Teorema di Cayley-Hamilton

Soluzione: Il polinomio caratteristico di A è:

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

Usando il Teorema 19.14 si ricava:

$$-A^3 + 3A^2 - 2A - I = 0$$

e quindi

$$A^{-1} = -A^2 + 3A - 2I,$$

da cui svolgendo i calcoli:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

19.6 Gruppi di Matrici

Un insieme G dotato di un'operazione, il prodotto, per cui valgano le proprietá: associativa, esistenza dell'elemento neutro e inverso per ogni suo elemento, prende il nome di **gruppo**. La struttura di gruppo é molto importante in geometria, come metteranno in evidenza gli esempi che seguono e che, in realtá sono giá stati incontrati durante il corso. Esempi piú facili di gruppo sono gli insiemi di numeri: $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ con l'usuale operazione di prodotto.

Un sottoinsieme H di un gruppo G prende il nome di **sottogruppo** se é chiuso rispetto all'operazione di prodotto (ossia se il prodotto di due elementi di H é un elemnto di H) e se per ogni elemento di H il suo inverso é ancora un elemnto di H. Si osservi che la nozione di sottogruppo ha forti analogie con il concetto di sottospazio vettoriale, a lungo discusso in tutto il corso.

[1] $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A \neq 0\}$:

é il **gruppo lineare generale reale**, comprende tutte le matrici reali, di ordine n, non singolari. Si tratta, quindi, delle matrici che legano i cambiamenti di base in $\mathbb{R}^n$ o in uno spazio vettoriale reale di dimensione n.

Caso particolare:

$GL(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[2] $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$:

é il **gruppo lineare speciale**, si tratta di un sottogruppo di $GL(n,\mathbb{R})$.

Caso particolare:

$SL(1,\mathbb{R}) = \{1\}$.

[3] $O(n) = O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$:

é il **gruppo ortogonale**; é un sottogruppo di $GL(n,\mathbb{R})$ che comprende tutte le matrici ortogonali. Si tratta, quindi, delle matrici che legano il cambiamento di base tra basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ o di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Le righe e le colonne di una matrice ortogonale sono le componenti di basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$, rispetto al prodotto scalare standard. Inoltre, $O(n)$ é il gruppo delle matrici associate alle isometrie lineari (come spiegato in questo stesso capitolo) ed é, anche, il gruppo delle matrici che conservano i prodotti scalari (vale a dire le forme quadratiche di segnatura $(n,0)$ (le forme quadratiche saranno oggetto di studio del Capitolo 20). Se $A \in O(n)$ allora $\det A = \pm 1$.

Caso particolare:

$O(1) = \{-1, 1\} = S^0$, ossia la sfera di $\mathbb{R}$ di raggio 1.

[4] $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n) / \det A = 1\}$:

é il **gruppo ortogonale speciale**, si osservi che, a differenza dell'insieme delle matrici di $O(n)$ di determinante -1, $SO(n)$ é un sottogruppo.

Casi particolari:

$SO(1) = \{1\}$;

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

[5] $O(p,q) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tAI_{p,q}A = I_{p,q}\}$

dove:

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

il numero 1 é ripetuto p volte e il numero -1: q volte, $p+q=n$.
Questo gruppo riveste un'importanza particolare perché é dato dalle matrici che conservano le forme quadratiche di segnatura (p,q) (le forme quadratiche saranno oggetto di studio del Capitolo 20). Si verifica facilmente che se $A \in O(p,q)$, allora $\det A = \pm 1$.

Casi particolari:

i) $O(n) = O(n,0) = O(0,n)$, segue dalla definizione.

ii) $O(p,q)$ é isomorfo a $O(q,p)$.

iii) $O(3,1)$ é il gruppo di Lorentz.

[6] $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R})$.

iii) $SO(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$,

questo risultato segue da calcoli elementari.

Capitolo 20

Applicazioni Lineari – Esercizi

20.1 Esercizi

In tutti gli esercizi di questo capitolo si sono adottate notazioni standard, in particolare si è indicato con:

- $\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale delle n-uple di numeri reali, di dimensione n, riferito alla base canonica ($\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$);

- $\mathbb{R}^{m,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici di tipo (m, n), ad elementi reali, riferito alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

- $\mathbb{R}^{n,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n, ad elementi reali, riferito alla base canonica standard (il caso particolare della precedente);

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine n ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots\dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$$

- $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche di ordine n ad elementi reali rispetto alla base canonica:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

- V_3 lo spazio vettoriale reale, di dimensione 3, dei vettori ordinari, riferito alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. In quest'ambito: "$\wedge$" indica il prodotto vettoriale o esterno e "$\cdot$" il prodotto scalare.

- ${}^tA$ indica la trasposta della matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

- $\mathrm{tr}(A)$ indica la traccia della matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, vale a dire la somma degli elementi della diagonale principale.

[1] In $\mathbb{R}^3$ si consideri l'endomorfismo f dato da:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_3) &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Trovare una base di $\ker f$.

[2] È data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base di $\ker f$ e una base di $\mathrm{im} f$.

[3] Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$, la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\dim \ker f$ e $\dim \mathrm{im} f$.

[4] In V_3, si consideri un vettore $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$. Determinare il nucleo e l'immagine degli omomorfismi:

$$\begin{aligned} f_1 &: V_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \ f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}, \\ f_2 &: V_3 \longrightarrow V_3, \ f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x}. \end{aligned}$$

[5] In $\mathbb{R}^3$ si consideri l'endomorfismo f dato da:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{0}, \\ 2f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) &= 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) &= 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

i) f è iniettivo? f è suriettivo?
ii) Trovare $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.
iii) Determinare $t \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u} = (t+1, 2t, -1) \in \mathrm{im} f$.
iv) Per il valore di t ottenuto, calcolare le componenti del vettore $\mathbf{u}$ rispetto alla base di $\mathrm{im} f$.
v) Trovare un vettore $\mathbf{x} \notin \mathrm{im} f$.
vi) $\ker f$ e $\mathrm{im} f$ sono in somma diretta?
vii) Determinare le controimmagini del vettore $\mathbf{y} = (3, 4, -1)$.

[6] È dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, è:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & a^2+1 & a+1 \\ 8 & 4 & a^2+3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) Per quali valori di a f è iniettivo?
ii) Per i restanti valori di a determinare $\ker f$ e la sua dimensione.
iii) Posto $a = -1$, trovare le controimmagini del vettore $(1, -2, 0)$.
Posto $a = 1$:
iv) dire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga una base di $\ker f$.
v) $\ker f$ e $\mathrm{im} f$ sono in somma diretta?
vi) Esiste $g \in End(\mathbb{R}^3)$ tale che $\ker g = \mathrm{im} f$ e $\mathrm{im} g = \ker f$?
vii) Per quali valori di $h, k, l \in \mathbb{R}$ il vettore (h, k, l) ammette controimmagini?

[7] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R},$$

associata ad un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$, è possibile completare A sapendo che:

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \\ &\ker f \neq \{\mathbf{0}\}? \end{aligned}$$

[8] In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, -2)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, -1)$.
i) Verificare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti.
ii) Dire se esistono gli endomorfismi f e g di $\mathbb{R}^4$ rispettivamente tali che:

$$\begin{array}{ll} f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, & g(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, & g(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, & g(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_3 & g(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 2, 1, 1); & g(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 6, 0, 1). \end{array}$$

iii) Verificato che g é un endomorfismo, determinarne autovalori e autospazi.
iv) g é diagonalizzabile?

[9] In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori: $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 4)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 2)$.
i) Verificare che $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti e trovare una base che li contiene.
ii) Rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$, scrivere la matrice associata ad un'applicazione lineare f non nulla di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}, \ f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}, \ f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{0}.$$

[10] Sono assegnati l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ individuato dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ed i vettori $\mathbf{u} = (1, -2, k)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$.

i) Provare che per nessun valore di $k \in \mathbb{R}$ $\mathbf{u} \in \ker f$.
ii) Determinare per quali valori di k i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.
iii) Posto $k = 1$, determinare le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.
iv) Posto $k = 0$ e considerati i sottospazi vettoriali: $\mathcal{U} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $\mathcal{V} = \mathcal{L}(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_3)$, trovare un'isomorfismo $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$.
v) Scrivere la matrice associata a g rispetto alla base $\mathcal{B}$.

[11] Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z).$$

i) Dire se f è suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore privo di controimmagine.
ii) Dire se f è iniettivo. In caso negativo, determinare due vettori che abbiano la stessa immagine.
iii) Sia $\mathcal{E} = \mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, dove $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$. Dire se il vettore $\mathbf{w} = (4, 3, -2)$ appartiene a $f(\mathcal{E})$.

[12] Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dfrac{3}{2} & 0 \\ t & -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
ii) Posto $t = 0$, esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che il vettore $(k + 3, k, 1, 2k) \in \ker f$?
iii) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente una base di $\ker f$.
iv) Determinare le controimmagini del vettore $(1, 0, -1)$.

[13] Sia f l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^{2,2}$ così definita:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y - z & 2z \\ x - y & y \end{pmatrix}.$$

i) Trovare una base di $\operatorname{im} f$.
ii) Dire se f è iniettiva.
iii) Trovare i vettori $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = 3f(1, 2, 1)$.
iv) Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ammette controimmagine.

[14] Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a + b \\ a + b + c & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^{2,2}$.
ii) Determinare $\operatorname{im} f$.

[15] Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5, 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5).$$

i) Trovare $\ker f$ e dire se f è suriettiva.

ii) Dato $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, dove $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 3, 0, 0)$, determinare la dimensione dell'immagine di $\mathcal{V}$.

iii) Verificare che, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^5$ e $\forall s, t \in \mathbb{R}$, il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{a} + s(-1, -3, 1, 0, 5) + t(0, -3, 0, 1, 4)$ è controimmagine di $f(\mathbf{a})$.

[16] i) Dire se la funzione che ad ogni matrice di $\mathbb{R}^{3,3}$ associa il suo determinante è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^{3,3}$ in $\mathbb{R}$.

ii) Dire se la funzione di $\mathbb{R}^{3,3}$ in $\mathbb{R}$ che ad ogni matrice associa la sua traccia è un'applicazione lineare. In caso positivo, stabilire se è suriettiva e determinare il suo nucleo.

[17] Si consideri l'endomorfismo f di $R^{2,2}$ associato alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 3 & 0 & h-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & h-2 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$, al variare di h in R.

ii) Posto $h = -1$, determinare una base di autovettori per ciascun autospazio e stabilire se f è semplice.

iii) Posto $h = -1$, trovare una base per $f^{-1}(\mathcal{G})$, dove $\mathcal{G}$ è il sottospazio vettoriale definito da:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid 4x_1 + x_2 - x_3 = 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \right\}.$$

[18] Data la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

così definita:

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 17x_2 + 10x_3 + 9x_4 & x_2 \\ 11x_2 + 8x_3 + 6x_4 & -13x_2 - 8x_3 - 6x_4 \end{pmatrix},$$

i) si verifichi che f è un'applicazione lineare e si determini la matrice A associata ad f.

ii) Si determini una base di $\ker f$ e una base di $\operatorname{im} f$.

iii) Si determinino $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid 4x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \right\},$$

e $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_4 = x_3 = 0 \right\}.$$

iv) Si calcolino gli autovalori di f e una base per ciascun autospazio.

v) f è semplice? Se la risposta è affermativa, si scriva una matrice diagonale A' a cui f è associata e si determini la matrice del cambiamento di base B tale che $A' = B^{-1}AB$.

[19] Sia $\mathcal{V}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{2,2}$ formato dalle matrici aventi traccia nulla.
i) Verificare che $\mathcal{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$ e che $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3)$, dove:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

è una base di $\mathcal{V}$.
ii) Trovare, rispetto alla base $\mathcal{B}$, la matrice dell'endomorfismo f di $\mathcal{V}$ tale che:

$$f(A_1 + A_2) = \begin{pmatrix} -h-1 & 1 \\ 2+h & h+1 \end{pmatrix},$$

$$f(2A_2 + A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(A_1 - A_2 + A_3) = \begin{pmatrix} 3-h & -2 \\ h-3 & h-3 \end{pmatrix}.$$

iii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ f è, rispettivamente:
a) un isomorfismo,
b) diagonalizzabile.

[20] i) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito ad una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$; si determini la matrice associata all'applicazione lineare $f : V \longrightarrow V$ tale che:

$$\begin{aligned} &\ker f = \mathcal{L}((0,1,-1)), \\ &f(3,1,-1) = (9,0,0), \quad f(1,1,1) = (3,2,4). \end{aligned}$$

ii) f è semplice?

[21] Si considerino le matrici associate, rispetto alla base canonica, alle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che:

$$\begin{aligned} &\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \\ &f(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}, \ \text{dove } \mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Determinare quali tra queste matrici sono diagonalizzabili, quindi individuare una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$.

[22] In V_3 è data la funzione $f : V_3 \longrightarrow V_3$ così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{x} + 2\mathbf{j} \wedge \mathbf{x} - \mathbf{k} \wedge \mathbf{x}.$$

i) Provare che f è lineare.
ii) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.
iii) f è semplice?

[23] Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ riferiti alle rispettive basi canoniche $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$. Date le applicazioni lineari:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad B = M^{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 & 0 \\ -5 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

determinare, se esiste, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h = g$.

[24] Si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}, \; f(A) = \frac{1}{2}\,(A + {}^tA), \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

i) Verificare che f è un'applicazione lineare.
ii) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
iii) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.
iv) f è semplice? In caso affermativo, determinare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ di autovettori e la matrice a cui f è associata, rispetto a tale base.

[25] Verificare che le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 & -7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

e:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sono associate allo stesso endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se A è riferita alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, determinare la base a cui è riferita la matrice A'.

[26] Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ così definita:

$$f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -2h \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h+6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -2h+2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \; h \in \mathbb{R}.$$

i) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
ii) Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e una base e la dimensione di $\operatorname{im} f$.
iii) Per quali valori di h esiste f^{-1}? Determinare, in questi casi, la matrice associata ad f^{-1}.
iv) Per quali valori di h f è semplice?

[27] Determinare, se esiste, un'opportuna applicazione lineare g tale che:

$$g \circ f = h,$$

dove $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è così definita:

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2' &= x_2 - x_3 + 3x_4 \\ x_3' &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

e $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è definita da:

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2' &= x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

[28] i) Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,2,0,-4),(2,0,-1,-3)).$$

ii) Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\ker f = \mathcal{L}((1,0,1)).$$

iii) Determinare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ iniettive.

[29] Sia:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici triangolari superiori. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

i) f è ben definito?

ii) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathcal{T}$.

iii) Determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e di $\operatorname{im} f$.

iv) Dato $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \mid x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$, determinare una base e la dimensione di $f(\mathcal{H})$ e di $f^{-1}(\mathcal{H})$.

v) f è semplice?

vi) In caso affermativo si scriva una matrice A' diagonale simile ad A e la base di $\mathcal{T}$ a cui A' è riferita.

[30] Scrivere tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tali che:
i) $\ker f = \mathcal{L}((1,-1,0),(0,1,1))$,
ii) $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,0,1))$.

[31] Sia $f : V_3 \longrightarrow V_3$ la funzione così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_3,$$

dove $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.
i) Verificare che f è un'applicazione lineare.
ii) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
iii) Determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$.
iv) Determinare $f(\mathcal{W})$, dove $\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in V_3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$ e $f^{-1}(\mathcal{U})$, dove: $\mathcal{U} = \{\mathbf{x} \in V_3 \mid \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}\}$.
v) Verificare che $\mathcal{C} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, 2\mathbf{k})$ è una base di V_3 e scrivere la matrice A' associata ad f rispetto alla base $\mathcal{C}$.
vi) f è semplice?

[32] In uno spazio vettoriale V di dimensione 2, rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, si considerino gli endomorfismi f e g individuati dalle matrici:

$$A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Si determinino le componenti del vettore $(f \circ g)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.
ii) Si scrivano le componenti dei vettori $\mathbf{x}$ di V tali che:

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

e dei vettori $\mathbf{y}$ di V tali che:

$$(f \circ g)(\mathbf{y}) = (g \circ f)(\mathbf{y}).$$

[33] Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2y - z, 2x - 4y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$ e $\ker f \cap \ker g = \{\mathbf{o}\}$.

[34] In $\mathbb{R}^{2,2}$ si consideri la funzione:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2} \quad | \quad f(A) = {}^tA, \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

i) Verificare che f è un'applicazione lineare.
ii) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$.
iii) f è invertibile? In caso positivo, determinare una matrice associata a f^{-1}.
iv) f è semplice? In caso positivo, scrivere una matrice diagonale simile ad f e determinare una base rispetto alla quale tale matrice è data.

[35] Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ tale che:

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, una base per $\ker f$ e $\operatorname{im} f$.

[36] i) Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ tale che:

$$f(1, 0, -1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(0, 1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(1, 0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) Trovare una base per $\ker f$ ed $\operatorname{im} f$ (precisare le basi scelte per scrivere la matrice di f).
iii) Determinare una base per il sottospazio vettoriale $f^{-1}(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid y_1 + 2y_3 = y_2 + y_3 = 0 \right\}.$$

[37] Si consideri l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad X \longmapsto f(X) = AX - XA,$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare, per ogni $h \in \mathbb{R}$, una base di $\ker f$.
ii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ f è semplice.
iii) Posto $h = 3$, trovare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ formata da autovettori di f.
iv) Posto $h = 0$, determinare una base per il sottospazio vettoriale $\mathrm{im} f \cap \mathcal{W}$, dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid 2x_1 + x_3 = 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

[38] Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare la cui matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare una base per $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.
ii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(-2, h, h^2)$ appartiene a $\mathrm{im} f$.
iii) Rappresentare mediante equazioni il sottospazio vettoriale $f(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 = 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0\}.$$

[39] In V_3 si considerino i vettori $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$. Sia $f : V_3 \longrightarrow V_3$ la funzione così definita:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\| \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \|^2} \right) \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in V_3.$$

i) Provare che f è un'applicazione lineare e precisare il suo significato geometrico.
ii) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
iii) Dopo aver verificato che $\mathcal{B}' = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ è una base di V_3, scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}'$.
iv) Determinare $\ker f$ e $\mathrm{im} f$. Stabilire se f è semplice e, in caso affermativo, trovare una base di V_3 formata da autovettori di f. (Questo punto non richiede calcoli se le risposte vengono adeguatamente giustificate).

[40] Si consideri l'endomorfismo f di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, f è semplice.
ii) Posto $h = 1$, trovare una base per il sottospazio vettoriale $f(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2}) \mid a - b + c = 0 \right\}.$$

[41] Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \quad X \longmapsto B^{-1}XB, \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Trovare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ f è un isomorfismo.
ii) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ f è semplice.
iii) Posto $h = 1$, trovare una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ formata da autovettori di f.

[42] Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che verifica le seguenti condizioni:
a) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$;
b) $f(1, 0, 1) = (1, 2, -3)$;
c) $(1, -1, 0)$ è un autovettore di f relativo all'autovalore -1.
i) Trovare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
ii) Stabilire se f è semplice e, in caso positivo, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

[43] Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}, \; X \longmapsto XB, \; \text{dove } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ h & -6 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$, per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.
ii) Scelto l'unico valore di h per cui f non è un isomorfismo, stabilire se f è semplice.
iii) Trovare una base per $f(\mathcal{W})$, dove:

$$\mathcal{W} = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid {}^tX = -X\},$$

(usare il valore di h determinato nel punto ii).

[44] Dato l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

tale che $f(A) = {}^tA, \; A \in \mathbb{R}^{2,2}$:
i) scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$;
ii) determinare $\ker f$ e $\operatorname{im} f$;
iii) determinare $f(\mathcal{S})$ e $f(\mathcal{A})$, dove $\mathcal{S}$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}$ è il sottospazio vettoriale delle matrici antisimmetriche;
iv) determinare gli autospazi di f;
v) f è semplice? (Giustificare la risposta).

[45] In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino i sottoinsiemi:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_2 = x_3 \right\}$$

delle matrici simmetriche, e:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_1 + x_4 = 0 \right\}$$

delle matrici a traccia nulla.

i) Si dimostri che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$, si determinino le loro dimensioni e una base per ciascuno.
ii) Data l'applicazione lineare:

$$f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$$

così definita:

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 2x_3 & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 & 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

calcolare la dimensioni e una base sia di $\ker f$ sia di $\mathrm{im} f$.
iii) Determinare $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

e $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x'_3 & -x'_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \mid x'_1 + 3x'_3 = 0 \right\}.$$

iv) Detta A la matrice associata a f rispetto ad una base di $\mathcal{S}$ e ad una base di $\mathcal{T}$, si stabilisca se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una matrice diagonale A' simile ad A.

[46] Considerata l'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

tale che:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3),$$

si determini $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove $\mathcal{H}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato da:

$$\mathcal{H} = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 + y_2 = 0\}.$$

[47] Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare di equazioni:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_2 + x_3 \\ x'_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

i) Determinare la dimensione e una base sia di $\ker f$ sia di $\mathrm{im} f$.
ii) Determinare la dimensione e una base di $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

iii) Determinare la dimensione e una base di $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

[48] Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita, relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

i) trovare il valore di h per cui $\ker f$ abbia dimensione 2 e determinarne una base;
ii) posto $h = 1$, determinare autovalori e autovettori di f;
iii) f è semplice?

[49] Dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definito da:

$$f(x, y, z, t) = (0, 0, x, y),$$

i) determinare una base di $\ker f$ e una base di $\operatorname{im} f$.
ii) Calcolare $f(\mathcal{H})$ e $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0\}.$$

iii) Determinare autovalori e autospazi di f. f è semplice?

[50] Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare la cui matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2h \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

i) trovare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
Posto $h = 1$:
ii) stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $(k^2 - 2, k - 2, 2k)$ appartiene a $\operatorname{im} f$;
iii) determinare $f(\mathcal{H})$ e $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\},$$

$$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

iv) Dire se l'endomorfismo di matrice ${}^tAA$ è semplice.

[51] Dato il vettore $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, si consideri la funzione $f : V_3 \longrightarrow V_3$ così definita: $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}$,
i) verificare che f è un'applicazione lineare;
ii) scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$;
iii) determinare una base di $\ker f$ e una base di $\operatorname{im} f$;
iv) determinare una base sia di $f(\mathcal{W})$ sia di $f^{-1}(\mathcal{W})$, dove $\mathcal{W}$ è il sottospazio vettoriale di V_3 costituito da tutti i vettori ortogonali ad $\mathbf{a}$;
v) determinare gli autovalori di f e una base per ciascun autospazio. f è semplice?

[52] Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cosí definita:

$$f(x, y, z, w) = (x - z,\ y + z),$$

sia A la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente.
i) Scrivere la matrice A;
ii) trovare $\ker f$ ed $\operatorname{im} f$;
iii) trovare autovalori ed autovettori della matrice ${}^tAA$;
iv) determinare $f^{-1}(\mathcal{H})$, dove $\mathcal{H} = \{(a, a),\ a \in \mathbb{R}\}$.

[53] In $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$, riferiti alle rispettive basi canoniche, si considerino le applicazioni lineari:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

associate, rispettivamente, alle matrici:

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare la dimensione e una base sia per $\ker(g \circ f)$ sia per $\mathrm{im}(g \circ f)$.
ii) Sia $\mathcal{H}$ l'iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_2 = 0$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cap \ker(g \circ f)$.
iii) Calcolare $(g \circ f)(\mathcal{H})$ e $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{K})$ dove $\mathcal{K}$ é l'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $y_3 = 0$.

[54] In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (3, 1, 0), \ \mathbf{v}_2 = (-1 + a, 0, 1), \ \mathbf{v}_3 = (0, 1, a + 1), \ a \in \mathbb{R}.$$

i) Verificare che, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'insieme $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ é una base di $\mathbb{R}^3$.
ii) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare cosí definita:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= (1, 0, 0, 0) \\ f(\mathbf{v}_2) &= (0, a + 1, 0, 1) \\ f(\mathbf{v}_3) &= (1, a + 2, 0, 0), \end{aligned}$$

scrivere la matrice associata ad f, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.
iii) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{im} f$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

[55] Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_2) &= 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3, \\ f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

rispetto alla base canonica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$.
i) Determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e $\mathrm{im} f$.
ii) Calcolare autovalori e autospazi di f e dire se f è diagonalizzabile.
iii) Determinare i vettori $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$.

[56] Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_2 + 2x_3, -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4),$$

i) trovare una base per $\ker f$ e $\mathrm{im} f$;
ii) trovare una base per i sottospazi vettoriali $\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \cap \ker f$, dove:

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}((1, -1, -1, 2), (7, 3, -2, -1), (-2, 4, 3, -7)).$$

[57] In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2), \ \mathbf{u}_2 = (2, -1, 0), \ \mathbf{u}_3 = (0, 1, -1).$$

i) Provare che $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ é una base di $\mathbb{R}^3$.
ii) Scrivere le componenti del vettore $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}_1$.
iii) Siano $\mathcal{U} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_3)$; definita l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: l'autospazio relativo all'autovalore 2 sia $\mathcal{U}$ e l'autospazio relativo all'autovalore 1 sia $\mathcal{V}$, scrivere la matrice A_1 associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}_1$ e indicare le operazioni da svolgere (ma non fare i calcoli) per determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

[58] In $\mathbb{R}^{2,2}$ si considerino le matrici:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Si verifichi che $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ é una base e si determinino le componenti di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ripetto a $\mathcal{B}'$.
ii) Scrivere la matrice associata, rispetto alla base $\mathcal{B}$, all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ cosí definita:

$$f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{u}_3, \ f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_4.$$

iii) Determinare una base di $\ker f$ e una base di $\operatorname{im} f$.
iv) Calcolare gli autovalori di f e dire se f é semplice.

[59] Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare cosí definita:

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3, \quad f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_3,$$

dove $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ é la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ é la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
i) f é iniettiva?
ii) Calcolare una base e la dimensione di $f(\mathcal{H})$, dove:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}.$$

iii) Calcolare una base e la dimensione di $f^{-1}(\mathcal{K})$, dove:

$$\mathcal{K} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 = 0\}.$$

20.2 Soluzioni

[1]

```
A = {{2, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, -1}};
NullSpace[Transpose[A]]
{}
```

$\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

[2]

```
A = {{1, 0, 1, 1}, {2, 1, 1, 3}, {1, 1, 0, 2}};
NullSpace[A]
{{-1, -1, 0, 1}, {-1, 1, 1, 0}}
RowReduce[Transpose[A]]
{{1, 0, -1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

$\ker f = \mathcal{L}((-1,-1,0,1),(-1,1,1,0)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,2,1),(0,1,1))$.

[3]

```
A = {{2, 1, 0, -1}, {0, 1, 0, 1}, {1, 0, -1, 0}, {2, 1, 0, 0}};
Det[A]
-2
```

$\dim\ker f = 0,\ \dim\operatorname{im} f = 4$.

[4] $M(f_1) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$;

$\ker f_1 = \{\mathbf{x} \in V_3 \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{u}\};\ \operatorname{im} f_1 = \mathbb{R}$;

$$M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$\ker f_2 = \{\mathbf{x} \in V_3 \mid \mathbf{x} \parallel \mathbf{u}\},\ \operatorname{im} f = \{\mathbf{x} \in V_3 \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{u}\}$.

[5]

```
a = LinearSolve[{{1, -1, -1}, {2, -1, 0}, {-1, 1, 0}},
   {{0, 0, 0}, {3, 2, -1}, {3, -1, 2}}]
{{6, 1, 1}, {9, 0, 3}, {-3, 1, -2}}

MatrixForm[A = Transpose[a]]
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

```
Det[A]
0

NullSpace[A]
{{-1, 1, 1}}

Solve[{t + 1, 2t, -1} == x{6, 1, 1} + y{3, 0, 1}, {t, x, y}]
```

$$\left\{\left\{t \to \frac{4}{5}, x \to \frac{8}{5}, y \to -\frac{13}{5}\right\}\right\}$$

```
Det[{{1, 0, 0}, {6, 1, 1}, {3, 0, 1}}]
1

Det[{{1, -1, 1}, {6, 1, 1}, {3, 0, 1}}]
1

LinearSolve[A, {3, 4, -1}]

LinearSolve ::" nosol" : Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{6, 9, 3}, {1, 0, -1}, {1, 3, 2}}, {3, 4, -1}]
```

i) $A = M(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$, quindi f non è ne iniettiva ne suriettiva.

ii) $\ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((6, 1, 1), (3, 0, 1))$. iii) $t = \dfrac{4}{5}$.

iv) $\mathbf{u} = \left(\dfrac{8}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$. v) $(1, 0, 0)$ per esempio.

vi) Sì. vii) Non esistono.

[6]

```
A = {{4, 2, 2}, {4, a^2 + 1, a + 1}, {8, 4, a^2 + 3}};

Solve[Det[A] == 0]
{{a → -1}, {a → -1}, {a → 1}, {a → 1}}

NullSpace[A/.a → -1]
{{-1, 2, 0}}

NullSpace[A/. a → 1]
{{-1, 0, 2}, {-1, 2, 0}}

Solve[{A/.a → -1 }.{x, y, z} == {1, -2, 0}, {x, y, z}]
{}

Det[{{-1, 0, 2}, {-1, 2, 0}, {1, 1, 2}}]
-10

B := {{-1, -1, 1}, {0, 2, -1}, {2, 0, -1}}

NullSpace[B]
{{1, 1, 2}}

Reduce[(A/.a → 1).{x, y, z} == {h, k, l}, {x, y, z}]
2 h == l&&2 k == l&&x == 1/8 (l - 4 y - 4 z)
```

i) $a \neq \pm 1$.

ii) Se $a = -1$: $\ker f = \mathcal{L}((-1, 2, 0)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 1, 2), (1, 0, 2))$;

se $a = 1$: $\ker f = \mathcal{L}((-1, 0, 2), (-1, 2, 0)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 1, 2))$.

iii) Non esistono. iv) Sì (teorema del completamento della base). v) Sì.

vi) Per esempio: $M(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

vii) Se $l = 2h = 2k$, allora $f^{-1}(h, k, l) = \left\{ \left(\frac{1}{8} l - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} t', t, t' \right),\ l, t, t' \in \mathbb{R} \right\}$.

[7]

```
Solve[{1, 2, -1} + {x, y, z} + {2, -3, t} == {2, 2, 0}, {x, y, z, t}]
Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -1, y → 3, z → 1 - t}}

Solve[Det[{{1, -1, 2}, {2, 3, -3}, {-1, 1 - t, t}}] == 0]
{{t → 5}}
```

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

[8] ii) f non é un endomorfismo, g é un endomorfismo.
iii) $\lambda_1 = 0, m_{\lambda_1} = 1, \lambda_2 = 1, m_{\lambda_2} = 3, V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((2, -1, -1, 1)), V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0))$.

iv) No.

[9]

```
u1 = {1, -2, 0, 4}; u2 = {-1, 1, 1, 0}; u3 = {0, 0, 1, 2};
RowReduce[{u1, u2, u3}]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, -2}, {0, 0, 1, 2}}
```

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda_1 & -2\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_2 & -2\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 2\lambda_3 & -2\lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$

[10]

```
A = {{1, 0, 2}, {0, 1, 1}, {2, 1, 5}};
NullSpace[A]
{{-2, -1, 1}}
u = {1, -2, k}; v = {1, 0, 2}; w = {0, 1, 0};
Solve[Det[{u, v, w}] == 0]
{{k → 2}}
k = 1;
p = Transpose[{u, v, w}];
MatrixForm[Inverse[p]]
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
k = 0;
m = LinearSolve[{u, v, w}, {{1, 0, 2}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}]
```

$$\left\{\{1, 0, 4\}, \{0, 0, 1\}, \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[Transpose[m]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

i) $\ker f = \mathcal{L}((-2, -1, 1))$ da cui segue la tesi. ii) $k \neq 2$.

iii) $\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 4\mathbf{w}, \ \mathbf{e}_2 = \mathbf{w}, \ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}.$

iv) Per esempio: $M^{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

v) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

[11]

```
A = {{2, 2, 0}, {1, 0, 1}, {1, 3, -2}};

NullSpace[A]
{{-1, 1, 1}}

LinearSolve[A, {0, 0, 1}]

LinearSolve ::" nosol" : Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{2, 2, 0}, {1, 0, 1}, {1, 3, -2}}, {0, 0, 1}]

Det[{A.{1, 0, 1}, A.{0, 1, 1}, {4, 3, -2}}]
4

{}
```

i), ii) f non è ne iniettiva ne suriettiva: $\ker f = \mathcal{L}((-1,1,1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((2,0,3),(0,1,-2))$,

per esempio $\mathbf{e}_3$ non ha controimmagine, $f(-1,1,1) = \mathbf{0}$ e $f(-2,2,2) = \mathbf{0}$.

iii) No.

[12]

```
A = {{1, 2, 3/2, 0}, {t, -t, 0, 0}, {1, 1, 1, -1}};

Reduce[A.{x, y, z, w} == {0, 0, 0}, {x, y, z, w}]
t == 0&&w == 1/2 (-2 y - z)&&x == 1/2 (-4 y - 3 z) || w == 0&&x == y&&z == -2 y

Solve[a{-2, 1, -1, 0} + b{-3, 0, 2, -2} == {k + 3, k, 1, 2k}]
{}

Reduce[A.{x, y, z, w} == {1, 0, -1}, {x, y, z, w}]
t == 0&&w == 1/2 (4 - 2 y - z)&&x == 1/2 (2 - 4 y - 3 z) ||
  w == 5/3&&x == y&&z == -2/3 (-1 + 3 y)
```

i) Se $t = 0$: $\ker f = \mathcal{L}((-2,1,0,-1),(-3,0,2,-1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,0,1),(2,0,1))$;

se $t \neq 0$: $\ker f = \mathcal{L}((1,1,-2,0))$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$.

ii) No; iii) se $t = 0$: $((-2,1,0,-1),(-3,0,2,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;

se $t \neq 0$: $((1,1,-2,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

iv) Se $t = 0$: $f^{-1}((1,0,-1)) = \left(1 - 2t_1 - \frac{3}{2}t_2, t_1, t_2, 2 - t_1 - \frac{1}{2}t_2\right)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

se $t \neq 0$: $f^{-1}((1,0,-1)) = \left(t, t, \frac{2}{3} - 2t, \frac{5}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

[13]

```
A = {{0, 3, 1}, {0, 0, 2}, {1, -1, 0}, {0, 1, 0}};
NullSpace[A]
{}
Solve[A.{x, y, z} == 3A.{1, 2, 1}, {x, y, z}]
{{x → 3, y → 6, z → 3}}
Solve[A.{x, y, z} == {1, 2, 3, 4}, {x, y, z}]
{}
```

i) $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ii) Sì; iii) $\mathbf{v} = (3, 6, 3)$. iv) No.

[14] i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

[15]

```
A = {{1, 0, 1, 0, 0}, {2, 1, 0, -1, 1}, {0, 3, -1, 1, 2}};
NullSpace[A]
{{-1, -3, 1, 0, 5}, {4, -3, -4, 5, 0}}
RowReduce[{A.{1, -1, 0, 0, 0}, A.{0, 1, 0, 1, 1}, A.{0, 0, 3, 0, 0}}]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
b = {x1, x2, x3, x4, x5} + s {-1, -3, 1, 0, 5} + t {0, -3, 0, 1, 4};
Simplify[A.b == A.{x1, x2, x3, x4, x5}]
True
```

i) $\ker f = \mathcal{L}((-1, -3, 1, 0, 5), (4, -3, -4, 5, 0))$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$. ii) $f(\mathcal{V}) = \mathbb{R}^3$.

[16] i) No. ii) Sì, è suriettiva, quindi il nucleo ha dimensione 8 ed è costituito da tutte le matrici aventi traccia nulla.

[17]

```
A = {{1, 0, h, 0}, {0, 1, 0, h}, {3, 0, h - 2, 0}, {0, 3, 0, h - 2}};

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
h == -1&&x1 == x3&&x2 == x4||
  x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&x4 == 0&&1 + h ≠ 0

B = A/. h → -1;

Eigensystem[B]
{{-2, -2, 0, 0}, {{0, 1, 0, 3}, {1, 0, 3, 0}, {0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}}}

Solve[{4x1 + x2 - x3 == 0, 3x2 - 3x3 - 4x4 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -x4/3, x2 → x3 + 4 x4/3}}

Reduce[B . {x1, x2, x3, x4} == {-t/3, 4t/3 + z, z, t}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == 1/3 (-t + 3 x3)&&x2 == 1/3 (t + 3 x4)&&z == -t
```

i) Se $h \neq -1$: $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^{2,2}$,

se $h = -1$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $\lambda_1 = -2$, $m_{\lambda_1} = 2$, $V_{\lambda_1} = \operatorname{im} f$, $\lambda_2 = 0$, $m_{\lambda_2} = 2$, $V_{\lambda_2} = \ker f$, f è semplice.

iii) $f^{-1}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

[18]

```
A = {{1, 17, 10, 9}, {0, 1, 0, 0}, {0, 11, 8, 6}, {0, -13, -8, -6}};

NullSpace[A]
{{-6, 0, -3, 4}}

A.{1, 0, 0, 4}
{37, 0, 24, -24}

A.{0, 0, 1, 2}
{28, 0, 20, -20}

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {-t1, t2, 0, t1}, {x1, x2, x3, x4}]
2 t2 == -t1&&x1 == 1/8 (5 t1 - 12 x4)&&x2 == -t1/2&&x3 == 1/16 (11 t1 - 12 x4)

Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 2},
  {{-6, 0, -3, 4}, {0, -1, -1, 3}, {1, 0, 0, 0}, {-1, 0, -1, 1}}}
```

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 8 & 6 \\ 0 & -13 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

ii) $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 37 & 0 \\ 24 & -24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\right)$,

$f^{-1}(\mathcal{K}) = \left(\begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right)$.

iv) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1, m_{\lambda_2} = 2;\ \lambda_3 = 2$.

v) f è semplice, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[19]

```
LinearSolve[{{1,1,0},{0,2,1},{1,-1,1}},
  {{1,2+h,-h-1},{1,3,0},{-2,h-3,3-h}}]
{{0,h,-h},{1,2,-1},{-1,-1,2}}

MatrixForm[c = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Solve[Det[c] == 0]
{{h -> 0}}

b = Eigenvalues[c]
```

$$\left\{1, \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{9+8h}\right), \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{9+8h}\right)\right\}$$

```
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i,3},{j,3}]];

Map[Solve,%]

Solve ::" ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found

Solve ::" ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found
```

$$\left\{\{\{\}\}, \{\{h \to -1\}\}, \{\}, \{\{h \to -1\}\}, \{\{\}\}, \left\{\left\{h \to -\frac{9}{8}\right\}\right\}, \{\}, \left\{\left\{h \to -\frac{9}{8}\right\}\right\}, \{\{\}\}\right\}$$

```
Eigensystem[c/.h -> -1]
{{1,1,2},{{-1,0,1},{1,1,0},{-1,-1,1}}}

Eigensystem[c/.h -> -9/8]
```

$$\left\{\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}, \left\{\{0,1,1\}, \left\{-\frac{4}{3}, -1, 1\right\}, \{0,0,0\}\right\}\right\}$$

ii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ h & 2 & -1 \\ -h & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$; iii) a) $h \neq 0$; b) $h > -\dfrac{9}{8}$.

[20]

```
m1 = {{0, 1, -1}, {3, 1, -1}, {1, 1, 1}};
m2 = {{0, 0, 0}, {9, 0, 0}, {3, 2, 4}};

LinearSolve[m1, m2]
{{3, 0, 0}, {0, 1, 2}, {0, 1, 2}}

MatrixForm[a = Transpose[%]]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
Eigensystem[a]
{{0, 3, 3}, {{0, -1, 1}, {0, 1, 2}, {1, 0, 0}}}
```

$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. ii) Sì.

[21]

```
m = {{a, a, a}, {b, b, b}, {0, 0, 0}};

Eigensystem[m]
```

$$\left\{\{0, 0, a+b\}, \left\{\{-1, 0, 1\}, \{-1, 1, 0\}, \left\{\frac{a}{b}, 1, 0\right\}\right\}\right\}$$

$A = M(f) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R};$

A è diagonalizzabile se $a + b \neq 0$, oppure se $a = b = 0$. Nel primo caso una base di autovettori è data da: $((-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (a, b, 0))$.

[22]

```
i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0}; k = {0, 0, 1}; x = {x1, x2, x3};

Cross[i, x] + Cross[2j, x] - Cross[k, x]
{x2 + 2 x3, -x1 - x3, -2 x1 + x2}

m = {{0, 1, 2}, {-1, 0, -1}, {-2, 1, 0}};

NullSpace[m]
{{-1, -2, 1}}

Eigensystem[m]
```

$$\left\{\left\{0, -i\sqrt{6}, i\sqrt{6}\right\}, \left\{\{-1, -2, 1\}, \left\{\frac{1}{5} i\left(-i + 2\sqrt{6}\right), -\frac{1}{5} i\left(2i + \sqrt{6}\right), 1\right\}, \left\{-\frac{1}{5} i\left(i + 2\sqrt{6}\right), \frac{1}{5} i\left(-2i + \sqrt{6}\right), 1\right\}\right\}\right\}$$

i) La linearità segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

$\ker f = \mathcal{L}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{k})$. iii) No.

[23]

```
a = {{1, -1, 2}, {1, -2, 3}}; b = {{-3, -4, 3, 0}, {-5, -9, 4, -1}};
x = {{x1, x2, x3, x4}, {x5, x6, x7, x8}, {x9, x10, x11, x12}};
Reduce[a.x == b]
x1 == -1 - x9&&x10 == -5 + x6&&x11 == 1 + x7&&x12 == -1 + x8&&
  x2 == 6 - x6&&x3 == 1 - x7&&x4 == 2 - x8&&x5 == 2 + x9
```

$$M^{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - 1 & -\lambda_2 + 1 & -\lambda_3 + 2 & -\lambda_4 + 1 \\ \lambda_1 + 2 & \lambda_2 + 5 & \lambda_3 - 1 & \lambda_4 + 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

[24]

```
x = {{x1, x2}, {x3, x4}};
1/2 {x + Transpose[x]}
{{{x1, (x2 + x3)/2}, {(x2 + x3)/2, x4}}}
a = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 1/2, 0}, {0, 1/2, 1/2, 0}, {0, 0, 0, 1}};
NullSpace[a]
{{0, -1, 1, 0}}
Eigensystem[a]
{{0, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) La linearità segue dalle proprietà della matrice trasposta.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

iii) $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

[25]

```
a = {{2, 14, -7}, {0, -2, 2}, {0, -6, 5}};
Eigensystem[a]
{{1, 2, 2}, {{-7, 2, 3}, {0, 1, 2}, {1, 0, 0}}}
```

$$A' = P^{-1}AP, \quad P = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

[26]

```
m1 = {{2, 0, -1, 1}, {1, 2, 0, -1}, {0, -1, 3, 1}, {1, 2, 1, -2}};
m2 = {{2h, -2, -1, -1},
   {h, -2h, 4, 1}, {0, h + 6, 1, -1}, {h, -2h + 2, 5, 2}};

MatrixForm[M = Transpose[LinearSolve[m1, m2]]]
```

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Reduce[M.{x, y, z, t} == {0, 0, 0, 0}, {x, y, z, t}]
h == -4&&t == 0&&x == 0&&z == -2 y||h == 0&&t == 0&&y == 0&&z == 0||
  t == 0&&x == 0&&y == 0&&z == 0&&4 + h ≠ 0

Solve[Det[M] == 0]
{{h → -4}, {h → 0}}

MatrixForm[Simplify[Inverse[M]]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4+h} & \frac{2}{4+h} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4+h} & \frac{h}{4+h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```
b = Eigenvalues[M]
```

$$\left\{-1, h, \frac{1}{2}\left(1-h-\sqrt{17+2h+h^2}\right), \frac{1}{2}\left(1-h+\sqrt{17+2h+h^2}\right)\right\}$$

```
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {}, {{h → -1}}, {{}}, {{h → -1}},
  {{h → 2}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}}, {{h → -1 - 4 i}, {h → -1 + 4 i}},
  {}, {{h → 2}}, {{h → -1 - 4 i}, {h → -1 + 4 i}}, {{}}}

Eigensystem[M/.h → -1]
{{-1, -1, -1, 3},
  {{0, 0, 0, 1}, {0, -1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}}}

Eigensystem[M/.h → 2]
{{-3, -1, 2, 2}, {{0, -2, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 2, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$

ii) Se $h \neq 0, h \neq -4$: $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^{2,2}$;

se $h = 0$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

se $h = -4$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

iii) Se $h \neq 0, h \neq -4$: esiste f^{-1}, $M(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4+h} & \frac{2}{4+h} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4+h} & \frac{h}{4+h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

iv) f è semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$.

[27]

```
a = {{1, 1, 1, 1}, {0, 1, -1, 3}, {2, 2, -1, -1}};
b = {{1, 2, -3, 0}, {1, 1, 1, -2}};

LinearSolve[Transpose[a], Transpose[b]]

LinearSolve ::" nosol" : Linear equation encountered which has no solution.
LinearSolve[{{1, 0, 2}, {1, 1, 2}, {1, -1, -1}, {1, 3, -1}},
  {{1, 1}, {2, 1}, {-3, 1}, {0, -2}}]
```

Non esiste g.

[28] i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

iii) Non ne esistono.

[29]

```
m1 = {{1, 2, -1}, {0, 1, -1}, {1, 2, 0}};
m2 = {{-8, -10, -10}, {-6, -8, -10}, {-5, -7, -6}};

a = Transpose[LinearSolve[m1, m2]]
{{1, -3, 3}, {3, -5, 3}, {6, -6, 4}}

MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

```
NullSpace[a]
{}

a.{-3, 1, 0}
{-6, -14, -24}

Inverse[a].{-3, 1, 0}
{0, -2, -3}

Inverse[a].{0, 0, 1}
```

$$\left\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right\}$$

```
Eigensystem[a]
{{-2, -2, 4}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, 1, 2}}}
```

i) Sí.

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. iii) $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{im} f = \mathcal{T}$.

iv) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$, $f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

v) Sì (la molteplicità degli autovalori coincide con la dimensione degli autospazi);

vi) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

[30] $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

[31]

```
x = {x1, x2, x3}; a = {1, -1, 1}; b = {1, 0, 1};

Simplify[Cross[a, x] + b.a Cross[b, x]]
{-3 x2 - x3, 3 (x1 - x3), x1 + 3 x2}

a = {{0, -3, -1}, {3, 0, -3}, {1, 3, 0}};

NullSpace[a]
{{3, -1, 3}}

a.{-1, 0, 1}
{-1, -6, -1}

a.{1, 1, 0}
{-3, 3, 4}

Reduce[a.x == l b, x]
l == 0&&x1 == x3&&x2 == -x3/3

p = {{1, 1, 0}, {1, -1, 0}, {0, 1, 2}};

MatrixForm[Inverse[p].a.p]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

```
Eigensystem[a]
```

$$\left\{\left\{0, -i\sqrt{19}, i\sqrt{19}\right\}, \left\{\{3,-1,3\}, \left\{\frac{1}{10}\left(-9 - i\sqrt{19}\right), -\frac{3}{10} i\left(i + \sqrt{19}\right), 1\right\}, \left\{\frac{1}{10}\left(-9 + i\sqrt{19}\right), \frac{3}{10} i\left(-i + \sqrt{19}\right), 1\right\}\right\}\right\}$$

i) La linearità di f segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

ii) $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) $\ker f = \mathcal{L}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(3\mathbf{j} + \mathbf{k}, -\mathbf{i} + \mathbf{k})$.

iv) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}(\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}, -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \ker f$.

v) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$. vi) No.

[32]

```
a = {{1, 2}, {1, 0}}; b = {{3, 1}, {-1, 1}};

(a.b).{1, 1}
{4, 4}

Solve[a.{x, y} == b.{x, y}, {x, y}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → y/2}}

Solve[(a.b).{x, y} == (b.a).{x, y}, {x, y}]

Solve::"svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → -y}}
```

i) $(f \circ g)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 4\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$. ii) $\mathbf{x} = (\lambda, 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} = (t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$.

[33] $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\ker f = \mathcal{L}((-1, 1, 2))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1, 0, 2), (1, 2, -4))$,

per esempio: $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker g = \mathcal{L}((0, 0, 1))$, $\operatorname{im} g = \operatorname{im} f$.

[34]

```
a = {{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}};

Inverse[a]
{{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}}

NullSpace[a]
{}

Eigensystem[a]
{{-1, 1, 1, 1}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) La linearità di f segue dalle proprietà della matrice trasposta.

ii) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. iii) $M(f^{-1}) = M(f)$.

iv) f è semplice; $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

[35]

```
m = {{1, -1, 1, 1}, {2, 1, 0, 1}, {3, 0, 1, k}};

Reduce[m.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
k == 2&&x2 == -2 x1 - x4&&x3 == -3 x1 - 2 x4 ||
  x2 == -2 x1&&x3 == -3 x1&&x4 == 0&& - 2 + k ≠ 0
```

$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$;

se $k \neq 2$: $\operatorname{im} f = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$, $\ker f = \mathcal{L}((-1, 2, 3, 0))$;

se $k = 2$: $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $\ker f = \mathcal{L}((-2, 1, 0, 3), (1, 0, 1, -2))$.

[36]

```
a = {{1, 0, -1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, -1}};
b = {{2, -1, -3}, {0, 2, 2}, {1, -1, -2}, {1, 3, 2}};

m = Transpose[LinearSolve[a, b]]
{{2, -1, 0, 1}, {2, 3, 3, -1}, {0, 4, 3, -2}}

NullSpace[m]
{{-1, 2, 0, 4}, {-3, -6, 8, 0}}

Solve[m.{x1, x2, x3, x4} == {-2t, -t, t}, {x1, x2, x3, x4}]
Solve ::'' svars'' : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → -7 t/8 - 3 x3/8 - x4/4, x2 → t/4 - 3 x3/4 + x4/2}}
```

i) Esiste una sola f perchè i vettori: $(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

$M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}'$ è la base canonica di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2,2})$.

ii) $\ker f = \mathcal{L}((3, 6, -8, 0), (1, -2, 0, -4))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right)$.

iii) $f^{-1}(\mathcal{W}) = \ker f \oplus \mathcal{L}((-7, 2, 0, 0))$.

[37]

```
a = {{1, h}, {1, -1}}; x = {{x1, x2}, {x3, x4}};

b = a . x - x . a
{{-x2 + h x3, -h x1 + 2 x2 + h x4}, {x1 - 2 x3 - x4, x2 - h x3}}

Reduce[b == {{0, 0}, {0, 0}}, {x1, x2, x3, x4}]
x1 == 2 x3 + x4&&x2 == h x3

m = {{0, -1, h, 0}, {-h, 2, 0, h}, {1, 0, -2, -1}, {0, 1, -h, 0}};

c = Eigenvalues[m]
{0, 0, -2 √(1 + h), 2 √(1 + h)}

Flatten[Table[c[[i]] == c[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}}, {{}},
  {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}},
  {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{h → -1}}, {{}}}

Eigensystem[m/.h → -1]
{{0, 0, 0, 0}, {{1, 0, 0, 1}, {2, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}

Eigensystem[m/.h → 3]
{{-4, 0, 0, 4},
  {{-1, -1, 1, 1}, {1, 0, 0, 1}, {2, 3, 1, 0}, {-3, 9, -1, 3}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & h & 0 \\ -h & 2 & 0 & h \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -h & 0 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$

$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & h \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$ ii) $h > -1.$

iii) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right).$

iv) $\operatorname{im} f \cap \mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right).$

[38]

```
A = {{1, 0, -1, 2, 3}, {2, -1, 0, 1, 2}, {-3, 1, 1, -3, -5}};

NullSpace[A]
{{-3, -4, 0, 0, 1}, {-2, -3, 0, 1, 0}, {1, 2, 1, 0, 0}}

m = {{0, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-2, h, h^2}};

Solve[Det[m] == 0]
{{h → -2}, {h → 1}}
```

i) $\ker f = \mathcal{L}((-3, -4, 0, 0, 1), (-2, -3, 0, 1, 0), (1, 2, 1, 0, 0))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((0, -1, 1), (-1, 0, 1))$.

ii) $h = -2, \ h = 1.$ iii) $f(\mathcal{W}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$

[39]

```
a = {1, -1, 0}; b = {0, 1, 1}; X = {x, y, z};

Simplify[X - ((X.Cross[a, b])/(Cross[a, b].Cross[a, b]))Cross[a, b]]
{1/3 (2 x - y + z), 1/3 (-x + 2 y + z), 1/3 (x + y + 2 z)}

m = {{2/3, -1/3, 1/3}, {-1/3, 2/3, 1/3}, {1/3, 1/3, 2/3}};

NullSpace[m]
{{-1, -1, 1}}

Eigensystem[m]
{{0, 1, 1}, {{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

i) f associa ad ogni vettore $\mathbf{x} \in V_3$ la sua proiezione ortogonale sul piano vettoriale individuato da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$.

ii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ iii) $M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

iv) $\ker f = \mathcal{L}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$, $\mathrm{im} f = \mathcal{L}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

f è semplice, $\mathcal{B} = (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{k}, -\mathbf{i} + \mathbf{j})$. I risultati conseguiti nel punto iv) si possono ottenere tenendo conto del significato geometrico di f; infatti gli autospazi di f sono, rispettivamente, generati dai vettori paralleli e ortogonali a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

[40]

```
B = LinearSolve[{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}},
   {{1, 0, h}, {0, 2, 1}, {1 + h, 0, 1 + h}}];
A = Transpose[B]
{{1, 0, h}, {0, 2, 0}, {h, 1, 1}}

b = Eigenvalues[A]
{2, 1 - h, 1 + h}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h → -1}}, {{h → 1}}, {{h → -1}},
  {{}}, {{h → 0}}, {{h → 1}}, {{h → 0}}, {{}}}
Eigensystem[A /. h → -1]
{{0, 2, 2}, {{1, 0, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

Eigensystem[A /. h → 1]
{{0, 2, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

Eigensystem[A /. h → 0]
{{1, 1, 2}, {{0, 0, 1}, {1, 0, 0}, {0, 1, 1}}}

(A /. h → 1).{1, 0, -1}
{0, 0, 0}

(A /. h → 1).{0, 1, 1}
{1, 2, 2}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$;

f è semplice per $h \notin \{-1, 1\}$; ii) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

[41]

```
X = {{x1, x2}, {x3, x4}}; B = {{1, 0}, {h, -1}};

Simplify[Inverse[B].X.B]
{{x1 + h x2, -x2}, {h^2 x2 - x3 + h (x1 - x4), -h x2 + x4}}

A := {{1, h, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {h, h^2, -1, -h}, {0, -h, 0, 1}}

Solve[Det[A] == 0]
{}

Eigensystem[A]
{{-1, -1, 1, 1},
  {{-1, 2/h, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, 1}, {2/h, 0, 1, 0}}}
Eigensystem[A /. h → 0]
{{-1, -1, 1, 1}, {{0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ h & h^2 & -1 & -h \\ 0 & -h & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$;

f è un isomorfismo per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

ii) f è semplice per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

iii) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

[42]

```
a = {{-1, -1, 1}, {1, 0, 1}, {1, -1, 0}};
b = {{0, 0, 0}, {1, 2, -3}, {-1, 1, 0}};

LinearSolve[a, b]
{{0, 1, -1}, {1, 0, -1}, {1, 1, -2}}

MatrixForm[A = Transpose[%]]
 0   1   1
 1   0   1
-1  -1  -2

Eigensystem[A]
{{-1, -1, 0}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}}}
```

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

ii) f è semplice, $\mathcal{B} = ((1,1,-1),(-1,1,0),(-1,0,1))$.

[43]

```
X = {{x1, x2}, {x3, x4}}; B = {{-1, 2}, {h, -6}};

X.B
{{-x1 + h x2, 2 x1 - 6 x2}, {-x3 + h x4, 2 x3 - 6 x4}}

A = {{-1, h, 0, 0}, {2, -6, 0, 0}, {0, 0, -1, h}, {0, 0, 2, -6}};

Reduce[A.{x1, x2, x3, x4} == {0, 0, 0, 0}]
h == 3&&x1 == 3 x2&&x3 == 3 x4||
  x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&x4 == 0&& -3 + h ≠ 0

(A/.h → 3).{0, 1, -1, 0}
{3, -6, 1, -2}

Eigensystem[A/.h → 3]
{{-7, -7, 0, 0},
  {{0, 0, -1, 2}, {-1, 2, 0, 0}, {0, 0, 3, 1}, {3, 1, 0, 0}}}
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & h & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$:

se $h \neq 3$: f è un isomorfismo,

se $h = 3$: $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

ii) $h = 3$: f è semplice. iii) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

[44] i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ii) $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^{2,2}$;

iii) $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$; iv) $\mathcal{S}, \mathcal{A}$; v) sì perchè $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathbb{R}^{2,2}$.

[45]

```
A = {{0, -2, -2}, {2, 4, 2}, {-2, -2, 0}};

NullSpace[A]
{{1, -1, 1}}

A.{-1, 0, 1}
{-2, 0, 2}

A.{-1, 1, 0}
{-2, 2, 0}

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {-3t1, t2, t1}, {x1, x2, x3}]
t2 == 2 t1&&x1 == 1/2 (-t1 - 2 x2)&&x3 == 1/2 (3 t1 - 2 x2)

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{1, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

i) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ base di $\mathcal{S}$,

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ base di $\mathcal{T}$.

ii) $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

iii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$,

$f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

iv) $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

[46]

```
A = {{1, 1, 0}, {2, 1, 1}, {1, 0, 1}, {0, 1, -1}};

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {t1, -t1, t2, t3}, {x1, x2, x3}]
t2 == -2 t1&&t3 == 3 t1&&x1 == -2 t1 - x3&&x2 == 3 t1 + x3
```

$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$

$f^{-1}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((-2,3,0),(-1,1,1)).$

[47]

```
A = {{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {2, 1, 1}, {1, 2, 2}};

NullSpace[A]
{{0, -1, 1}}

A.{-2, 1, 0}
{-1, 1, -3, 0}

Reduce[A.{y1, y2, y3} == {-2x2, x2, x3, x4}, {y1, y2, y3}]
x3 == -5 x2&&x4 == -x2&&y1 == -3 x2&&y2 == x2 - y3
```

i) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\ker f = \mathcal{L}((0,-1,1)), \quad \mathrm{im} f = \mathcal{L}((1,0,2,1),(1,1,1,2)).$

ii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1,1,1,2),(-1,1,-3,0)).$

iii) $f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((0,-1,1),(-3,1,0)).$

[48]

```
A = {{0, h, h}, {1, h^2 - h, 1}, {h - 1, 0, h - 1}};

Reduce[A.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
h == 0&&x1 == -x3||h == 0&&x1 == x2&&x3 == -x2||
  h == 1&&x1 == x2&&x3 == -x2||
  x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&& - 1 + h ≠ 0&&h ≠ 0

Eigensystem[A/.h → 1]
{{-1, 0, 1}, {{-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}, {1, 1, 0}}}
```

i) $h = 0$, $\ker f = \mathcal{L}((-1,0,1),(0,1,0)).$

ii) $\lambda_1 = -1,\ V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,1,0)),\ \lambda_2 = 0,\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1,-1,1)),\ \lambda_3 = 1,\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,1,0)).$

iii) f è semplice.

[49] i) $\ker f = \operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

ii) $f(\mathcal{H}) = \operatorname{im} f$, $f^{-1}(\mathcal{H}) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\}$.

iii) $\lambda = 0$, $m_\lambda = 4$, $V_\lambda = \ker f$, f non è semplice.

[50]

```
A = {{2, 0, 1, -3}, {1, -1, 0, 1}, {-3, 1, -1, 2h}}; X = {x1, x2, x3, x4};

Reduce[A.X == {0, 0, 0}, X]
h == 1&&x2 == x1 + x4&&x3 == -2 x1 + 3 x4 ||
  x2 == x1&&x3 == -2 x1&&x4 == 0&& - 1 + h ≠ 0

h = 1;

Solve[{k^2 - 2, k - 2, 2k} == x{2, 1, -3} + y{0, -1, 1}]
{{y → 1/2, x → -1/2, k → 1}, {y → 13, x → 7, k → -4}}

Solve[{x1 - x2 == 0, x3 + x4 == 0}, X]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → x2, x3 → -x4}}

A.{1, 1, 0, 0}
{2, 0, -2}

A.{0, 0, -1, 1}
{-4, 1, 3}

Reduce[A.X == x{1, -2, 0} + y{0, 2, 1}, X]
x == 3 y&&x2 == x1 + x4 + 4 y&&x3 == -2 x1 + 3 x4 + 3 y
```

i) Se $h = 1$: $\ker f = \mathcal{L}((1,1,-2,0),(0,1,3,1))$, $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((2,1,-3),(0,-1,1))$;

se $h \neq 1$: $\ker f = \mathcal{L}((1,1,-2,0))$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$.

ii) $k = -4$ e $k = 1$.

iii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((2,0,-2),(4,-1,-3))$ e $f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((1,1,-2,0),(0,4,3,0),(0,1,3,1))$.

iv) Sì perchè la matrice ${}^tAA$ è simmetrica.

[51]

```
a = {2, -1, 1}; X = {x1, x2, x3};

Cross[2X, a]
{2 x2 + 2 x3, -2 x1 + 4 x3, -2 x1 - 4 x2}

A = {{0, 2, 2}, {-2, 0, 4}, {-2, -4, 0}};

NullSpace[A]
{{2, -1, 1}}

A.{1, 2, 0}
{4, -2, -10}

A.{0, 1, 1}
{4, 4, -4}

Reduce[A.X == l{1, 2, 0} + m{0, 1, 1}, X]
x1 == 1/2 (-2 l - m + 4 x3) && x2 == 1/2 (l - 2 x3)

Eigensystem[A]
{{0, -2 i √6, 2 i √6},
  {{2, -1, 1}, {1/5 (-2 + i √6), 1/5 i (-i + 2 √6), 1},
   {1/5 (-2 - i √6), -1/5 i (i + 2 √6), 1}}}
```

i) La linearità di f segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.

ii) $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) $\ker f = \mathcal{L}((2,-1,1)),\ \operatorname{im} f = \mathcal{L}((0,1,1),(1,0,-2))$.

iv) $f(\mathcal{W}) = \mathcal{L}((4,-2,-10),(4,4,-4)),\ f^{-1}(\mathcal{W}) = \left\{\left(-a - \dfrac{1}{2}b + 2z,\ \dfrac{1}{2}a - z, z\right),\ a,b,z \in \mathbb{R}\right\}$.

v) $\lambda_1 = 0,\ V_{\lambda_1} = \ker f$, f non è semplice.

[52] i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

ii) $\ker f = \mathcal{L}((1,-1,1,0),(0,0,0,1)),\ \operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$;

iii) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3;\ V_{\lambda_1} = \ker f;\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,1,0,0));\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,-1,-2,0))$;

iv) $f^{-1}(\mathcal{H}) = \ker f + \mathcal{L}((1,1,0,0))$.

[53]

```
A = {{-1, 2, 0, 3}, {0, -1, 2, -1}}; B = {{1, -2}, {2, 1}, {1, 0}};

MatrixForm[B.A]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
P = NullSpace[B.A]
{{1, -1, 0, 1}, {4, 2, 1, 0}}

RowReduce[Transpose[B.A]]
```

$$\left\{\left\{1, 0, \frac{1}{5}\right\}, \left\{0, 1, \frac{2}{5}\right\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\right\}$$

```
Solve[x{1, 0, 0, 0} + y{0, 0, 1, 0} + z{0, 0, 0, 1} == t P[[1]] + w P[[2]],
  {x, y, z, t, w}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x → 6 w, y → w, z → 2 w, t → 2 w}}

Reduce[B.A.{x1, x2, x3, x4} == {t1, t2, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
```

$$t1 == -2\, t2 \&\& x1 == 2\, x2 + 3\, x4 \&\& x3 == \frac{1}{2}(t2 + x2 + x4)$$

i) $\ker(g \circ f) = \mathcal{L}((4, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$,

$\mathrm{im}(g \circ f) = \mathcal{L}((2, -1, 0), (5, 0, 1))$.

ii) $\mathcal{G} = \mathcal{L}((6, 0, 1, 2))$.

iii) $(g \circ f)(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((1, 2, 1), (2, -1, 0))$;
$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((6, 0, 1, 1), (4, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 0))$.

[54]

```
A = {{3, 1, 0}, {-1 + a, 0, 1}, {0, 1, a + 1}};

Det[A]
-2 - a^2

Solve[% == 0]
{{a -> -i √2}, {a -> i √2}}

B = {{1, 0, 0, 0}, {0, a + 1, 0, 1}, {1, a + 2, 0, 0}};

P = LinearSolve[A, B]
{{0, (-1 + a + a^2)/(2 + a^2), 0, (1 + a)/(2 + a^2)}, {1, -(3 (-1 + a + a^2))/(2 + a^2), 0, -(3 (1 + a))/(2 + a^2)},
{0, (1 + 4 a + a^2)/(2 + a^2), 0, 3/(2 + a^2)}}

Q = Transpose[P]
{{0, 1, 0}, {(-1 + a + a^2)/(2 + a^2), -(3 (-1 + a + a^2))/(2 + a^2), (1 + 4 a + a^2)/(2 + a^2)}, {0, 0, 0},
{(1 + a)/(2 + a^2), -(3 (1 + a))/(2 + a^2), 3/(2 + a^2)}}

X = Transpose[B].Inverse[Transpose[A]]//FullSimplify
{{0, 1, 0}, {1 + (-3 + a)/(2 + a^2), -(3 (-1 + a + a^2))/(2 + a^2), (1 + a (4 + a))/(2 + a^2)}, {0, 0, 0},
{(1 + a)/(2 + a^2), -(3 (1 + a))/(2 + a^2), 3/(2 + a^2)}}

Reduce[X.{x1, x2, x3} == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
a == -2&&x2 == 0&&x3 == x1/3 || 2 + a^2 ≠ 0&&2 + a ≠ 0&&x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0
```

ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-1+a+a^2}{2+a^2} & -\dfrac{3(-1+a+a^2)}{2+a^2} & \dfrac{1+4a+a^2}{2+a^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1+a}{2+a^2} & -\dfrac{3(1+a)}{2+a^2} & \dfrac{3}{2+a^2} \end{pmatrix}.$

iii) Se $a \neq -2$: $\dim \mathrm{im} f = 3$, $\mathrm{im} f = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,a+1,0,1),(1,a+2,0,0))$;
se $a = -2$: $\dim \mathrm{im} f = 2$, $\mathrm{im} f = \mathcal{L}((1,0,0,0),(0,-1,0,1))$.

[55] i) $\ker f = \mathcal{L}((-2,1,-4))$, $\mathrm{im} f = \mathcal{L}((1,0,2),(0,1,0))$;

ii) $\lambda_1 = 0$, $m_{\lambda_1} = 2$, $V_{\lambda_1} = \ker f$, $\lambda_2 = 1$, $m_{\lambda_2} = 1$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,0,2))$,
f non é diagonalizzabile;

iii) non esistono vettori $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$ perché 2 non é un autovalore di f, quindi solo $f(\mathbf{o}) = 2\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

[56] $\ker f = \mathcal{L}((1,1,0,1),(0,2,1,-9))$, $\mathrm{im} f = \mathcal{L}((-5,1,-3),(4,-1,2))$.

ii) $\mathcal{W} = \mathcal{L}((1,-1,-1,2),(0,2,1,-3))$, $\mathcal{W} \cap \ker f = \mathcal{L}((3,5,1,-6))$.

[57] i) Sia $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}(P) = 3$;

ii) $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$;

iii) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1 = P^{-1}AP$, quindi: $A = PA_1P^{-1}$.

[58] i) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = -3\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_4$.

ii) $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) $\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\dim \ker f = 2$;

$\mathrm{im} f = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\dim \mathrm{im} f = 2$;

iv) l'unico autovalore é $\lambda_1 = 0$, $m_{\lambda_1} = 2$, quindi f non é semplice.

[59] i) f é iniettiva;

ii) $f(\mathcal{H}) = \mathcal{L}((-1, 1, 0))$, $\dim f(\mathcal{H}) = 1$;

iii) $f^{-1}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}((-1, 1))$, $\dim f^{-1}(\mathcal{K}) = 1$.

Capitolo 21

Diagonalizzazione di Matrici – Esercizi

21.1 Esercizi

Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:

[1] $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

[2] $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

[3] $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

[4] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

[5] $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

[6] $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

[7] $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

[8] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

[9] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R},$$

i) determinare per quali valori del parametro a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 1$.
ii) Posto $a = 0$, esistono 3 autovettori di A linearmente indipendenti?

[10] Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Determinare (se esiste) una matrice P tale che $P^{-1}AP = B$.
ii) Esiste una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = B$?

[11] Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R},$$

i) trovare il valore di h per cui A abbia rango minore di 3.
Posto $h = 1$ nella matrice A:
ii) determinare autovalori ed autovettori di A;
iii) A è diagonalizzabile?

[12] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

trovare:
i) gli autovalori e gli autospazi di A;
ii) una base ortonormale di V_3 costituita da autovettori di A;
iii) una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

[13] Sia data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R},$$
i) trovare il valore di h per il quale la matrice A ha un autovalore eguale a 3.
ii) Posto $h = -2$, provare che A è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale D ed il cambiamento di base che la realizzi.

[14] Dire se la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$
ammette l'autovalore $\lambda = 0$.

[15] Al variare di $a \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere il sistema lineare omogeneo $AX = 0$, dove:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
Posto $a = -1$, scrivere la matrice $B = {}^tA + A$ e trovare gli autovalori di B.

[16] È assegnata la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$
i) Dire per quali valori del parametro a, la matrice ha rango massimo.
ii) Posto $a = 0$, trovare autovalori ed autovettori di A.

[17] Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R},$$
i) trovare i valori di a per i quali il rango di A è 2.
ii) Posto $a = 2$, trovare autovalori ed autovettori di A.

[18] Sono date le seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 2 \\ -1 & h & 1-h^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$
i) Discutere, al variare del parametro h, le soluzioni dell'equazione $AX = B$.
Posto $h = 0$ nella matrice A:
ii) scrivere la matrice $C = A\,{}^tA$ e ridurla a forma diagonale;
iii) dire se i vettori rappresentati dalle righe della matrice A costituiscono una base ortonormale dello spazio V_3.

[19] È data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ -1 & h & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ A è invertibile.

Posto $h = 0, k = 1$,

ii) verificato che A è diagonalizzabile, determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$.

iii) Dire perché la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale che la diagonalizzi.

[20] Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice invertibile.

i) Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di A e gli autovalori di A^{-1}.

ii) Supponendo che A sia diagonalizzabile, vale a dire che esistano una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$, verificare che A^{-1} è diagonalizzabile e determinare una matrice P' e una matrice D' tali che $(P')^{-1}A^{-1}P' = D'$.

[21] Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Si consideri $A^2 = AA$.

i) Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di A e gli autovalori di A^2.

ii) Supponendo che A sia diagonalizzabile, vale a dire che esistano una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$, verificare che A^2 è diagonalizzabile e determinare una matrice P' e una matrice D' tali che $(P')^{-1}A^2P' = D'$.

[22] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

determinarne autovalori e autospazi e dire se è diagonalizzabile.

[23] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i) determinarne gli autovalori.

ii) A é diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una matrice B in $\mathbb{R}^{3,3}$ tale che $B^{-1}AB$ sia una matrice diagonale.

[24] i) Per quali valori del parametro h il sistema:

$$\begin{cases} x - hy + z = 1 \\ x + hy - z = 0 \\ 3x - y + z = 2, \quad h \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni?

Detta A la matrice dei coefficienti del sistema:

ii) trovare per quali valori di h esiste A^{-1};

iii) posto $h = 1$, dire se A è diagonalizzabile.

[25] Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, dimostrare, oppure dare un controesempio alle seguenti implicazioni:
i) A diagonalizzabile $\Rightarrow$ A invertibile;
ii) A invertibile $\Rightarrow$ A diagonalizzabile.

[26] Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

determinare la matrice $B = A + {}^tA$. Verificare che B è diagonalizzabile e scrivere una matrice B' diagonale, simile a B.

[27] Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

i) Per quali valori di k A è invertibile?
ii) Per quali valori di k A è diagonalizzabile?

[28] Si consideri la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Decidere se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1}.
ii) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A.
iii) Determinare una matrice P (non ortogonale) tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è una matrice diagonale.
iv) Determinare una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

[29] Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinare una matrice A' diagonale, simile ad A.

[30] Verificare che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -14 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ -9 & -18 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile e determinare una matrice $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale.

[31] Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k^2-1 & 1 & 0 & 0 \\ k^{30}-2k^5+3k^3 & 0 & 1 & 0 \\ 5k+5 & k^2+k & k^3-k & 1 \end{pmatrix}$$

è:
i) invertibile,
ii) diagonalizzabile.

[32] i) Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

determinare il rango di A, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
ii) Posto $h = 1$, trovare autovalori e autospazi della matrice $B = A\,{}^tA$ e scrivere una matrice P che diagonalizzi ortogonalmente B.

[33] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice A è, rispettivamente:
i) invertibile,
ii) diagonalizzabile.

[34] Sia A una matrice quadrata qualsiasi.
i) Provare che A e la matrice trasposta ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori.
ii) Trovare gli autospazi da A e ${}^tA$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e stabilire se coincidono oppure no (ricordare il punto i).

[35] Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & h \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

[36] Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ A è diagonalizzabile, e, in questi casi, determinare una matrice diagonale A' simile ad A e una matrice B tale che $A' = B^{-1}AB$.

[37] Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

[38] Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2-h & -1+h & -1 \\ -2+h & 0 & h \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

[39] Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ una matrice simmetrica di rango 2 e sia $\mathcal{V} = \mathcal{L}((1,2,0,1),(0,1,1,0))$ l'autospazio relativo all'autovalore 2 di A.

i) Determinare una base di autovettori di A.

ii) Scrivere una matrice D simile ad A.

[40] Sia $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ una matrice simmetrica con due autovalori distinti: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e sia $\mathcal{U} = \mathcal{L}((0,1,0,1))$ un autospazio.

i) Determinare una base ortonormale di autovettori di A.

ii) Scrivere una matrice diagonale simile ad A.

[41] È data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2h & 2h \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

Posto $k = 0$:

i) trovare per quale valore di h la matrice A ha autovalore 2.

ii) Scelto $h = 1$ e verificato che A è diagonalizzabile, determinare una sua forma diagonale e la relativa matrice P del cambiamento di base.

iii) Perchè P può essere ortogonale?

iv) Posto invece $h = 0$, stabilire per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile.

[42] Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2a \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) Posto $a = -1$, trovare autovalori e autospazi di A. A è diagonalizzabile?
Posto $a = 0$:
ii) verificato che la matrice A ha rango massimo, determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ dei vettori riga di A ed una base ortonormale $\mathcal{C}$ dei vettori colonna di A.
iii) Scrivere la matrice del cambiamento di base tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e dire di che tipo di matrice si tratta.

[43] i) Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \quad h \in \mathbb{R},$$
determinare i valori di h per cui A è invertibile, e in questi casi, calcolare A^{-1}.
ii) Posto $h = 0$, trovare gli autovalori e gli autovettori di A.
iii) Stabilire, in questo caso, se A è diagonalizzabile, giustificando accuratamente la risposta.

[44] Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
scrivere tutte le matrici diagonali simili ad A

[45] Data la matrice:
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
i) verificato che 1 é un autovalore di A, determinarne autovalori ed autospazi;
ii) scrivere una matrice P che diagonalizzi A;
iii) scrivere una matrice Q che diagonalizzi ortogonalmente A.

[46] Data la matrice simmetrica:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
i) determinarne autovalori e autospazi;
ii) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = D$;
iii) Determinare una matrice ortogonale Q tale che ${}^tQAQ = D$.

[47] Per ciascuna delle seguenti coppie di matrici verificare che sono simultaneamente diagonalizzabili e determinare le loro forme diagonali. Trovare, inoltre, una base comune di autovettori.

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$

iii) $A = \begin{pmatrix} -66 & 190 & 68 \\ -4 & 13 & 4 \\ -53 & 148 & 55 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -30 & 96 & 32 \\ -2 & 8 & 2 \\ -25 & 75 & 27 \end{pmatrix};$

iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -24 & 1 & 48 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -16 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ -12 & 3 & 24 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -16 & 0 & 32 & 2 \end{pmatrix};$

v) $A = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 48 & -12 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -3 & -12 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 12 & -12 & 4 & 12 \\ 9 & -12 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$

21.2 Soluzioni

[1]

```
A = {{2, 1, 0}, {1, 2, 1}, {0, 1, 2}};
Eigensystem[A]
{{2, 2 - √2, 2 + √2}, {{-1, 0, 1}, {1, -√2, 1}, {1, √2, 1}}}
```

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2 - \sqrt{2},\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1,0,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,-\sqrt{2},1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,\sqrt{2},1)).$

[2]

```
A = {{2, 1, 1}, {1, -2, 3}, {3, 4, -1}};
Eigensystem[A]
{{-5, 0, 4}, {{0, -1, 1}, {-1, 1, 1}, {9, 7, 11}}}
```

$\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 4.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,-1,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1,1,1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((9,7,11)).$

[3]

```
A = {{0, -2, -2}, {2, 4, 2}, {-2, -2, 0}};
Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{1, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ (doppio).

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,-1,1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1,0,1),(-1,1,0)).$

[4]

```
A = {{1, -1, 0, 0}, {-1, 2, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};
Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 3}, {{1, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {-1, 0, 1, 0}, {1, -2, 1, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ (doppio), $\lambda_3 = 3.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,1,1,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(-1,0,1,0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,-2,1,0)).$

[5]

```
A = {{3, -1, 0, 0}, {-1, 3, 0, 0}, {0, 0, 4, 1}, {0, 0, 1, 4}};
Eigensystem[A]
{{2, 3, 4, 5}, {{1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}}}
```

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4,\ \lambda_4 = 5.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,1,0,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,-1,1)),$

$V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-1,1,0,0)),\ V_{\lambda_4} = \mathcal{L}((0,0,1,1)).$

[6]

```
A = {{1, -4, 3, 0}, {-4, 1, 0, 0}, {3, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

Eigensystem[A]
{{-4, 1, 1, 6},
  {{-5, -4, 3, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 3, 4, 0}, {5, -4, 3, 0}}}
```

$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 1$ (doppio), $\lambda_3 = 6.$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-5,-4,3,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,3,4,0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((5,-4,3,0)).$

[7]

```
A = {{2, 0, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 2}};

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2, 2}, {{0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 1, 1, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ (triplo).

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,-1,1,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,0)).$

[8]

```
A = {{2, -1, 0, 0}, {-1, -2, 0, 0}, {0, 0, 2, -1}, {0, 0, -1, -2}};

Eigensystem[A]
{{-√5, -√5, √5, √5}, {{0, 0, -2 + √5, 1},
    {-2 + √5, 1, 0, 0}, {0, 0, -2 - √5, 1}, {-2 - √5, 1, 0, 0}}}
```

$\lambda_1 = -\sqrt{5}$ (doppio), $\lambda_2 = \sqrt{5}$ (doppio).

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,0,-2+\sqrt{5},1),(-2+\sqrt{5},1,0,0)),$

$V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,0,-2-\sqrt{5},1),(-2-\sqrt{5},1,0,0)).$

[9]

```
A = {{a, 2, a - 1}, {-3, 5, -2}, {-4, 4, -1}};

Solve[{CharacteristicPolynomial[A, x] /. x → 1} == 0][[1]]
{a → 0}

Eigensystem[A /. %]
{{1, 1, 2}, {{0, 1, 2}, {0, 0, 0}, {1, 1, 0}}}
```

i) $a = 0.$ ii) No.

[10]

```
A = {{1, 0, 0}, {1, -1, 0}, {2, 3, 2}};

Eigensystem[A]
{{-1, 1, 2}, {{0, -1, 1}, {-2, -1, 7}, {0, 0, 1}}}
```

i) $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. ii) No.

[11]

```
A = {{0, h, h}, {1, h^2 - h, 1}, {h - 1, 0, h - 1}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → 0}, {h → 0}, {h → 1}, {h → 1}}

Eigensystem[A/.h → 1]
{{-1, 0, 1}, {{-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}, {1, 1, 0}}}
```

i) $h \in \{0, 1\}$. ii) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, 1, 0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1, -1, 1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1, 1, 0))$. iii) Sì

[12]

```
A = {{1, 2, -4}, {2, -2, -2}, {-4, -2, 1}};

m = Eigensystem[A]
{{-3, -3, 6}, {{1, 0, 1}, {-1, 2, 0}, {-2, -1, 2}}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[m[[2]]]
```

$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}\right\}$

i) $\lambda_1 = -3$ (doppio), $\lambda_2 = 6$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1, 0, 1), (-1, 2, 0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-2, -1, 2))$.

ii) $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)\right)$.

iii) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.

[13]

```
A = {{3, 2, 1}, {-3, -2, h + 1}, {6, 4, 2}};

Solve[{CharacteristicPolynomial[A, x] /. x → 3} == 0][[1]]
{h → -2}

Eigensystem[A /. %]
{{0, 0, 3}, {{-1, 0, 3}, {-2, 3, 0}, {1, -1, 2}}}
```

i) $h = -2$. ii) $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 3$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, 0, 3), (-2, 3, 0))$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1, -1, 2))$.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{B} = ((-1, 0, 3), (-2, 3, 0), (1, -1, 2))$.

[14]

```
A = {{1, -2, 4, 1}, {2, -3, 9, -1}, {1, 0, 6, -5}, {2, -5, 7, 5}};

Det[A]
0
```

Sì.

[15]

```
A = {{1, -1, a + 2}, {2a + 1, -1, 0}, {0, 0, a}};
X = {x1, x2, x3}; B = {0, 0, 0};

Reduce[A.X == B, X]
a == 0&&x2 == x1&&x3 == 0||x1 == 0&&x2 == 0&&x3 == 0&&a ≠ 0

c = A /. a → -1;

MatrixForm[b = Transpose[c] + c]
( 2   -2   1 )
( -2  -2   0 )
( 1    0  -2 )

Eigenvalues[b]
{-3, -2, 3}
```

$a \neq 0$: una soluzione (la soluzione nulla);
$a = 0$: infinite soluzioni dipendenti da un'incognita libera.

$$B = {}^tA + A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 3.$$

[16]

```
A = {{0, a, -1, 0}, {a, 0, 1, 0}, {-1, 1, -1, 0}, {0, 0, 0, a}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → 0}, {a → 0}, {a → 2}}
Eigensystem[A /. %[[1]]]
{{-2, 0, 0, 1}, {{1, -1, 2, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 1, 0, 0}, {-1, 1, 1, 0}}}
```

i) $a \notin \{0, 2\}$.   ii) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1, -1, 2, 0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-1, 1, 1, 0))$.

[17]

```
A = {{0, 2, a}, {2, 1, 1}, {a, 1, 1}};
Solve[Det[A] == 0]
{{a → 2}, {a → 2}}
Eigensystem[A /. a → 2]
{{-2, 0, 4}, {{-2, 1, 1}, {0, -1, 1}, {1, 1, 1}}}
```

i) $a = 2$;   ii) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 4$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-2, 1, 1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0, -1, 1)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1, 1, 1))$.

[18]

```
A = {{1, 0, 1}, {1, h, 2}, {-1, h, 1 - h^2}}; X = {x, y, z}; B = {0, 1, h};
Reduce[A.X == B, X]
h == 1&&x == -z&&y == 1 - z ||
  x == 1/(1 + h)&&y == (2 + h)/(h (1 + h))&&z == 1/(-1 - h)&& - 1 + h ≠ 0&&h ≠ 0&&1 + h ≠ 0
m = A /. h → 0;
MatrixForm[c = m.Transpose[m]]
(2  3  0
 3  5  1
 0  1  2)
Eigensystem[c]
{{0, 2, 7}, {{3, -2, 1}, {-1, 0, 3}, {3, 5, 1}}}
```

i) Se $h \notin \{-1, 0, 1\}$: esiste una sola soluzione;
se $h \in \{-1, 0\}$: non esistono soluzioni;
se $h = 1$: esistono infinite soluzioni dipendenti da un'incognita libera.

ii) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;   iii) no.

[19]

```
A = {{0, -1, k}, {-1, h, -1}, {k, -1, 0}};

Solve[ Det[A] == 0]

Solve ::'' svars'' : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{h -> 2/k}, {k -> 0}}

a = A/.{h -> 0, k -> 1};

b = Eigensystem[a]
{{-1, -1, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {1, -1, 1}}}

MatrixForm[Transpose[b[[2]]]]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
<< LinearAlgebra'Orthogonalization'

MatrixForm[Transpose[GramSchmidt[b[[2]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

i) $k \neq 0$ e $h \neq \dfrac{2}{k}$.

ii) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

iii) A è simmetrica, $Q = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$

[20] i) Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori di A con molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_k$, rispettivamente, allora $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1}$ sono gli autovalori di A^{-1}, con le stesse molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

ii) $D' = D^{-1}, P' = P$.

[21] i) Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori di A con molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_k$, rispettivamente, allora $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_k^2$ sono gli autovalori di A^2, con le stesse molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

ii) $D' = D^2, P' = P$.

[22]

```
A = {{0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 2}, {0, 0, 2, 1}};
Eigensystem[A]
{{-1, -1, 1, 3},
  {{0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}}}
```

i) $\lambda_1 = -1$ (doppio), $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((0,0,-1,1),(-1,1,0,0))$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,1,0,0))$, $V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((0,0,1,1))$.

[23]

```
A = {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {2, 1, 0}};
Eigensystem[A]
{{-1, 0, 2}, {{0, -1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 0, 1}}}
```

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$.

ii) A è simmetrica, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[24]

```
A = {{1, -h, 1}, {1, h, -1}, {3, -1, 1}}; X = {x, y, z}; B = {1, 0, 2};
Reduce[A.X == B, X]
h == 1&&x == 1/2&&z == 1/2 (1 + 2 y) || x == 1/2&&y == 0&&z == 1/2&& - 1 + h ≠ 0
Eigensystem[A /. h → 1]
{{0, 0, 3}, {{0, 1, 1}, {0, 0, 0}, {3, -1, 5}}}
```

i) $h = 1$, ii) $h \neq 1$; iii) A non è diagonalizzabile.

[25] i) Falso, per esempio: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile ma non invertibile;

ii) falso, per esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile ma non diagonalizzabile.

[26]

```
A = {{1, -3, 5}, {3, 2, 1}, {-5, -4, 0}};
MatrixForm[B = A + Transpose[A]]
( 2   0   0 )
( 0   4  -3 )
( 0  -3   0 )
Eigensystem[B]
{{2, 2 - √13, 2 + √13},
  {{1, 0, 0}, {0, 1/3 (-2 + √13), 1}, {0, 1/3 (-2 - √13), 1}}}
```

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

[27]

```
A = {{1, 0, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1}, {0, 0, k, 0}};

Solve[Det[A] == 0]
{{k → 0}}

b = Eigenvalues[A]
{-1, 1, 1/2 (1 - √(1 + 4 k)), 1/2 (1 + √(1 + 4 k))}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]

Solve ::"  ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be
found

Solve ::"  ifun" : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be
found
{{{}}, {}, {{k → 2}}, {}, {}, {{}}, {}, {{k → 0}}, {{k → 2}},
  {}, {{}}, {{k → -1/4}}, {}, {{k → 0}}, {{k → -1/4}}, {{}}}

Eigensystem[A/.k → 2]
{{-1, -1, 1, 2}, {{0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {-3, 1, 3, 3}}}

Eigensystem[A/.k → 0]
{{-1, 0, 1, 1},
  {{0, 1, 0, 0}, {-1, -1, -1, 1}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}

Eigensystem[A/.k → -1/4]
{{-1, 1/2, 1/2, 1},
  {{0, 1, 0, 0}, {-4, -4/3, -2, 1}, {0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}}}

{}
```

i) $k \neq 0$. ii) $k > -\dfrac{1}{4}, k \neq 0, k \neq 2$.

[28]

```
A = {{2, -2, -1}, {-2, 5, 2}, {-1, 2, 2}};

Det[A]
7

MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

```
b = Eigensystem[A]
{{1, 1, 7}, {{1, 0, 1}, {2, 1, 0}, {-1, 2, 1}}}

MatrixForm[Transpose[b[[2]]]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
<< LinearAlgebra‘Orthogonalization‘

MatrixForm[Transpose[GramSchmidt[b[[2]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

i) $\det A = 7$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

ii) $\lambda_1 = 1$ di molteplicità 2, $\lambda_2 = 7$ di molteplicità 1.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1, 0, 1), (2, 1, 0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((-1, 2, 1))$.

iii) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

iv) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$

[29]

```
A = {{1, 2, -1, 0}, {2, 3, -2, 0}, {-1, -2, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}};

RootReduce[Eigensystem[A]]
```

$$\left\{\left\{0, 0, \frac{1}{2}\left(5-\sqrt{33}\right), \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{33}\right)\right\}, \left\{\{0, 0, 0, 1\}, \{1, 0, 1, 0\}, \left\{-1, \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{33}\right), 1, 0\right\}, \left\{-1, \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{33}\right), 1, 0\right\}\right\}\right\}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}.$$

[30]

```
A = {{-10, -14, 0}, {6, 9, 0}, {-9, -18, -1}};

Eigensystem[A]
{{-3, -1, 2}, {{-2, 1, 0}, {0, 0, 1}, {7, -6, 15}}}
```

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}.$$

[31]

```
A = {{1, 0, 0, 0}, {k^2 - 1, 1, 0, 0},
    {k^30 - 2k^5 + 3k^3, 0, 1, 0}, {5k + 5, k^2 + k, k^3 - k, 1}};

Solve[Det[A] == 0]
{}

Eigensystem[A]
{{1, 1, 1, 1}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 1 - k, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}

k = 1;

Eigensystem[A]
{{1, 1, 1, 1}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}

k = -1;

Eigensystem[A]
{{1, 1, 1, 1}, {{0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}}}
```

i) A è invertibile $\forall k \in \mathbb{R}$. ii) A è diagonalizzabile se $k = -1$.

[32]

```
A = {{0, 1, 1, h}, {1, -1, 0, -1}, {1, 0, 1, 0}};
X = {x1, x2, x3, x4}; B = {0, 0, 0};

Reduce[A.X == B, X]
h == 1&&x1 == -x3&&x2 == -x3 - x4||
  x1 == -x3&&x2 == -x3&&x4 == 0&& - 1 + h ≠ 0

h = 1;

B = A.Transpose[A];

MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
b = Eigensystem[B]
{{0, 3, 5}, {{-1, -1, 1}, {1, 1, 2}, {-1, 1, 0}}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

MatrixForm[Transpose[GramSchmidt[b[[2]]]]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

i) Se $h = 1$: il rango di A è 2, se $h \neq 1$: il rango di A è 3.

ii) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

autovalori di B: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$;
autospazi di B: $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-1, -1, 1))$, $V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1, 1, 2))$, $V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1, -1, 0))$;

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

[33]

```
A = {{-1, 0, 4, 0}, {0, 1, 0, -1}, {1, 0, 2, 0}, {0, h, 0, 1}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → -1}}

b = Eigenvalues[A]
{-2, 3, i (-i + √h), -i (i + √h)}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 4}, {j, 4}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {}, {{h → -9}}, {}, {}, {{}}, {}, {{h → -4}},
  {{h → -9}}, {}, {{}}, {{h → 0}}, {}, {{h → -4}}, {{h → 0}}, {{}}}

h = -9;

Eigensystem[A]
{{-2, -2, 3, 4},
  {{0, 1, 0, 3}, {-4, 0, 1, 0}, {1, 0, 1, 0}, {0, -1, 0, 3}}}

h = -4;

Eigensystem[A]
{{-2, -1, 3, 3},
  {{-4, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 2}, {0, -1, 0, 2}, {1, 0, 1, 0}}}

h = 0;

Eigensystem[A]
{{-2, 1, 1, 3}, {{-4, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {1, 0, 1, 0}}}
```

i) $h \neq -1$; ii) $h < 0$.

[34]

```
A = {{2, -3, 0, 3}, {3, -4, 0, 3}, {0, 3, 2, -3}, {3, -3, 0, 2}};

Eigensystem[A]
{{-1, -1, 2, 2},
  {{0, 1, 0, 1}, {-1, -1, 1, 0}, {1, 1, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}}}

Eigensystem[Transpose[A]]
{{-1, -1, 2, 2},
  {{-1, 0, 0, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {1, -1, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}}}
```

i) A e ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori in quanto hanno lo stesso polinomio caratteristico.

ii) Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ entrambi con molteplicità 2, gli autospazi ad essi relativi sono rispettivamente generati da $((0,1,0,1),(-1,-1,1,0))$ e da $((1,1,0,1),(0,0,1,0))$; gli autovalori di ${}^tA$ coincidono con gli autovalori di A ma i rispettivi autospazi sono diversi, infatti sono generati da $((-1,0,0,1),(-1,1,0,0))$ e da $((1,-1,0,1),(1,0,1,0))$, rispettivamente.

[35]

```
A = {{2, 3, 1}, {-2, -3, h}, {4, 6, 2}};

b = Eigenvalues[A]
```

$\left\{0, \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{25+24\,h}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{25+24\,h}\right)\right\}$

```
Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]

Solve ::'' ifun'' : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found

Solve ::'' ifun'' : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found
```

$\left\{\{\{\}\}, \{\{h\to -1\}\}, \{\}, \{\{h\to -1\}\}, \{\{\}\}, \left\{\left\{h\to -\frac{25}{24}\right\}\right\}, \{\}, \left\{\left\{h\to -\frac{25}{24}\right\}\right\}, \{\{\}\}\right\}$

```
h = -1;

Eigensystem[A]
```

$\{\{0, 0, 1\}, \{\{-1, 0, 2\}, \{-3, 2, 0\}, \{1, -1, 2\}\}\}$

```
h = -25/24;

Eigensystem[A]
```

$\left\{\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\left\{-\frac{3}{2}, 1, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{7}{12}, 1\right\}, \{0, 0, 0\}\right\}\right\}$

$h > -\dfrac{25}{24}$.

[36] Se $b = 1$, allora $a = 0$, $A = I$ e $A' = I$;
se $b \neq 1$ allora $a = \lambda(b-1)$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[37]

```
A = {{1, 0, h}, {0, 2, 0}, {h, 1, 1}};

b = Eigenvalues[A]
{2, 1 - h, 1 + h}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h → -1}}, {{h → 1}}, {{h → -1}},
  {{}}, {{h → 0}}, {{h → 1}}, {{h → 0}}, {{}}}

h = -1;

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{1, 0, 1}, {-1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

h = 1;

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{-1, 0, 1}, {1, 0, 1}, {0, 0, 0}}}

h = 0;

Eigensystem[A]
{{1, 1, 2}, {{0, 0, 1}, {1, 0, 0}, {0, 1, 1}}}
```

$h \neq \pm 1$.

[38]

```
A = {{2, 0, 0}, {2 - h, -1 + h, -1}, {-2 + h, 0, h}};

b = Eigenvalues[A]
{2, -1 + h, h}

Flatten[Table[b[[i]] == b[[j]], {i, 3}, {j, 3}]];

Map[Solve, %]
{{{}}, {{h → 3}}, {{h → 2}}, {{h → 3}}, {{}}, {}, {{h → 2}}, {}, {{}}}

h = 3;

Eigensystem[A]
{{2, 2, 3}, {{-1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, -1, 1}}}

h = 2;

Eigensystem[A]
{{1, 2, 2}, {{0, 1, 0}, {0, -1, 1}, {1, 0, 0}}}
```

La matrice A è diagonalizzabile per ogni $h \in \mathbb{R}$.

[39] i) $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{L}((2, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$, quindi una base di autovettori é:

$$\mathcal{B} = ((1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)).$$

ii) La matrice D simile ad A e relativa alla base $\mathcal{B}$ è:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[40] i) Per esempio: $\mathcal{B} = \left(\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,0,1,0) \right).$

ii) Per esempio: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

[41]

```
A = {{0, 2h, 2h}, {2, 2, 0}, {2, k, 2}}; X = {x1, x2, x3};

k = 0;

Reduce[A.X == 2 X, X]
x1 == 0

h = 1;

Eigensystem[A]
{{-2, 2, 4}, {{-2, 1, 1}, {0, -1, 1}, {1, 1, 1}}}

Clear[h, k]

h = 0;

Eigenvalues[A]
{0, 2, 2}

Reduce[A.X == 2X, k]
k == 0&&x1 == 0||x1 == 0&&x2 == 0
```

i) A ammette l'autovalore 2, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

ii) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

iii) A è simmetrica pertanto si può ottenere una base ortonormale di autovettori.

iv) A é diagonalizzabile per $k = 0$.

[42]

```
A = {{0, 2, 2a}, {2, 2, 0}, {2, 0, 2}};

a = -1;

Eigensystem[A]
{{0, 2, 2}, {{-1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 0}}}

a = 0;

Det[A]
-8

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[A]
{{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}}

GramSchmidt[Transpose[A]]
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

i) A non è diagonalizzabile.

ii) Per esempio:

$$\mathcal{B} = ((0,1,0),(1,0,0),(1,0,1)), \quad \mathcal{C} = \left(\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

iii) $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale.

[43]

```
A = {{1, -3, 1, 2}, {h, 0, 0, 0}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, h}};

Solve[Det[A] == 0]
{{h → 0}, {h → 0}}

MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & -\frac{2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

```
h = 0;

Eigensystem[A]
```

$$\left\{\left\{0, 0, \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}, \left\{\{1,1,0,1\}, \{1,1,2,0\}, \left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right), 0, 1, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), 0, 1, 0\right\}\right\}\right\}$$

i) Se $h \neq 0$, la matrice A é invertibile e:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{h} & -3 & -\frac{2}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

ii) $\lambda_1 = 0,\ m_{\lambda_1} = 2;\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),\ m_{\lambda_2} = 1;\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ m_{\lambda_3} = 1$.

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,1,0,1),(1,1,2,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),0,1,0\right)\right);\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),0,1,0\right)\right)$.

iii) La matrice A è diagonalizzabile perchè la dimensione degli autospazi coincide con la molteplicità dei relativi autovalori.

[44] $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

[45] i) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 7; V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,-2,1)), V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,0,-1)), V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,1,1))$;

ii) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

iii) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$

[46] i) Autovalori: $\lambda_1 = -3,\ m_{\lambda_1} = 2,\ \lambda_2 = 3,\ m_{\lambda_2} = 1$;

autospazi: $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,-1)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0,1,1))$;

ii) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

iii) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

[47] i)

```
A = {{2, 0, 0}, {0, 2, 0}, {-1, 0, 3}};
B = {{1, 0, 0}, {-2, 3, 0}, {-2, 0, 3}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{2, 2, 3}, {{1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}}
Eigensystem[B]
{{1, 3, 3}, {{1, 1, 1}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}}}
```

$\mathscr{B} = ((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$.

ii)

```
A = {{3, -2, -2}, {0, 2, 0}, {0, -1, 1}};
B = {{-2, 1, 1}, {0, 0, 0}, {0, -1, -1}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{1, 2, 3}, {{1, 0, 1}, {0, -1, 1}, {1, 0, 0}}}
Eigensystem[B]
{{-2, -1, 0}, {{1, 0, 0}, {1, 0, 1}, {0, -1, 1}}}
```

$\mathscr{B} = ((1,0,1),(0,-1,1),(1,0,0))$.

iii)

```
A = {{-66, 190, 68}, {-4, 13, 4}, {-53, 148, 55}};
B = {{-30, 96, 32}, {-2, 8, 2}, {-25, 75, 27}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{-1, 1, 2}, {{32, 2, 25}, {14, 1, 11}, {1, 0, 1}}}
Eigensystem[B]
{{1, 2, 2}, {{32, 2, 25}, {1, 0, 1}, {3, 1, 0}}}
B.{14, 1, 11}
{28, 2, 22}
```

$\mathcal{B} = ((32, 2, 25), (14, 1, 11), (-1, 0, -1))$.

iv)

```
A = {{1, 0, 2, 0}, {-24, 1, 48, 6}, {0, 0, 2, 0}, {8, 0, -16, -1}};
B = {{-2, 0, 8, 0}, {-12, 3, 24, 3}, {0, 0, 2, 0}, {-16, 0, 32, 2}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{-1, 1, 1, 2}, {{0, -3, 0, 1}, {1, 0, 0, 4}, {0, 1, 0, 0}, {2, 0, 1, 0}}}
Eigensystem[B]
{{-2, 2, 2, 3}, {{1, 0, 0, 4}, {0, -3, 0, 1}, {2, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}}}
```

$\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 4), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, -3, 0, 1))$.

v)

```
A = {{16, -16, 4, 16}, {0, 0, 0, 0}, {-48, 48, -12, -48}, {0, 0, 0, 0}};
B = {{-9, 12, -3, -12}, {3, -3, 1, 3}, {12, -12, 4, 12}, {9, -12, 3, 12}};
A.B - B.A
{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
Eigensystem[A]
{{0, 0, 0, 4}, {{-1, 0, 0, 1}, {-1, 0, 4, 0}, {1, 1, 0, 0}, {-1, 0, 3, 0}}}
Eigensystem[B]
{{0, 0, 1, 3}, {{0, 1, 0, 1}, {-1, 0, 3, 0}, {0, 1, 4, 0}, {-1, 0, 0, 1}}}
A.{0, 1, 4, 0}
{0, 0, 0, 0}
A.{0, 1, 0, 1}
{0, 0, 0, 0}
```

$\mathcal{B} = ((0, 1, 4, 0), (1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -3, 0))$.

Capitolo 22

Forme Bilineari e Forme Quadratiche

Questo capitolo riveste notevole importanza per lo studio delle coniche nel piano e quadriche nello spazio. Inoltre costituisce la base per l'estensione del concetto di prodotto scalare.
In tutto il capitolo V sarà, salvo avviso contrario, uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n.

22.1 Forme bilineari simmetriche

Definizione 22.1 *Una* **forma bilineare** *su V è un'applicazione $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si abbia:*

1. $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y})$;
2. $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}') = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$;
3. $\varphi(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Definizione 22.2 *Una forma bilineare si dice* **simmetrica** *se:*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

L'insieme delle forme bilineari simmetriche reali su V sará indicato con $\mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$.

Esempio 22.1 In generale un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è un esempio di forma bilineare simmetrica reale su V. In particolare, quindi il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ dell' Esempio 12.2 e il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, distinto da quello standard, considerato nell'Esempio 12.3 sono entrambi forme bilineari simmetriche reali rispettivamente su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{R}^3$.

Esempio 22.2 La funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ é una forma bilineare non simmetrica, infatti: $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -x_1y_2 + 2x_2y_1$.

22.1.1 Matrice di una forma bilineare simmetrica

Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base di V e $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$. Per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, con:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n, \ \mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n,$$

per le proprietà di bilinearità di φ, si ha:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \varphi(x_1\mathbf{v}_1+\ldots+x_n\mathbf{v}_n, y_1\mathbf{v}_1+\ldots+y_n\mathbf{v}_n)\\
&= x_1y_1\varphi(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)+x_1y_2\varphi(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)+\ldots+x_1y_n\varphi(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_n)\\
&+x_2y_1\varphi(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1)+x_2y_2\varphi(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2)+\ldots+x_2y_n\varphi(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_n)+\\
&+\ldots\\
&+x_ny_1\varphi(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_1)+x_ny_2\varphi(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_2)+\ldots+x_ny_n\varphi(\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_n).
\end{aligned}
\tag{22.1}
$$

Posto $a_{ij} = \varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j),\ ,\ i,j=1,\ldots,n$, alla forma bilineare φ si associa la matrice:

$$
A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix} = (a_{ij}),\quad a_{ij}\in\mathbb{R},
$$

che è la **matrice della forma bilineare** φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V.
La conoscenza della matrice A permette quindi di calcolare $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$, qualunque siano i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in V.

Teorema 22.1 *La matrice associata ad una forma bilineare simmetrica é simmetrica.*

Dimostrazione: Per definizione di forma bilineare simmetrica $a_{ij} = \varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j) = \varphi(\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_i) = a_{ji},\ i,j=1,\ldots,n$. ▌

Nel Capitolo 23 si dimostrerá in modo rigoroso che, fissata la base $\mathcal{B}$, l'applicazione $\varphi \leftrightarrows (a_{ij})$ è un isomorfismo tra $\mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$ e il sottospazio di $\mathbb{R}^{n,n}$ delle matrici simmetriche $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ definito nel Capitolo 8.

La forma φ si può scrivere in forma polinomiale nel modo seguente:

$$
\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j.
$$

Esempio 22.3 La matrice associata al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$, rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ è la matrice unità I. Mentre la matrice associata al prodotto scalare dell'Esempio 12.2, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, è la matrice diagonale:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.
$$

In entrambi i casi la matrice associata è diagonale e vedremo che se la matrice associata è diagonale sarà piú facile **classificare** la forma quadratica associata.

Esempio 22.4 La matrice associata alla forma bilineare dell'Esempio 22.2, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, é:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}
$$

che, come previsto, non é simmetrica.

Esempio 22.5 La forma bilineare simmetrica $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ associata alla matrice:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}
$$

ha come espressione polinomiale:

$$
\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2(x_1y_3+x_3y_1) - x_2y_2 + 5(x_2y_3+x_3y_2)
$$

e se $\mathbf{x} = (1,2,3)$ e $\mathbf{y} = (0,3,4)$ allora

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 72.$$

22.1.2 Forme bilineari simmetriche in forma matriciale

Teorema 22.2 *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base di V, $\varphi \in \mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$ una forma bilineare simmetrica avente per matrice $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, e:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{22.2}$$

le matrici colonna delle componenti dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V. Si ha:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {}^tXAY = {}^tYAX. \tag{22.3}$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\begin{aligned} {}^tXAY &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi, svolgendo e confrontando con (22.1) si ottiene:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {}^tXAY;$$

inoltre poichè $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ è uno scalare, risulta:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {}^t(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY{}^tAX,$$

e dalla simmetria di A (${}^tA = A$) segue la tesi . ∎

Teorema 22.3 *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V, $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$, $A' = M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi)$ le matrici associate a φ rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$ rispettivamente. Se P indica la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, risulta:*

$$A' = {}^tPAP.$$

Dimostrazione: Dette $X = PX', Y = PY'$ le equazioni del cambiamento di base, (cfr. Paragrafo 24.1) si ha:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'\,{}^tPAPY'.$$

D'altra parte si può scrivere $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = {}^tX'A'Y'$ e, dal confronto delle due espressioni, si ottiene ${}^tX'\,{}^tPAPY' = {}^tX'A'Y'$ oppure ${}^tX'({}^tPAP - A')Y' = 0$, per ogni X', quindi$({}^tPAP - A')Y' = 0$, da cui $A' = {}^tPAP$. ∎

Osservazione 22.1 La matrice A' è ancora simmetrica, infatti ${}^t({}^tPAP) = {}^tPAP$.

Esempio 22.6 Data la forma bilineare simmetrica $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, le matrici di φ rispettivamente riferite alla base canonica e dopo il cambiamento di base di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

sono

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}.$$

Esempio 22.7 Se si considera il prodotto scalare standard in V_3:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}, \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in V_3.$$

La matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = (\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ è la matrice:

$$A = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathcal{B}' = (2\mathbf{i}, \mathbf{i}+5\mathbf{j}, -2\mathbf{k})$ una nuova base (non ortonormale) di V_3. La matrice associata al prodotto scalare rispetto a questa nuova base $\mathcal{B}'$ è data dalla matrice simmetrica:

$$M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^t PIP = {}^t PP = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

cioe' se $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ hanno componenti rispettivamente (x'_1, x'_2, x'_3) e (y'_1, y'_2, y'_3) rispetto alla base $\mathcal{B}'$ si ha:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4x'y' + 2(x'_1y'_2 + x'_2y'_1) + 11x'_2y'_2 + 4x'_3y'_3.$$

Si pone quindi il problema, se si ha l'espressione di $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, di capire che la forma bilineare φ è il solito prodotto scalare. Ci occuperemo di questo problema nei paragrafi successivi.

22.2 Forme quadratiche

Si vuole ora estendere il concetto di norma di un vettore $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$, considerando non necessariamente un prodotto scalare ma una forma bilineare simmetrica φ qualsiasi.

Definizione 22.3 *Data la forma bilineare simmetrica $\varphi \in \mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$, l'applicazione:*

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \longmapsto Q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

si dice **forma quadratica reale associata alla forma bilineare simmetrica** φ.

L'insieme delle forme quadratiche reali su V si indica con $Q(V,\mathbb{R})$.

Osservazione 22.2 Le forme quadratiche reali **non** sono applicazioni lineari. Infatti per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

1) $Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y})$.

2) $Q(\lambda\mathbf{x}) = \varphi(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$.

L'espressione 1) è detta **forma polare** della forma quadratica Q. Dalla 2), per $\lambda = 0$, si ottiene $Q(\mathbf{0}_V) = 0$, dove $\mathbf{O}_V$ indica il vettore nullo di V.

Definizione 22.4 *Se* $\dim V = n$ *e* $\mathcal{B}$ *é una sua base, la matrice simmetrica di ordine* n *di* φ*, ottenuta rispetto a* $\mathcal{B}$ *si dice anche* **matrice di** Q *(rispetto alla base* $\mathcal{B}$*) e il suo rango si dice anche* **rango della forma quadratica** Q**.**

Esempio 22.8 L'espressione polinomiale della forma quadratica Q su $\mathbb{R}^3$, avente la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$, mentre l'espressione polinomiale della relativa forma bilineare simmetrica è:

$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + x_3y_3 - (x_1y_2 + x_2y_1) - 2(x_1y_3 + x_3y_1) + x_2y_3 + x_3y_2.$

Osservazione 22.3 *C'è una corrispondenza biunivoca tra forme bilineari simmetriche e forme quadratiche associate. Infatti* φ *individua* Q *e viceversa, data la forma quadratica* Q*, utilizzando la forma polare di* Q*, si ha:*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\}.$$

22.2.1 Rappresentazione di una forma quadratica in forma matriciale

Da quanto detto nel Paragrafo 22.1.1 segue che, per ogni $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$, e, per ogni $\mathbf{x} \in V$, si ha:

$$Q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = {}^tXAX.$$

Il determinante della matrice di Q si dice **discriminante** di Q.

Si puó osservare che $Q(\mathbf{x})$ si esprime quindi mediante un polinomio omogeneo di secondo grado nelle componenti del vettore $\mathbf{x}$. Questo è il motivo che giustifica il nome di forma quadratica.

Esercizio 22.1 Data la forma quadratica reale su $\mathbb{R}^4$: $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_3^2 + 3x_4^2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_4$,

i) scrivere l'espressione polinomiale della forma bilineare simmetrica φ associata a Q e la relativa matrice (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$).

ii) Posto $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 1, 0)$, calcolare $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $Q(\mathbf{a})$.

Soluzione: i) $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_3y_3 + 3x_4y_4 - 2(x_1y_3 + x_3y_1) + 5(x_2y_4 + x_4y_2).$

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ii) $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$Q(\mathbf{a}) = Q(1, 0, 1, 0) = 1 + 4 + 0 - 4 + 0 = 1.$

22.3 Classificazione delle forme bilineari simmetriche e delle forme quadratiche

La definizione che segue intende estendere il concetto ordinario di ortogonalità tra vettori al caso piú generale delle forme bilineari simmetriche.

Definizione 22.5 *Due vettori* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *si dicono* **coniugati** *o* **ortogonali** *rispetto a* $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$, *oppure rispetto a* Q *se* $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Osservazione 22.4 Se φ coincide con il prodotto scalare introdotto nel Capitolo 24.1, la definizione di vettori ortogonali appena enunciata coincide con la nozione di ortogonalitá introdotta nel suddetto capitolo.

Esempio 22.9 I vettori $\mathbf{x} = (1, -1)$ e $\mathbf{y} = (3, 4)$ sono ortogonali rispetto alla forma bilineare simmetrica $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ così definita: $\varphi = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_2y_1$. Infatti $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 4 + 2(-1) \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 0$.

Teorema 22.4 *Il vettore nullo è ortogonale a ogni vettore, rispetto a ogni forma bilineare simmetrica* $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$.

Dimostrazione: Per ogni forma bilineare $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$, per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ e per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha: $\varphi(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Posto $\lambda = 0$, per ogni $\mathbf{x} \in V$, si ottiene $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{0}_V) = 0$. ▮

Teorema 22.5 *Siano* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ *vettori di uno spazio vettoriale* V *su* $\mathbb{R}$ *e si consideri il sottospazio* $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p)$. *Se* $\mathbf{x} \in V$ *è ortogonale rispetto a* $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$ *a tutti i vettori* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$, *allora* $\mathbf{x}$ *è ortogonale ad ogni vettore di* $\mathcal{F}$ *e viceversa.*

Dimostrazione: Infatti, se $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, allora, per ogni vettore $\mathbf{y}$ di $\mathcal{F}$, $\mathbf{y} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_p\mathbf{u}_p$ si ha:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) + \ldots + x_p\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p) = 0.$$

Il viceversa è ovvio. ▮

Si osservi che la precedente proprietà è già stata dimostrata per il complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale su uno spazio vettoriale Euclideo, quindi nel caso in cui φ sia un prodotto scalare su V.

Definizione 22.6 *Due sottospazi si dicono* **coniugati** *o* **ortogonali** *rispetto a* φ *se e soltanto se ogni vettore del primo sottospazio è ortogonale a ogni vettore del secondo sottospazio.*

Teorema 22.6 *Sia* $\mathcal{A}$ *un sottoinsieme non vuoto di vettori di* V. *L'insieme* $\mathcal{F}$ *dei vettori di* V *ortogonali ad ogni vettore di* $\mathcal{A}$, *rispetto a una forma bilineare simmetrica* $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$, *è un sottospazio vettoriale di* V, *in simboli:*

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in V \mid \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{A}\}.$$

Dimostrazione: Infatti, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathcal{F}$ e per ogni coppia di scalari λ_1, λ_2 di $\mathbb{R}$ si ha

$$\varphi(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2, \mathbf{y}) = \lambda_1\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{y}) + \lambda_2\varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{A}.$$

Dunque $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 \in \mathcal{F}$. ▮

In particolare, se $\mathcal{W}$ è un sottospazio vettoriale di V e $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ una sua base, allora un vettore $\mathbf{x}$ è ortogonale ad ogni vettore di $\mathcal{W}$ se e solo se è ortogonale ai vettori $\mathbf{u}_i$ della base. Infatti, si ha che $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, per ogni $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$ se e solo $\varphi(\mathbf{x}, \lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_k) = 0$, per ogni $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$. Ma questo succede se e solo se $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = 0$, per ogni $i = 1, \ldots, k$.

Se indichiamo con $\mathcal{W}'$ il sottospazio vettoriale ortogonale a $\mathcal{W}$, si ha che in generale l'intersezione $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}'$ non è formata dal solo vettore nullo e non è detto in generale che la somma dei due sottospazi vettoriali $\mathcal{W} + \mathcal{W}'$ coincida con V.

Esempio 22.10 Se si considera la forma bilineare φ su $\mathbb{R}^3$ con espressione polinomiale

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 2x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) - (x_1y_3 + x_3y_1) - 2(x_2y_3 + x_3y_2)$$

rispetto alla base canonica e il sottospazio

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1 = (4,1,0), \mathbf{u}_2 = (3,0,1))$$

si ha che il sottospazio ortogonale a $\mathcal{W}$ é:

$$\mathcal{W}'' = \{\mathbf{x} \in V \,|\, \varphi(\mathbf{x},\mathbf{u}_1 = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{u}_2 = 0\}.$$

Poichè:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u}_1) = 2x_1 - 8x_2 - 6x_3, \quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{u}_2) = 2x_1 - 8x_2 - 5x_3,$$

segue che $\mathcal{W}'' = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1)$ e quindi

$$\begin{aligned} &\mathcal{W} \cap \mathcal{W}'' = \mathcal{W}'', \\ &\mathcal{W} + \mathcal{W}'' = \mathcal{W} \subset V. \end{aligned}$$

Esercizio 22.2 Data la forma bilineare simmetrica φ su $\mathbb{R}^3$ con matrice associata rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ a & 4 & -2 \\ b & -2 & c \end{pmatrix}, \ a,b,c \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori dei parametri a,b,c i due iperpiani vettoriali:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}, \\ \mathcal{W}_2 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 - x_3 = 0\} \end{aligned}$$

sono ortogonali rispetto a φ.

Soluzione: L'espressione polinomiale associata a φ è:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 3x_1y_1 + a(x_1y_2 + x_2y_1) + b(x_1y_3 + x_3y_1) + 4x_2y_2 - 2(x_2y_3 + x_3y_2) + cx_3y_3.$$

L'iperpiano vettoriale $\mathcal{W}_1$ ha, ad esempio, come base:

$$\mathbf{u}_1 = (-1,0,1), \ \mathbf{u}_2 = (2,1,0).$$

Come base di $\mathcal{W}_2$ possiamo considerare:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,2), \ \mathbf{v}_2 = (0,1,0).$$

I due iperpiani $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sono ortogonali rispetto a φ se e solo se:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1) = -3 - b + 2c = 0, \\ \varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_2) = -a - b = 0, \\ \varphi(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1) = 2 + 4b + a = 0, \\ \varphi(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2) = 2a + 4b = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare si ottiene come unica soluzione:

$$a = -2, \ b = 0, \ c = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 22.3 Si consideri la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ definita da:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2(-x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 + hx_3x_4).$$

Trovare, per ogni valore $h \in \mathbb{R}$, una base per il sottospazio vettoriale ortogonale al sottospazio vettoriale $\mathcal{W} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ con:

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,-1,0), \quad \mathbf{u}_2 = (0,1,0,1).$$

Soluzione: La matrice associata a Q rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ 1 & -1 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sottospazio ortogonale a $\mathcal{W}$ è:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = 0, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2) = 0\}.$$

In notazione matriciale si ha:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ 1 & -1 & h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 + x_3 + (1-h)x_4 = 0.$$

Analogamente

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0-1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ 1 & -1 & h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -x_2 + (h-1)x_3 - x_4 = 0.$$

Quindi il sottospazio vettoriale $\mathcal{W}'$ ortogonale a $\mathcal{W}$ è:

$$\mathcal{W}' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_3 + (1-h)x_4 = -x_2 + (h-1)x_3 - x_4 = 0\}.$$

La dimensione del sottospazio $\mathcal{W}'$ è 2 perche' il rango della matrice associata al sistema lineare omogeneo è 2, per ogni $h \in \mathbb{R}$ e ad esempio una sua base è costituita dai vettori:

$$((-1, h-1, 1, 0), (h-1, -1, 0, 1)).$$

Definizione 22.7 *Si dice* **nucleo** *di una forma* $\varphi \in \mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$ *il sottospazio di* V *formato dai vettori ortogonali a tutti i vettori di* V *rispetto a* φ *e si indica con* $\ker\varphi$, *in simboli:*

$$\ker\varphi = \{\mathbf{x} \in V \,|\, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ \forall\, \mathbf{y} \in V\}.$$

Definizione 22.8 *Si dice che* φ *è* **non degenere** *se* $\ker\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$ *e* **degenere** *se* $\ker\varphi \neq \{\mathbf{0}_V\}$.

Teorema 22.7 *Sia* φ *un elemento di* $\mathcal{B}_s(V, \mathbb{R})$. *Allora* φ *è degenere se e soltanto se* $\det A = 0$, *dove* A *è la matrice associata a* φ, *rispetto ad una base* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *di* V.

Dimostrazione: Si cercano i vettori $\mathbf{x}$ non nulli di V tali che $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ o, equivalentemente, tali che $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) = 0$, per ogni $j = 1, \ldots, n$. Posto $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, si ottiene:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) = \varphi(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

D'altra parte $\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)$ e scrivendo $a_{ij} := \varphi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = 0$$

che è un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite il quale ha soluzioni non nulle se e soltanto se il rango della matrice $A = (a_{ij})$ è minore di n o, equivalentemente, se il determinante di A è uguale a zero. ▮

Osservazione 22.5 Si ha ovviamente la relazione:

$$\dim V = \dim \ker \varphi + \operatorname{rank}(A).$$

Inoltre φ è non degenere se e solo se $\dim V = \operatorname{rank}(A)$.
Da questo segue che tutte le matrici associate alla stessa forma bilineare simmetrica hanno lo stesso rango.

Tale osservazione permette di introdurre la seguente:

Definizione 22.9 *Il* **rango** *rank*(φ) *della forma bilineare* φ *è il rango di una qualunque matrice associata a* φ.

Infatti, essendo $\ker \varphi$ un concetto che non dipende dalla base scelta per rappresentare φ, tutte le matrici associate a φ, del tipo ${}^tPAP$ hanno lo stesso rango.

Osservazione 22.6 Il prodotto scalare introdotto nel Capitolo 24.1 é un esempio di forma bilineare simmetrica non degenere.

Esercizio 22.4 Determinare il nucleo della forma bilineare $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ di matrice:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Si cercano i vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ per i quali $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) = 0,\ j = 1, 2, 3,$ che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Si ottiene $\mathbf{x} = (2x_3, -x_3, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R},$ e quindi $\ker \varphi = \mathcal{L}((2, -1, 1))$.

Esercizio 22.5 Sia φ una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice di φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sapendo che i vettori $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ formano una base di $\ker \varphi$ e che $Q(\mathbf{w}) = 8$, dove $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$ e Q è la forma quadratica associata a φ.

Soluzione: Indichiamo con:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Poichè $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è una base di $\ker \varphi$ devono valere le condizioni:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{u}) = 0, \\ \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}) = 0. \end{cases}$$

Si ottengono quindi le 6 equazioni:

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 0,\ a_{12} + 2a_{22} + a_{23} = 0,\ a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0,$$
$$a_{11} + a_{12} = 0,\ a_{12} + a_{22} = 0, a_{13} + a_{23} = 0.$$

Dall'altra condizione $Q(\mathbf{w}) = 8$ si ottiene:

$$Q(\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + 2\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 8.$$

Risolvendo quindi il sistema lineare formato dalle 7 equazioni nelle 6 incognite $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ si ottiene come unica soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definizione 22.10 *Un vettore* $\mathbf{x} \in V$ *si dice* **isotropo** *per la forma quadratica* Q *se* $Q(\mathbf{x}) = 0$.

Teorema 22.8 *Se un vettore* $\mathbf{x}$ *appartiene a* $\ker\varphi$, *allora* $Q(\mathbf{x}) = 0$ *e perciò* $\mathbf{x}$ *è isotropo. (*φ *é la forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica é* Q*).*

Dimostrazione: Se per ogni vettore $\mathbf{y}$ di V si ha $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, segue che $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) = 0$. ▮

Osservazione 22.7 Non sempre vale il viceversa. Gli esempi che seguono mettono in evidenza che, in generale, $\ker\varphi$ non coincide con l'insieme dei vettori isotropi ma è in esso contenuto.

Esercizio 22.6 Si consideri la forma bilineare simmetrica φ dell'Esercizio 22.2 con $a = -2, b = 0, c = \frac{3}{2}$, stabilire se l'insieme dei vettori isotropi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione: Un vettore $\mathbf{x}$ è isotropo se:

$$\phi(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2 = 0;$$

Si vede quindi che l'insieme dei vettori isotropi non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esempio 22.11 Su $\mathbb{R}^3$ con base canonica $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ è data la forma quadratica:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

la cui forma bilineare simmetrica associata è:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 2x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) - (x_1y_3 + x_3y_1) - 2(x_2y_3 + x_3y_2).$$

Il vettore $\mathbf{a} = (4,1,0)$ è isotropo per la forma quadratica Q perché $Q(\mathbf{a}) = 16 - 16 = 0$, ma $\mathbf{a}$ non appartiene a $\ker\varphi$ in quanto:

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi $\varphi(\mathbf{a},\mathbf{e}_1) = 2$.

Esempio 22.12 La forma quadratica $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ ha matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\det A \neq 0$. I vettori isotropi di Q sono i vettori $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ tali che $x_1^2 - x_2^2 = 0$, da cui $x_1 = \pm x_2$, quindi $\mathbf{x} = (\pm x_2, x_2)$ e formano l'insieme:

$$\mathcal{L}((1,1)) \cup \mathcal{L}((-1,1)).$$

$\ker\varphi$ si riduce al vettore nullo, come risulta da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definizione 22.11 *Una forma quadratica reale si dice:*

1. **definita positiva (negativa)** *se* $\forall \mathbf{x} \in V, Q(\mathbf{x}) \geq 0 (\leq 0)$ *e* $Q(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_V$
2. **semidefinita positiva (negativa)** *se* $\forall \mathbf{x} \in V, Q(\mathbf{x}) \geq 0 (\leq 0)$ *ma esistono vettori* $\mathbf{x} \in V$ *tali che* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$ *e* $Q(\mathbf{x}) = 0$.
3. **non definita** *se ha segno variabile al variare dei vettori di* V.

Teorema 22.9 *Se la forma quadratica* Q *è definita (positiva o negativa), allora è non degenere.*

Dimostrazione: Per ogni vettore $\mathbf{x}$ di $\ker\varphi$ e per ogni vettore $\mathbf{y}$ di V si ha $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Ciò implica $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) = 0$ ma Q è definita, dunque $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$. ∎

Osservazione 22.8 Non vale il viceversa della proposizione precedente. Infatti, ad esempio, la forma quadratica dell'Esempio 22.12 è non degenere ma non è definita perché i vettori non nulli $\mathbf{x} = (1,1)$ e $\mathbf{y} = (-1,1)$, ad esempio, sono tali che $Q(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{y}) = 0$.

Osservazione 22.9 Una forma bilineare non definita puó essere in generale sia degenere che non degenere.

Esempio 22.13 Per ciascuna forma bilineare simmetrica e forma quadratica associata, si riportano: la matrice, il suo determinante, il nucleo, l'insieme dei vettori isotropi e la relativa classificazione.

[1] $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 \geq 0$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 1$, $\ker\varphi = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, $Q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
φ è definita positiva non degenere.

[2] $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$, $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$, $\ker\varphi = \mathcal{L}((0,0,1))$, $Q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{L}((0,0,1))$.
φ è semidefinita positiva degenere.

[3] $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$.

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 \geq 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \det A = 0, \ \ker\varphi = \mathcal{L}((1,-1)), \ Q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{L}((1,-1)).$$

φ è semidefinita positiva degenere.

[4] $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$, $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = -1$, $\ker\varphi = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$,
$Q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow (x_1 = x_2)$ insieme con $(x_1 = -x_2) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{L}((1,1)) \cup \mathcal{L}((1,-1))$.

φ è non definita non degenere.

[5] $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1$, $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$, $\ker\varphi = \mathcal{L}((0,0,1))$,

$$Q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow (x_1 = 0) \text{ insieme con } (x_1 = 2x_2) \Rightarrow \mathcal{L}((0,0,1),(0,1,0)) \cup \mathcal{L}((2,1,0),(0,0,1))$$

φ è non definita degenere.

Importanti proprietà delle forme quadratiche semi–definite positive sono la **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz** e la **disuguaglianza di Minkowski**. Abbiamo già provato tali disuguaglianze nel Capitolo 12 nel caso in cui la forma bilineare simmetrica associata alla forma quadratica è un prodotto scalare.

Teorema 22.10 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz *Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$ e Q la forma quadratica associata. Se Q è semidefinita positiva, si ha:*

$$[\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})]^2 \leq Q(\mathbf{x})Q(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V.$$

Dimostrazione: Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha:

$$Q(\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}) + 2\lambda\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y}). \tag{22.4}$$

Poichè Q è semidefinita positiva, deve essere $Q(\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}) \geq 0$, per ogni λ e quindi il discriminante del precedente trinomio deve essere negativo, cioè:

$$[\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})]^2 - Q(\mathbf{x})Q(\mathbf{y}) \leq 0.$$

Si puó osservare che se $\mathbf{x}$ è isotropo (cioè $Q(\mathbf{x}) = 0$), la disuguaglianza è verificata con il segno $=$. ▮

Conseguenza della precedente disuguaglianza è la seguente:

Teorema 22.11 Disuguaglianza di Minkowski *Sotto le stesse ipotesi del Teorema precedente, si ha:*

$$\sqrt{Q(\mathbf{x}+\mathbf{y})} \leq \sqrt{Q(\mathbf{x})} + \sqrt{Q(\mathbf{y})}, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V.$$

Dimostrazione: Se si usa (22.4) nel caso di $\lambda = 1$, si ottiene:

$$Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y}).$$

Per il Teorema 22.10 si ha:

$$Q(\mathbf{x}) + 2\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y}) \leq Q(\mathbf{x}) + 2\sqrt{Q(\mathbf{x})Q(\mathbf{y})} + Q(\mathbf{y}) = \left(\sqrt{Q(\mathbf{x})} + \sqrt{Q(\mathbf{y})}\right)^2$$

da cui segue il teorema. ▮

Si osservi che la precedente disuguaglianza, nel caso in cui φ sia un prodotto scalare, corrisponde alla disuguaglianza triangolare già dimostrata, in quanto $\sqrt{Q(\mathbf{x})}$ rappresenta la norma del vettore $\mathbf{x}$.

Osservazione 22.10 Segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz che, nel caso di una forma φ bilineare simmetrica semidefinita positiva, $\ker\varphi$ coincide con l'insieme dei vettori isotropi, che, in questo caso, é un sottospazio vettoriale.

22.4 Forme canoniche

Definizione 22.12 *Due espressioni polinomiali di una forma quadratica Q si dicono* **equivalenti** *se si possono ottenere una dall'altra mediante un cambiamento di base.*

Esempio 22.14 Le due espressioni polinomiali:

$$Q((x_1,x_2)) = x_1x_2, \quad R((y_1,y_2)) = y_1^2 - y_2^2$$

sono equivalenti. Infatti con la trasformazione:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ dove } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

si ha:

$$Q((x_1,x_2)) = Q((y_1+y_2,y_1-y_2)) = (y_1+y_2)(y_1-y_2) = y_1^2 - y_2^2 = R((y_1,y_2)).$$

L'espressione assunta da Q nell'esempio precedente giustifica la seguente:

Definizione 22.13 *Una forma quadratica Q si dice* **ridotta in forma canonica** *se la sua espressione polinomiale è del tipo:*

$$Q(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

ossia se la matrice a essa associata è diagonale.

Una forma canonica di Q è quindi una rappresentazione di Q mediante un polinomio omogeneo privo di termini misti.

Esempio 22.15 La forma quadratica $Q(\mathbf{x}) = x_1x_2$ dell'esempio precedente non è in forma canonica, mentre l'espressione polinomiale $R(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$ lo è. Inoltre, come abbiamo appena visto, le due forme sono tra di loro equivalenti quindi R è una forma canonica di Q.

Un'altra forma canonica di Q è, ad esempio, $S(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 3x_2^2$. Infatti S si ottiene da Q con il seguente cambiamento di base:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica inoltre che tutti i cambiamenti di base:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

realizzano forme quadratiche in forma canonica di Q per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \neq 0.$$

Tra le forme canoniche di una forma quadratica ne esistono sempre due particolari, come precisato dai seguenti teoremi:

Teorema 22.12 *Ogni forma quadratica $Q(\mathbf{x}) = {}^tXAX$ ha una forma canonica del tipo*

$$Q(\mathbf{x}) = R(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \tag{22.5}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice A (ciascuno ripetuto con la propria molteplicità.)

Dimostrazione: La matrice A associata a Q è simmetrica reale e perciò esiste una matrice ortogonale P tale che:

$${}^tPAP = P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Con il cambiamento di base $X = PY$, tenuto conto che P è ortogonale, si ricava:

$$Q(\mathbf{x}) = {}^tXAX = {}^t(PY)A(PY) = {}^tY({}^tPAP)Y = {}^tYDY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \ . \ \blacksquare$$

Definizione 22.14 *Una forma quadratica Q si dice* **ridotta in forma normale** *se è ridotta a forma canonica e i suoi coefficienti sono* $1, 0, -1$.

Teorema 22.13 *Ogni forma quadratica ammette una forma normale. Il numero dei coefficienti pari a 1 è uguale al numero di autovalori positivi, contati con la relativa molteplicità, e il numero dei coefficienti uguali a -1 é pari al numero di autovalori negativi, contati con la relativa molteplicitá.*

Dimostrazione: Sia Q ridotta a forma canonica e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base ortonormale rispetto alla quale Q si scrive come:

$$Q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

allora $\lambda_i = Q(\mathbf{e}_i)$. Si vuole una nuova base di $\mathbb{R}^n$, sia: $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \dots, \mathbf{e}_n')$ tale che $Q(\mathbf{e}_i') = 0, \pm 1$. Si deduce che:

$$\mathbf{e}_i' = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i \quad \text{se} \quad \lambda_i = 0.$$

Si provi, per esercizio, che $Q(a\mathbf{x}) = a^2 Q(\mathbf{x})$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Si osservi che $\mathcal{B}'$ è una base ortogonale, ma non ortonormale.

Esercizio 22.7 Ridurre a forma canonica la seguente forma quadratica:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Soluzione: La matrice associata Q e il relativo polinomio caratteristico sono rispettivamente:

$$M(Q) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Autovalori e autospazi sono:

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4,$

$V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((2, 1, -2)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1, 2, 2)),\ V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((2, -2, 1)),$

dai quali si ottiene la base ortonormale:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{(2, 1, -2)}{3},\ \mathbf{e}_2 = \frac{(1, 2, 2)}{3},\ \mathbf{e}_3 = \frac{(2, -2, 1)}{3}$$

La forma quadratica, in forma canonica, è

$$Q'(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ottenuta da Q con il cambiamento di base di matrice ortogonale:

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1. \end{pmatrix}.$$

Esercizio 22.8 Ricavare la forma normale della forma quadratica Q data nell'esercizio precedente.

Soluzione: Avendo calcolato gli autovalori e avendo scoperto che due sono positivi e uno negativo, si ha subito che la forma normale di Q é:

$$Q''(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = {}^tZ I_{2,1} Z.$$

Per convenzione i termini positivi si antepongono a quelli negativi.

Se, invece, si richiede anche il cambiamento di base che permette di realizzare Q'' allora si ha:

$$\left(\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2' = \frac{1}{2}\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2\right).$$

Esercizio 22.9 Ricavare un'altra forma canonica della forma quadratica Q introdotta nel primo esercizio.

Soluzione: Un'altra forma canonica di Q si può ottenere, ad esempio, con il metodo del completamento dei quadrati. Si procede come segue:

$Q(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1^2-2x_1x_2)+x_2^2-4x_2x_3 = 2(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)-2x_2^2+x_2^2-4x_2x_3 = 2(x_1-x_2)^2-(x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2)+4x_3 = 2(x_1-x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+4x_3^2.$

Con il cambiamento (non ortogonale) di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

che si può anche scrivere nella forma $X = PY$, dove:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

la forma quadratica assume la forma canonica:

$$R(y_1,y_2,y_3) = 2y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2.$$

La risposta a questo esercizio prova che esistono metodi diversi per pervenire alle forme canoniche di una forma quadratica. Inoltre, come si può notare, esistono forme canoniche diverse della stessa forma quadratica, ma **una sola** forma normale.

22.5 Il Teorema di Sylvester

Enunciamo e dimostriamo ora il fondamentale

Teorema 22.14 Legge d'inerzia di Sylvester *Tutte le forme canoniche di una stessa forma quadratica Q hanno lo stesso numero $p \leq r$, dove r è il rango di Q, di coefficienti positivi e lo stesso numero m di coefficienti negativi; la coppia (p,m) si dice* **segnatura** *di Q.*

Dimostrazione: Sia $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ una base di V rispetto alla quale Q assuma la forma:

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

per ogni $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n \in V$. Il numero dei coeffienti λ_i che sono diversi da zero è uguale al rango r della forma e quindi dipende solo da Q. Salvo riordinare la base possiamo supporre che i primi r coefficienti siano diversi da zero e che tra essi quelli positivi figurino per primi. Si avrà quindi:

$$\lambda_1 = \alpha_1^2, \ldots, \lambda_p = \alpha_p^2,\ \lambda_{p+1} = -\alpha_{p+1}^2, \ldots, \lambda_r = -\alpha_r^2$$

per un opportuno intero $p \leq r$ e opportuni numeri reali positivi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Si verifica facilmente che rispetto alla base:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\alpha_1},\ \mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{\alpha_2}, \ldots, \mathbf{f}_r = \frac{\mathbf{e}_r}{\alpha_r}, \mathbf{f}_{r+1} = \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{f}_n = \mathbf{e}_n$$

la forma associata è:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2, \tag{22.6}$$

per ogni $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \ldots + x_n\mathbf{f}_n \in V$.
Resta da dimostrare che p dipende solo da Q e non dalla base $(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)$.

Supponiamo allora che in un'altra base $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ la forma Q si esprima come:

$$Q(\mathbf{x}) = z_1^2 + \dots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \dots - z_r^2 \tag{22.7}$$

per un opportuno intero $t \leq r$. Dobbiamo far vedere che $t = p$. Supponiamo allora per assurdo che sia $t \neq p$. Possiamo supporre che sia $t < p$. Consideriamo i sottospazi:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{L}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p) \\ \mathcal{T} &= \mathcal{L}(\mathbf{b}_{t+1}, \dots, \mathbf{b}_n). \end{aligned}$$

Dato che $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{T} = p + n - t > n$, deve essere $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \{\mathbf{0}\}$ e quindi esiste $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Si ha

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + \dots + x_p\mathbf{f}_p = z_{t+1}\mathbf{b}_{t+1} + \dots + z_n\mathbf{b}_n.$$

Poiché $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, da (22.6) si ha

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 > 0,$$

mentre da (22.7) si deduce che

$$Q(\mathbf{x}) = -z_{t+1}^2 - \dots - z_r^2 < 0,$$

e cioè una contraddizione. Quindi $p = t$. ▮

Da osservare quindi che rispetto alla base $(\mathbf{f}_1, \dots \mathbf{f}_n)$ la matrice associata alla forma quadratica Q è data da:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix},$$

dove r è il rango di Q.

22.6 Segnatura di una forma quadratica

Due forme quadratiche equivalenti $Q(\mathbf{x})$ e $R(\mathbf{y}) = Q(P\mathbf{y})$, hanno lo stesso segno. Infatti dalla relazione $R(\mathbf{y}) = Q(P\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x})$, risulta che Q e R assumono gli stessi valori nei vettori corrispondenti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Quindi è evidente che per studiare il segno di una forma quadratica Q basta conoscere i segni dei coefficienti di una forma canonica di Q, in particolare $Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2 y^2 + \dots + \lambda_n^2 y_n^2$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice A associata a Q.

Dal Teorema di Sylvester si deduce che i segni dei coefficienti di tutte le forme canoniche coincidono con i segni degli autovalori. Tali segni si possono trovare agevolmente a partire dal polinomio caratteristico della matrice associata alla forma quadratica, utilizzando il:

Teorema 22.15 Regola di Cartesio *Sia $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ un polinomio reale con tutte le radici reali. Allora le radici positive di f sono tante quanti sono i cambiamenti di segno della successione $a_0, a_1, \dots, a_n$.*

Possiamo applicare questa regola al polinomio caratteristico della matrice (simmetrica) associata a una forma quadratica perché essa ha tutte le radici reali.

Esempio 22.16 1 Il polinomio $f(x) = 8 + 2x - 5x^2 + x^3$ ha le due radici reli positive 2 e 4. D'altra parte nella successione dei coefficienti $(8, 2, -5, 1)$ ci sono due cambiamenti di segno.

2 Il polinomio $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4)(x-5)x^3$ ha radici $0, -1, 2, 4, 5$ e le radici positive sono tre. D'altra parte $f(x) = -40x^3 - 12x^4 + 27x^5 - 10x^6 + x^7$ e si vede che ci sono tre cambiamenti di segno nei coefficienti di f.

Quindi per studiare il segno di una forma quadratica reale Q definita in $\mathbb{R}^n$ si procede in questo modo:

1) Si trova la matrice A associata a Q e se ne calcola il polinomio caratteristico $P(\lambda)$.

2) Si scrive $P(\lambda) = \lambda^s R(\lambda)$, con $R(0) \neq 0$. Si osservi che $\operatorname{rank} A = n - s$.

3) Si contano le variazioni di segno del polinomio $R(\lambda)$. Se queste variazioni sono p allora $R(\lambda)$ ha p radici positive. In conclusione $P(\lambda)$ ha:

s radici nulle;
p radici positive;
$n - (p + s)$ radici negative.

Esercizio 22.10 Determinare il segno della forma quadratica reale:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Soluzione: La matrice di Q e il relativo polinomio caratteristico sono:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$P(\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 4) + 4\lambda = -2\lambda + 2\lambda^2 - 8 + \lambda^2 - \lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8$

Vi sono due cambiamenti di segno e 0 non è una radice. Quindi la forma quadratica è non definita.

Le proprietà che seguono caratterizzano il segno di una forma quadratica reale attraverso il segno degli autovalori della matrice a essa associata.

Teorema 22.16 *La forma quadratica reale $Q(\mathbf{x}) = {}^tXAX$ è definita positiva (negativa) se e soltanto se tutti gli autovalori della matrice simmetrica reale A sono strettamente positivi (negativi).*

Dimostrazione: Sia R la forma canonica di Q legata agli autovalori (cfr. formula (22.5) del Teorema 22.12). Tenendo conto che $Q(\mathbf{x}) = R(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, si ha:

$$\forall \mathbf{y} \in V, \ Q(\mathbf{x}) \geq 0 \ \text{ e } \ Q(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{y} = 0.$$

D'altra parte $X = PY$ e quindi $\mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$. Quindi $\forall \mathbf{x} \in V$, $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ e $Q(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$, dunque Q è definita positiva. Viceversa, se per assurdo, $\lambda_1 \leq 0$, scelto $\mathbf{y} = (1, 0, \ldots, 0)$, si ottiene $\mathbf{x} \neq 0$ e quindi $Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 \leq 0$, contro l'ipotesi . ▮

Teorema 22.17 *La forma quadratica reale $Q(\mathbf{x}) = {}^tXAX$ è semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori della matrice simmetrica reale A sono non negativi (positivi) e almeno un autovalore è nullo.*

Teorema 22.18 *La forma quadratica reale $Q(\mathbf{x}) = {}^tXAX$ è non definita se e solo se la matrice simmetrica reale A ha autovalori di segno contrario.*

Le proposizioni precedenti sono conseguenza immediata delle definizioni di forma quadratica semidefinita e non definita e della formula (22.5) del Teorema 22.12.

Quindi riassumendo le varie forme normali, secondo il Teorema di Sylvester, in uno spazio vettoriale di dimensione n, sono:

$x_1^2 + \ldots + x_n^2$	definita positiva	segnatura $(n, 0)$
$x_1^2 + \ldots + x_p^2,\ p \leq n$	semidefinita positiva	segnatura $(p, 0)$
$-x_1^2 - \ldots - x_n^2$	definita negativa	segnatura $(0, n)$
$-x_1^2 - \ldots - x_p^2,\ p \leq n$	semidefinita negativa	segnatura $(0, p)$
$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots x_r^2,\ 0 < p < r \leq n$	non definita	segnatura $(p, r - p)$

Osservazione 22.11 Una forma quadratica in forma canonica ottenuta attraverso gli autovalori assume notevole importanza in geometria analitica, ad esempio, nella riduzione a forma canonica delle coniche e delle quadriche perché è legata a cambiamenti di basi ortonormali e conseguentemente a cambiamenti di riferimento ortogonali del piano e dello spazio. La stessa forma quadratica ridotta in forma normale, anche se più elegante e semplice per la sua classificazione, non può svolgere il ruolo della forma canonica legata agli autovalori perché con essa viene a mancare l'ortonormalità della base.

Per la restrizione di una forma quadratica ad un sottospazio vettoriale si ha il seguente:

Teorema 22.19 *Se $\mathcal{W}$ è un sottospazio vettoriale di V e Q è una forma quadratica definita (positiva o negativa) su V, la restrizione di Q a $\mathcal{W}$ è ancora una forma quadratica definita (positiva o negativa).*

La restrizione invece di una forma bilineare simmetrica non degenere è ancora una forma bilineare, ma non è detto che sia non degenere. Ad esempio, se si considera la forma bilineare dell'Esempio 22.13 [4], che è non degenere, le sue restrizioni ai sottospazi:

$$\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\},$$
$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\},$$

sono entrambe degeneri e coincidono con la forma nulla.

Capitolo 23

Per saperne di piú sulle Forme Bilineari

23.1 Lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche

Sull'insieme $\mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$ definiamo la somma di due forme bilineari simmetriche φ_1, φ_2 come l'applicazione $\varphi_1+\varphi_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \tag{23.1}$$

e il prodotto di una forma bilineare $\varphi \in \mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ come l'applicazione $\lambda\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$(\lambda\varphi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{23.2}$$

É immediato verificare che $\varphi_1 + \varphi_2$ e $\lambda\varphi$ sono forme bilineari simmetriche e che vale il seguente:

Teorema 23.1 *L'insieme $\mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$, rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare, definite rispettivalmente in (23.1) e (23.2), ha la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

Se $\dim V = n$, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, $\varphi \in \mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$ individua una matrice simmetrica di $\mathbb{R}^{n,n}$. Viceversa, assegnando una matrice simmetrica $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, usando:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

viene individuata una forma bilineare simmetrica φ su V. Si ha quindi il seguente:

Teorema 23.2 *Fissata una base dello spazio vettoriale V di dimensione n, lo spazio vettoriale $\mathcal{B}_s(V,\mathbb{R})$ delle forme bilineari simmetriche é isomorfo al sottospazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ delle matrici simmetriche di $\mathbb{R}^{n,n}$; esso ha quindi dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.*

La dimostrazione del teorema é lasciata come esercizio al Lettore.

23.2 Il determinante come forma p-lineare

Estendendo la definizione 22.1 si puó introdurre il concetto di forma p–lineare alternata che conduce direttamente alla definizione di determinante. Questo approccio permette agevolmente di dimostrare le proprietá dei determinanti elencate nel Capitolo 4.6.

Definizione 23.1 *Sia V uno spazio vettoriale reale. Ogni applicazione:*

$$\varphi : V \times V \times \ldots \times V \ (p \text{ volte}) \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{23.3}$$

lineare in ciascun argomento, prende il nome di **forma p–lineare su** V.

Osservazione 23.1 La definizione precedente generalizza la definizione di forma bilineare data in 22.1.

Esempio 23.1 Il prodotto misto definito come una funzione:

$$\begin{gathered} V_3 \times V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \to \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \end{gathered}$$

é un esempio di forma trilineare.

Il prodotto misto dei vettori dello spazio ordinario é proprio l'esempio da cui trae spunto la definizione che segue:

Definizione 23.2 *Una forma φ p–lineare si dice* **antisimmetrica** *o* **alternata** *se:*

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_p) = -\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_p), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Segue subito il:

Teorema 23.3 *Se $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$, per una qualche scelta di $i, j = 1, \dots, p$ allora $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) = 0$.*

Esempio 23.2 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 con base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Dati i vettori: $\mathbf{x}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2$, $\mathbf{x}_2 = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2$, si vuole calcolare l'espressione di una forma bilineare antisimmetrica $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, utilizzando il metodo introdotto in 24.1 ossia:

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ -\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

In pratica, il valore di $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ é determinato dal suo valore sugli elementi della base $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, mentre il coefficiente moltiplicativo é il determinante della matrice avente come righe le componenti dei vettori.

La situazione descritta nell'esempio precedente si ripete in generale, come afferma il Teorema seguente, la cui dimostrazione, solo un lungo calcolo, é lasciata per esercizio.

Teorema 23.4 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Dati i vettori:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{1n}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{x}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{2n}\mathbf{v}_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_n &= a_{n1}\mathbf{v}_1 + a_{n2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

e la forma n lineare antisimmetrica $\varphi : V \times V \times V \times \dots \times V(n\,\text{volte}) \longrightarrow \mathbb{R}$, allora:

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \Sigma_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n), \tag{23.4}$$

dove σ é una permutazione di $(1, 2, \dots, n)$ e $\epsilon(\sigma)$ il suo segno. Di conseguenza ogni forma n lineare antisimmetrica su V é univocamente determinata dal valore $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Vale anche il reciproco del teorema precedente, vale a dire:

Teorema 23.5 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una sua base. Sia λ un numero reale, esite ed é unica la forma φ n–lineare antisimmetrica su V tale che $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \lambda$.*

Dimostrazione: É lasciata per esercizio.

Se V é uno spazio vettoriale reale di dimensione n con base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ si puó dare la seguente:

Definizione 23.3 *Si dice* **determinante** *degli n-vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ il numero reale $\varphi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ tale che $\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 1$.*

Esempio 23.3 Se si considera lo spazio ordinario V_3 con la base canonica $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, allora il determinante dei tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ coincide con il loro prodotto misto:

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V_3,$$

in quanto $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 1$, per definizione di base ortonormale positiva.

Se si considerano le componenti degli n vettori dello spazio vettoriale V rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ si ottiene una matrice $A = (a_{ij})$ di $\mathbb{R}^{n,n}$, i cui vettori riga sono:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}),\\ &\dots\dots\dots\\ &\mathbf{v}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn}) \end{aligned}$$

e si puó provare che la definizione 23.3 di determinante degli n vettori coincide con la definizione di determinante di matrice che avevamo dato nel Capitolo 3. Infatti, data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, avevamo definito come:

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

dove σ é una permutazione di $(1, \dots, n)$ e $\epsilon(\sigma)$ il suo segno. Se si considerano gli n vettori riga $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$ della matrice A, si puó quindi osservare che:

$$\det A = \varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n),$$

dove φ é la forma n-lineare antisimmetrica su $\mathbb{R}^n$ tale che:

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det I = 1$$

con $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Dalla Definizione 23.3 segue il:

Teorema 23.6 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. n vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante degli n vettori relativo ad una qualsiasi base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ é diverso da zero.*

Dimostrazione: Se gli n vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora si puó provare che il determinante degli n vettori si annulla. Questo vale piú in generale per ogni forma n-lineare antisimmetrica φ. Infatti, poiché $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora almeno uno di essi, che possiamo supporre essere $\mathbf{v}_1$, é combinazione lineare degli altri:

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n,$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e quindi:

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha_2 \varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) + \dots + \alpha_n \varphi(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = 0.$$

Abbiamo quindi provato che, se il determinante degli n vettori non si annulla, allora gli n vettori sono linearmente indipendenti. Viceversa, supponiamo che l'insieme $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sia libero e che per assurdo il loro determinante sia uguale a zero. Poiché $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ é una base di V, possiamo scrivere i vettori della base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ come combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = b_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + b_{1n}\mathbf{v}_n,\\ \dots\dots\dots\\ \mathbf{e}_n = b_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + b_{nn}\mathbf{v}_n. \end{cases}$$

Per definizione di determinante relativo alla base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ si avrebbe:

$$\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1 = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

e quindi si ottiene una contraddizione. ▮

Osservazione 23.2 Abbiamo giá provato il precedente teorema dimostrando che una matrice A di $\mathbb{R}^{n,n}$ ha rango massimo n se e solo se il suo determinante é diverso da zero.

Utilizzando la Definizione 23.3 è possibile provare la formula di Binet per il determinante del prodotto di due matrici introdotta nel Capitolo 4:

Teorema 23.7 *Se* $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, *allora* $\det(AB) = \det A \det B$.

Dimostrazione: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione n con base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Date le matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ di $\mathbb{R}^{n,n}$, consideriamo i vettori riga della matrice B:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = b_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + b_{1n}\mathbf{e}_n, \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{v}_n = b_{n1}\mathbf{e}_1 + \dots + b_{nn}\mathbf{e}_n \end{cases}$$

ed i vettori (che non sono i vettori riga di A!):

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{1n}\mathbf{v}_n, \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{u}_n = a_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{v}_n. \end{cases}$$

Sia φ la forma n-lineare alternata tale che $\varphi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$.
Per definizione di derteminante si ha allora:

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det B\, \varphi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det B,$$
$$\varphi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \det A\, \varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n),$$

da cui si ottiene:

$$\varphi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \det A \det B.$$

Se si esprimono i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ come combinazioni lineari dei vettori della base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\mathbf{e}_k,$$

e si ricavano le espressioni dei coefficienti c_{ik} in termini di a_{ij} e b_{ij}, si ottiene:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

che è esattamente l'elemento di posto ik del prodotto delle due matrici A e B. Quindi si ha:

$$\varphi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \det(AB)\varphi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det(AB),$$

da cui segue la tesi. ▮

23.3 Rango del prodotto di matrici

In questo paragrafo si vuole ottenere una dimostrazione alternativa del fatto che il rango della forma bilineare φ non dipende dalla scelta della matrice associata e quindi della base usata per costruire la matrice.
In generale si ha il seguente:

Teorema 23.8 *1) Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{k,m}$, allora il rango $rank(BA)$ del prodotto delle due matrici é minore o uguale di entrambi i ranghi $rank(A)$ e $rank(B)$.*
2) Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$rank(A) = rank(QA) = rank(AP) = rank(QAP),$$

per ogni coppia di matrici invertibili $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$.

Dimostrazione: Se f, g sono le applicazioni lineari rappresentate dalle matrici A e B si ha che il prodotto BA, come abbiamo visto, é la matrice associata alla composizione $g \circ f$.
Dall'inclusione $\mathrm{im}(g \circ f) \subset \mathrm{im} g$, si ottiene:

$$\mathrm{rank}(BA) = \dim \mathrm{im}(g \circ f) \leq \dim img = \mathrm{rank}(B).$$

Ma si ha anche l'inclusione $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ da cui segue che $\dim \mathrm{im}(g \circ f) \leq \dim \mathrm{im} f$ e quindi anche $\mathrm{rank}(BA) \leq \mathrm{rank}(A)$.
Per provare la 2) , dalla 1) si ha:

$$\mathrm{rank}(QA) \leq \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(Q^{-1}QA) \leq \mathrm{rank}(QA)$$

da cui segue $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(QA)$.
Analogamente si puo' provare che $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AP)$ usando che $\mathrm{rank}(AP) \leq \mathrm{rank}(A)$. ▮
Dal precedente teorema si ha quindi in particolare che:

$$\mathrm{rank}({}^tPAP) = \mathrm{rank}(A),$$

per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e ogni matrice invertibile $P \in \mathbb{R}^{n,n}$.

23.4 Spazi pseudo-Euclidei

Gli spazi vettoriali Euclidei possono quindi essere visti come spazi vettoriali dotati di una forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata sia definita positiva. Nel caso in cui la forma quadratica sia non degenere e non definita lo spazio vettoriale V si dice **spazio vettoriale pseudo-euclideo**.
Se φ è la forma bilineare che determina la struttura di spazio pseudo-euclideo, come per gli spazi euclidei, si pone:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ si dice **prodotto scalare** dei due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Continuano a valere le prime tre proprietà della definizione di prodotto scalare su uno spazio euclideo, ma non vale piú la quarta proprietà in quanto la forma quadratica non è piú definita positiva.
Se lo spazio vettoriale V ha dimensione n e $(p, n-p)$ è la segnatura di φ, una base ortogonale $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ tale che $Q(\mathbf{e}_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p$ e $Q(\mathbf{e}_j) = -1,\ p+1 \leq j \leq n$ è detta **base ortonormale**.
Con una terminologia suggerita dalla teoria della relatività, un vettore $\mathbf{x}$ si dice vettore **spaziale** se $Q(\mathbf{x}) > 0$, vettore **temporale** se $Q(\mathbf{x}) < 0$. Se $\mathbf{x}$ è un vettore isotropo di Q, $\mathbf{x}$ si dice vettore **luce**.
Nel caso particolare in cui $n = 4$ e la segnatura della forma quadratica Q sia $(3, 1)$ si ha lo spazio-tempo della teoria della relatività e lo spazio pseudo-euclideo V prende il nome di **spazio di Minkowski**.

23.5 Altro metodo di riduzione a forma canonica du una forma quadratica

Si può agevolmente ridurre a forma canonica una forma quadratica reale con una tecnica che si basa sul metodo di riduzione delle matrici. Basta per questo osservare che la matrice B ottenuta da una data matrice A con l'operazione di colonna:

$$C_i \longmapsto C_i + aC_j$$

coincide con la matrice prodotto AE_i dove E_i è la matrice che si ottiene dalla matrice identità sulla quale è stata eseguita la medesima operazione di colonna.

Analogamente la matrice B ottenuta da una data matrice A con l'operazione di riga:

$$R_i \longmapsto R_i + aR_j$$

coincide con la matrice prodotto ${}^tE_iA$, La matrice ${}^tE_i$ non è altro che la matrice che si ottiene dalla matrice identità sulla quale è stata eseguita la medesima operazione di riga.

Ciò premesso si eseguano contemporaneamente sulla matrice A eguali operazioni per le righe e per le colonne fino a ottenere una matrice diagonale D, avendo l'avvertenza di fare in modo che il nuovo elemento a_{ii} sia non nullo. Le matrici A e D risultano allora legate dalla relazione:

$$D = {}^tE_n \dots {}^tE_2\,{}^tE_1 A E_1 E_2 \dots E_n = {}^t(E_1E_2\dots E_n)AE_1E_2\dots E_n.$$

Posto $P = E_1E_2\dots E_n$, si osserva che tale matrice P si può ottenere dalla matrice identità I sulla quale si siano eseguite, nell'ordine, le operazioni di colonna considerate.

Esercizio 23.1 Si riduca a forma canonica la seguente forma quadratica:

$$Q(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Soluzione: Sulla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, associata alla forma quadratica Q, si operi come descritto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1 \to R_1 - R_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_1 \to C_1 - C_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + \frac{1}{2}C_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 2R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \underset{C_3 \to C_3 - 2C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Una forma canonica di $Q(\mathbf{x})$ è allora: $Q(\mathbf{x}) = 2y_1^2 + y_2^2 - \frac{9}{2}y_3^2$ e la matrice del relativo cambiamento di base è P dove:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 - C_3 \\ C_3 \to C_3 + \frac{1}{2}C_1 \\ C_3 \to C_3 - 2C_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P.$$

(Attenzione al fatto che $2, 1, \frac{9}{2}$ non sono gli autovalori di A!)

Esercizio 23.2 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, riferito alla base canonica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, si consideri la forma bilineare simmetrica φ definita da:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \frac{28}{5}x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2,$$

per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e sia Q la forma quadratica associata.

i) Scrivere la matrice della forma bilineare simmetrica φ rispetto alla base canonica e calcolare il suo rango.

ii) Determinare $\ker\varphi$.

iii) Provare che $\mathscr{B} = ((1,1,1), (2,-1,2), (1,3,-3))$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice di φ rispetto a $\mathscr{B}$.

iv) Determinare una forma canonica della forma quadratica Q e la sua segnatura.

Soluzione: i) La matrice della forma bilineare φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & \frac{28}{5} \end{pmatrix}.$$

Si controlla facilmente che il rango di φ è 2.

ii) Si ha $\ker\varphi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3\}$. Le componenti del vettore $\mathbf{x} \in \ker\varphi$ sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = -2x_1 + 4x_2 + \frac{28}{5}x_3 = 0, \end{cases}$$

che si possono determinare, ad esempio, attraverso i seguenti passi di riduzione sulla matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & \frac{28}{5} \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 3 & \frac{18}{5} \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - \frac{6}{5}R_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

si ottengono le soluzioni $x_1 = 2\lambda$, $x_2 = -6\lambda$, $x_3 = 5\lambda$. Pertanto $\ker\varphi = \mathcal{L}((2,-6,5))$.

iii) Posto $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3, \end{pmatrix}$ si ha $\det P = 12 \neq 0$ e perciò i vettori di $\mathscr{B}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice di φ rispetto alla nuova base è:

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & \frac{28}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 63 & 36 & -29 \\ 36 & 27 & 2 \\ -29 & 2 & 67 \end{pmatrix}.$$

Si ha $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{28}{5}x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$. Usando il metodo di riduzione di Gauss-Lagrange, si può scrivere:

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + \frac{5}{2}x_2^2 + \frac{18}{5}x_3^2 + 6x_2x_3 = \frac{1}{2}(2x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}x_2 + 2x_3\right)^2.$$

Di conseguenza mediante il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_2' = \dfrac{5}{2}x_2 + 3x_3 \\ x_3' = x_3, \end{cases}$$

si ottiene la forma canonica:

$$Q(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\right)2x_1'^2 + \left(\frac{2}{5}\right)x_2'^2.$$

La forma Q è pertanto degenere, semidefinita positiva e di segnatura $(2, 0)$.

Esercizio 23.3 Nello spazio $\mathbb{R}^3$, riferito alla base canonica $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, sia φ la forma bilineare simmetrica definita da:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 6x_2y_2 + 56x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 7(x_1y_3 + x_3y_1) - 18(x_2y_3 + x_3y_2),$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

i) Scrivere la matrice di φ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

ii) Provare che i vettori $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3' = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

iii) Scrivere la matrice di φ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$.

iv) Scrivere le espressioni polinomiali della forma quadratica Q associata a φ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Soluzione. i) La matrice della forma bilineare φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 6 & -18 \\ 7 & -18 & 56 \end{pmatrix}$$

ii) Posto $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1, \end{pmatrix}$, si ha $\det P = 1 \neq 0$ e perciò i vettori considerati formano una base di $\mathbb{R}^3$.

iii) La matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ è P. Denotando con:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

le matrici colonna dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, si ha:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^tXAY. \tag{23.5}$$

Indicando con X' e Y' le matrici colonna delle componenti dei vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, si ha $X = PX'$, $Y = PY'$ e la formula (23.5) diventa:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^tX'\,{}^tPAPY', \tag{23.6}$$

quindi la matrice di φ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è:

$$A' = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

iv) Rispetto alla base $\mathscr{B}$, la forma quadratica Q associata a φ è:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 6x_2^2 + 56x_3^2 - 4x_1x_2 + 14x_1x_3 - 36x_3^2.$$

Tenendo conto della formula (23.6) la forma quadratica Q, rispetto alla base $\mathscr{B}'$, si scrive:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1'^2 + 2x_2'^2 - x_3'^2.$$

Capitolo 24

Forme Bilineari e Forme Quadratiche – Esercizi

24.1 Esercizi

[1] Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Si consideri la forma quadratica:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 \in V.$$

Classificare Q e trovare una base rispetto alla quale Q si scrive in forma canonica.

[2] Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4, riferito alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$. Si consideri la forma quadratica su V:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i\mathbf{v}_i \in V.$$

i) Verificare che Q è un prodotto scalare su V.
ii) Trovare una base ortonormale, rispetto a Q, di V.
iii) Dato il sottospazio vettoriale:

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i\mathbf{v}_i \in V \, / \, x_1 - 2x_2 + x_3 = 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \right\},$$

determinare una base per $\mathcal{F}^\perp$, sottospazio ortogonale ad $\mathcal{F}$ rispetto a Q, e verificare che $V = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp$.

[3] Si consideri la funzione:

$$\varphi : \mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (A, B) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tA B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{2,2},$$

dove $\mathrm{tr}(A)$ denota la traccia della matrice A.
i) Verificare che φ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^{2,2}$.
ii) Dato il sottospazio vettoriale $\mathcal{F} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \, / \, \mathrm{tr}(A) = 0\}$, trovare una base per $\mathcal{F}^\perp$, complemento ortogonale, rispetto a φ, di $\mathcal{F}$.
iii) Si consideri una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ del tipo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, dove $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}_2$ è una base di $\mathcal{F}^\perp$. Scrivere l'espressione di φ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

[4] Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
i) Trovare la matrice, rispetto alla base $\mathscr{B}$, del prodotto scalare φ definito in modo opportuno sapendo che $\mathscr{B}' = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$ è una base ortonormale (rispetto a φ).
ii) Determinare una base per $\mathcal{F}^\perp$, complemento ortogonale (rispetto a φ) del piano vettoriale $\mathcal{F}$ di equazione $x_1 + x_3 = 0$.
iii) Calcolare la norma del vettore $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ (rispetto a φ).

[5] Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, riferito alla base $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Data la funzione $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - (x_1y_3 + x_3y_1), \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{v}_i, \ \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{3} y_j\mathbf{v}_j \in V, \tag{24.1}$$

verificare che (V, φ) è uno spazio vettoriale euclideo e trovarne una base ortonormale.

[6] Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica di $\mathbb{R}^{3,3}$.
i) Determinare una matrice B tale che ${}^tBAB$ sia una matrice diagonale.
ii) Classificare la forma quadratica $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ associata ad A, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

[7] Classificare e determinare la segnatura della seguente forma quadratica $Q : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$, che, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$, è associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 7 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[8] i) Verificare che lo spazio vettoriale V_3, rispetto alla forma quadratica

$$Q(\mathbf{x}) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

è uno spazio vettoriale euclideo, ($\mathbf{x}$ è un vettore di V_3, (x_1, x_2, x_3) sono le componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$).
ii) Determinare una base ortonormale di V_3, rispetto al prodotto scalare così introdotto.

[9] Classificare la seguente forma quadratica su $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 24x_4^2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 16x_3x_4.$$

[10] Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & h+1 & 1 \\ -h^2 - 2h & h+1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h+1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) Discutere, al variare del parametro h, le soluzioni dell'equazione $AX = B$.
ii) Posto $h = 0$ nella matrice A, scrivere la forma quadratica associata alla matrice A^tA e ridurla a forma canonica.
iii) Posto $h = 1$ nella matrice A, trovare una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathcal{R}(A)$ (spazio vettoriale generato dalle righe di A).

[11] Determinare la segnatura delle seguenti forme quadratiche definite su $\mathbb{R}^4$:

$$Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2;$$

$$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 - 2x_4^2;$$

$$Q_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_3x_4 + 4x_3^2;$$

$$Q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_3x_4 - 4x_4^2.$$

[12] Data la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2(xy - xz + yz),$$

la si classifichi e si determini una base rispetto alla quale Q assuma una forma canonica.

[13] Si consideri la forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2.$$

i) Classificare Q, determinandone la segnatura.
ii) Individuare una base di $\mathbb{R}^3$, rispetto alla quale Q possa essere scritta in forma canonica.

[14] Classificare la seguente forma quadratica $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$Q(x, y, z, t) = x^2 - 8xy + y^2 + 6xz + z^2 + t^2,$$

ridurla a forma canonica e determinare la matrice del cambiamento di base che la realizza.

[15] Classificare la seguente forma quadratica $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 2xy + 5y^3 + 6xz + 6yz + 3z^2$$

e ridurla a forma canonica.

[16] Si consideri la seguente forma quadratica su $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

i) Classificare Q e scriverla in forma normale.
ii) Scrivere Q in forma canonica e determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale Q assume tale espressione.

[17] Si consideri la seguente forma quadratica su $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_2x_3.$$

i) Classificare Q e scriverla in forma normale.
ii) Scrivere Q in forma canonica e determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale Q assume tale espressione.

[18] Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, riferito alla base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Detto $\mathcal{F}$ il piano vettoriale di equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, ((x_1, x_2, x_3) sono le componenti di un generico vettore $\mathbf{x}$ di V, rispetto alla base $\mathcal{B}$), si consideri l'endomorfismo $p : V \longrightarrow V$, proiezione ortogonale di V su $\mathcal{F}$, così definito: se $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, dove $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{F}$ e $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{F}^\perp$, allora $p(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1$.
i) Verificare che la funzione:

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathbf{u} \longmapsto Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot p(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in V,$$

è una forma quadratica su V e classificarla.
ii) Trovare una base di V rispetto alla quale Q si scriva in forma canonica.

24.2 Soluzioni

[1]

```
A = {{0, 1, 1}, {1, 0, 1}, {1, 1, 0}};

B = Eigensystem[A]
{{-1, -1, 2}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[B[[2]]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

Segnatura: $(1, 2)$; base ortonormale:

$$\mathcal{B} = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

[2]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{2, 1, 0, 0}, {1, 2, 0, 0}, {0, 0, 2, -1}, {0, 0, -1, 2}};

B = Eigensystem[A]
{{1, 1, 3, 3}, {{0, 0, 1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {0, 0, -1, 1}, {1, 1, 0, 0}}}

GramSchmidt[B[[2]], InnerProduct →
    (2 #1 [[1]] #2[[1]] + 2 #1 [[2]] #2[[2]] + 2 #1 [[3]] #2[[3]] +
        2 #1 [[4]] #2[[4]] + 2 #1 [[1]] #2[[2]] - 2 #1 [[3]] #2[[4]]&)]
```

$\left\{\left\{0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right\}\right\}$

```
X = {x1, x2, x3, x4};

Solve[{X. A.Transpose[{{1, 0, -1, 2}}] == 0,
    X.A.Transpose[{{0, 1, 2, 1}}] == 0}, {x1, x2, x3, x4}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
```

$\left\{\left\{x1 \to \frac{11\,x3}{3} - \frac{10\,x4}{3}, x2 \to -\frac{10\,x3}{3} + \frac{5\,x4}{3}\right\}\right\}$

```
Det[{{1, 0, -1, 2}, {0, 1, 2, 1},
    {11/3, -10/3, 1, 0}, {-10/3, 5/3, 0, 1}}]
```

$\frac{124}{3}$

i) Segnatura: $(4, 0)$.

ii) $\mathcal{B} = \left(\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right)\right)$.

iii) $\mathcal{F} = \mathcal{L}((1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, 1))$, $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{11}{3}, -\frac{10}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, 0, 1\right)\right)$.

[3]

```
P = {{1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {1, 0, 0, -1}};

MatrixForm[Transpose[P].P]
```

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) Se $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, allora: $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$.

ii) $\mathcal{F} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

iii) La matrice richiesta è: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[4]

```
Reduce[{a11 + 2 a12 + 2 a13 + 2a23 + a22 + a33 == 1,
   a11 + a22 + 2a12 == 1,
   a11 + a33 - 2 a13 == 1,
   a11 + 2 a12 + a22 + a13 + a23 == 0,
   - a11 - a12 + a23 + a33 == 0,
   - a11 + a13 - a12 + a23 == 0}, {a11, a12, a13, a22, a23, a33}]
a11 == 3&&a12 == -4&&a13 == 2&&a22 == 6&&a23 == -3&&a33 == 2

A = {{3, -4, 2}, {-4, 6, -3}, {2, -3, 2}}; X = {x1, x2, x3};

Solve[{X.A.Transpose[{{1, 0, -1}}] == 0,
   X.A.Transpose[{{0, 1, 0}}] == 0}, {x1, x2, x3}]

Solve ::" svars" : Equations may not give solutions for all solve variables.
{{x1 → 3 x3/2, x2 → 3 x3/2}}

Sqrt[{1, 1, -1}.A.Transpose[{{1, 1, -1}}]]
{√5}
```

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

ii) $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)\right)$.

iii) $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}$.

[5]

```
<< LinearAlgebra'Orthogonalization'

A = {{2, 0, -1}, {0, 2, 0}, {-1, 0, 2}};

B = Eigensystem[A]
{{1, 2, 3}, {{1, 0, 1}, {0, 1, 0}, {-1, 0, 1}}}

GramSchmidt[B[[2]],
  InnerProduct → (2 #1 [[1]] #2[[1]] + 2 #1 [[2]] #2[[2]] +
        2 #1 [[3]] #2[[3]] - #1 [[1]] #2[[3]] - #1 [[3]] #2[[1]]&)]
{{1/√2, 0, 1/√2}, {0, 1/√2, 0}, {- 1/√6, 0, 1/√6}}
```

$$\mathscr{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right).$$

[6]

```
A = {{1, 1, 1}, {1, 1, 1}, {1, 1, 1}};

Eigensystem[A]
{{0, 0, 3}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}
```

i) $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Segnatura: $(1,0)$.

[7]

```
A = {{1, 3, 4, -1, 2}, {3, 0, 0, 7, -1},
   {4, 0, 0, 0, 0}, {-1, 7, 0, 2, -1}, {2, -1, 0, -1, 3}};
CharacteristicPolynomial[A, x]
```

$2160 - 649\,x - 366\,x^2 + 70\,x^3 + 6\,x^4 - x^5$

Segnatura: $(3,2)$.

[8]

```
A = {{3, -1, -1}, {-1, 3, -1}, {-1, -1, 3}};
B = Eigensystem[A]
{{1, 4, 4}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}
<< LinearAlgebra‘Orthogonalization‘
RootReduce[GramSchmidt[B[[2]], InnerProduct →
    (3 #1 [[1]] #2[[1]] + 3 #1 [[2]] #2[[2]] + 3 #1 [[3]] #2[[3]] -
       2 #1 [[1]] #2[[2]] - 2 #1 [[2]] #2[[3]] - 2 #1 [[1]] #2[[3]]&)]]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{-\frac{7}{2\sqrt{30}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}, -\frac{1}{2\sqrt{30}}\right\}, \left\{-\frac{193}{2\sqrt{32430}}, 11\sqrt{\frac{2}{16215}}, -\frac{79}{2\sqrt{32430}}\right\}\right\}$$

i) Segnatura: $(3,0)$.

ii) $$\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{7}{2\sqrt{30}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}, -\frac{1}{2\sqrt{30}}\right), \left(-\frac{193}{2\sqrt{32430}}, 11\sqrt{\frac{2}{16215}}, -\frac{79}{2\sqrt{32430}}\right)\right).$$

[9]

```
A = {{1, 0, -1, -2}, {0, 4, 2, 0}, {-1, 2, 11, 8}, {-2, 0, 8, 24}}; S
CharacteristicPolynomial[A, x]
```

$576 - 984\,x + 370\,x^2 - 40\,x^3 + x^4$

Si tratta di un prodotto scalare.

[10]

```
A = {{1, 0, 1}, {2, h + 1, 1}, {-h^2 - 2h, h + 1, -1}};
X = {x, y, z}; B = {0, 1, h + 1};

Reduce[A.X == B, {x, y, z}]
h == 0&&y == 1 - x&&z == -x || x == 1/(-2 - h)&&
    y == (3 + h)/((1 + h) (2 + h))&&z == 1/(2 + h)&&h ≠ 0&&1 + h ≠ 0&&2 + h ≠ 0

A1 = A/.h → 0;

MatrixForm[c = Transpose[A1].A1]
5  2  3
2  2  0
3  0  3

Eigenvalues[c]
{0, 5 - √7, 5 + √7}

A2 = A/.h → 1;

<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[A2]
{{1/√2, 0, 1/√2}, {1/(3 √2), 2 √2/3, -1/(3 √2)}, {-2/3, 1/3, 2/3}}
```

i) Se $h = 0$: $x = t, y = 1 - t, z = -t, \quad t \in \mathbb{R}$;

se $h = -2$ e se $h = -1$: non esistono soluzioni;

se $h \notin \{-2, -1, 0\}$: $x = \dfrac{1}{-2-h}, y = \dfrac{3+h}{(1+h)(2+h)}, z = \dfrac{1}{2+h}$.

ii) $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$; $Q(\mathbf{x}) = (5 - \sqrt{7})(x_2')^2 + (5 + \sqrt{7})(x_3')^2$.

iii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{L}\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right), \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)\right)$.

[11]

```
A1 = {{2, 1, 0, 0}, {1, 2, 0, 0}, {0, 0, 2, 1}, {0, 0, 1, 2}};

Eigenvalues[A1]
{1, 1, 3, 3}

A2 = {{2, -1, 0, 0}, {-1, -2, 0, 0}, {0, 0, 2, -1}, {0, 0, -1, -2}};

Eigenvalues[A2]
```

$\left\{-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$

```
A3 = {{1, -2, -1, 0}, {-2, 0, 0, 0}, {-1, 0, 4, 2}, {0, 0, 2, 0}};

B = Eigenvalues[A3]
```

$$\left\{\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}-\frac{5\sqrt{13}}{2}}, \frac{5}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}-\frac{5\sqrt{13}}{2}}, \frac{5}{4}+\frac{\sqrt{13}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}+\frac{5\sqrt{13}}{2}}, \frac{5}{4}+\frac{\sqrt{13}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}+\frac{5\sqrt{13}}{2}}\right\}$$

```
<< Algebra`AlgebraicInequalities`

SemialgebraicComponents[{B[[1]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{False}]

SemialgebraicComponents[{B[[2]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{True}]

SemialgebraicComponents[{B[[3]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{False}]

SemialgebraicComponents[{B[[4]] > 0}]
SemialgebraicComponents[{True}]

A4 = {{3, -1, 0, 0}, {-1, 3, 0, 0}, {0, 0, 4, 1}, {0, 0, 1, -4}};

Eigenvalues[A4]
```

$\left\{2, 4, -\sqrt{17}, \sqrt{17}\right\}$

Segnatura di Q_1: $(4, 0)$;
segnatura di Q_2: $(2, 2)$;
segnatura di Q_3: $(2, 2)$;
segnatura di Q_4: $(3, 1)$.

[12]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{2, 1, -1}, {1, 1, 1}, {-1, 1, 5}};

B = FullSimplify[Eigensystem[A]]
```

$$\left\{\left\{0, 4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\right\}, \left\{\{2,-3,1\}, \left\{4+3\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 1\right\}, \left\{4-3\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}, 1\right\}\right\}\right\}$$

```
FullSimplify[GramSchmidt[B[[2]]]]
```

$$\left\{\left\{\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right\}, \left\{\sqrt{\frac{1}{14}\left(5+3\sqrt{2}\right)}, \sqrt{\frac{5}{28}+\frac{3}{14\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{13}{28}-\frac{9}{14\sqrt{2}}}\right\}, \left\{-\sqrt{\frac{1}{14}\left(5-3\sqrt{2}\right)}, \sqrt{\frac{5}{28}-\frac{3}{14\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{13}{28}+\frac{9}{14\sqrt{2}}}\right\}\right\}$$

Segnatura: $(2,0)$; base ortonormale:

$$\mathscr{B} = \left(\left(\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right), \left(\sqrt{\frac{1}{14}(5+3\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{5}{28}+\frac{3}{14\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{13}{28}-\frac{9}{14\sqrt{2}}}\right),\right.$$

$$\left.\left(-\sqrt{\frac{1}{14}(5-3\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{5}{28}-\frac{3}{14\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{13}{28}+\frac{9}{14\sqrt{2}}}\right)\right).$$

[13]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{2, 0, 2}, {0, 1, 0}, {2, 0, -1}};

B = Eigensystem[A]
{{-2, 1, 3}, {{-1, 0, 2}, {0, 1, 0}, {2, 0, 1}}}

GramSchmidt[B[[2]]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}, \{0,1,0\}, \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right\}$$

i) Segnatura: $(2,1)$.

ii) Forma canonica: $Q(\mathbf{x}) = -2(x_1')^2 + (x_2')^2 + 3(x_3')^2$;

base ortonormale: $\mathscr{B} = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), (0,1,0), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right).$

[14]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{1, -4, 3, 0}, {-4, 1, 0, 0}, {3, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

B = Eigensystem[A]
{{-4, 1, 1, 6},
  {{-5, -4, 3, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 3, 4, 0}, {5, -4, 3, 0}}}

GramSchmidt[B[[2]]]
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 1\}, \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, 0\right\}\right\}$$

Forma canonica: $Q(\mathbf{x}) = -4(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 + 6(x_2')^2$;

base ortonormale:

$$\mathscr{B} = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,0,1), \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5\sqrt{2}}, 0\right)\right).$$

[15]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{5, 1, 3}, {1, 5, 3}, {3, 3, 3}};

Eigenvalues[A]
{0, 4, 9}
```

Segnatura: $(2, 0)$; forma canonica: $Q(\mathbf{x}) = 4(x_2')^2 + 9(x_3')^2$.

[16]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{1, -1, 0, 0}, {-1, 2, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

B = Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 3}, {{1, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {-1, 0, 1, 0}, {1, -2, 1, 0}}}

GramSchmidt[B[[2]]]
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 1\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right\}\right\}$$

i) Segnatura: $(3, 0)$; forma normale: $Q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2$.

ii) Forma canonica: $Q(\mathbf{x}) = (x_2'')^2 + (x_3'')^2 + 3(x_4'')^2$;

base ortonormale:

$$\mathscr{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), (0,0,0,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right).$$

[17]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

A = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, -1, 0}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}};

B = Eigensystem[A]
{{0, 1, 1, 2}, {{0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 0}, {0, -1, 1, 0}}}

GramSchmidt[B[[2]]]
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 1\}, \{1, 0, 0, 0\}, \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}\right\}$$

i) Segnatura: $(3, 0)$; forma normale: $Q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2$.

ii) Forma canonica: $Q(\mathbf{x}) = (x_2'')^2 + (x_3'')^2 + 2(x_4'')^2$;

base ortonormale: $\mathcal{B} = \left(\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right)$.

[18]

```
<< LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{2, 1, 0}, {-1, 0, 1}, {1, -2, 1}}]
```

$$\left\{\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, \sqrt{\frac{5}{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right\}$$

i) Il fatto che Q sia una forma quadratica segue dalle proprietà del prodotto scalare e delle applicazioni lineari; dalla definizione si ha che la segnatura è $(2, 0)$.

ii) Una base richiesta è $\mathcal{B} = \left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\dfrac{2}{15}}, \sqrt{\dfrac{5}{6}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$.

Capitolo 25

Le Coniche: equazioni di secondo grado

25.1 Rappresentazione di una retta nel piano con l'uso del calcolo vettoriale

Come premessa essenziale dello studio delle coniche del piano viene proposto un ripasso sull'equazione della retta utilizzando lo strumento del calcolo vettoriale.

Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = (O, x, y)$ nel piano xy, sia r la retta passante per il punto P_0 parallela ad un vettore $\mathbf{v}$. Risulta:

$$r = \{P \mid \vec{P_0P} = t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\},$$

ossia:

$$r : P = P_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{25.1}$$

La (25.1) é detta: **equazione vettoriale parametrica** di r, $t \in \mathbb{R}$ é detto *parametro* al variare del quale P descrive la retta r.
Siano $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$ le coordiante cartesiane di P_0 e P, rispettivamente, e (l, m) le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Si verifica che l'equazione (25.1) equivale alle seguenti:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{25.2}$$

Le equazioni precedenti sono dette *equazioni parametriche* di r, (l, m) prendono il nome di **parametri direttori** di r.

Osservazione 25.1 Siano (l, m) i parametri direttori di una retta r, allora:

i) $(l, m) \neq (0, 0)$;
ii) se $l = 0$ (o $m = 0$) la retta r é parallela all'asse y (o all'asse x);
iii) i parametri direttori di r sono individuati a meno di un fattore moltiplicativo;
iv) i coseni direttori di r, ossia;

$$\cos\widehat{\mathbf{ri}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \quad \cos\widehat{\mathbf{rj}} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

sono individuati a meno di un segno.

Esempio 25.1 Determinare l'equazione della retta r passante per $P_0 = (-1, 3)$ e parallela al vettore $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; determinare, inoltre, i coseni direttori di r.

Le equazioni parametriche di r sono:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t, \end{cases}$$

per i parametri direttori si ha:

$$\cos \widehat{\mathbf{r}\mathbf{i}} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \cos \widehat{\mathbf{r}\mathbf{j}} = -\frac{5}{\sqrt{29}}.$$

25.1.1 Retta per un punto perpendicolare ad un vettore

Sia r la retta per P_0 perpendicolare ad un vettore $\mathbf{n}$. Si ha:

$$r = \{P \mid \overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}\} = \{P \mid \overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0\}. \tag{25.3}$$

Siano $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$ le coordinate di P_0 e di P, (a, b) le componenti di $\mathbf{n}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$. L'equazione (25.3) equivale a:

$$ax + by + c = 0 \tag{25.4}$$

che é detta *equazione cartesiana* di r, dove $(a, b) \neq (0, 0)$ sono le componenti di un vettore ortogonale a r.

Osservazione 25.2 Dalle equazioni parametriche (25.2) di una retta r si ricava:

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

o, equivalentemente:

$$m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0,$$

che é l'equazione cartesiana della retta. La relazione tra i coefficienti a e b nell'equazione cartesiana e i parametri direttori di r é la seguente:

$$\begin{cases} a = \rho m \\ b = -\rho l, \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\}, \end{cases}$$

Esempio 25.2 Scrivere l'equazione cartesiana della retta dell'esempio **[1]**.

Dalle equazioni parametriche di r si ottiene:

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{-5}$$

da cui:

$$5x + 2y - 1 = 0.$$

Esempio 25.3 Data l'equazione della retta $r : 2x - 7y + 5 = 0$,determinare un vettore parallelo a r ed un vettore ad essa ortogonale.

I vettori richiesti sono rispettivamente, ad esempio: $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 14\mathbf{j}$.

Osservazione 25.3 i) Ogni equazione lineare in x e y del tipo (25.4) rappresenta l'equazione cartesiana di una retta ed é individuata a meno di un fattore moltiplicativo.

ii) Se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ sono due punti distinti del piano, la retta r passante per A e B ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A), \ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ed equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esempio 25.4 Scrivere le equazioni parametriche e cartesiana della retta passante per i punti $A = (-1, 2)$ e $B = (4, -5)$.

Le equazioni richieste sono, rispettivamente:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - 7t, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$7x + 5y - 3 = 0.$$

25.2 Riduzione delle coniche in forma canonica

Lo scopo di questo paragrafo é di dimostrare il seguente:

Teorema 25.1 *Nel piano, ogni equazione di secondo grado nelle variabili x, y rappresenta una conica.*

Nella dimostrazione del Teorema xy viene indicato il metodo da seguire per passare da un'equazione di secondo grado qualsiasi in x, y alla forma canonica di una conica.

Dimostrazione. Sia:

$$C : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{25.5}$$

una qualsiasi equazione di secondo grado in $x, y, (a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, 3)$.
Introduciamo le due matrici simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

pertanto C si puó scrivere come:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{25.6}$$

oppure:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0. \tag{25.7}$$

Esempio 25.5 La circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

individua le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}.$$

Si osservi che: A é in forma diagonale e $\det A > 0, \ \det B \neq 0$.

Esempio 25.6 L'ellisse di equazione (in forma canonica):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

individua le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Si osservi che: A é in forma diagonale, $\det A>0,\ \det B\neq 0$.

Esempio 25.7 L'iperbole di equazione (in forma canonica):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

individua le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{b^2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Si osservi che: A é in forma diagonale, ma $\det A<0,\ \det B\neq 0$.

Esempio 25.8 La parabola, di equazione (in forma canonica):

$$y^2=2px$$

individua le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -p\\ 0 & 1 & 0\\ -p & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Si osservi che, anche in questo caso: A é in forma diagonale, $\det A=0,\ \det B\neq 0$.

Esempio 25.9 La conica degenere di equazione:

$$(2x+y)^2=4x^2+y^2+4xy=0$$

individua le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Si osservi che $\det A=0$ e $\det B=0$.

Suddividiamo il procedimento di riduzione a forma canonica in due casi:

Primo caso: $a_{12}=0$, ossia la matrice A associata alla conica si presenta in forma diagonale:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}$$

e l’equazione (25.5) assume la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Operando con una opportuna traslazione degli assi del tipo:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

si deve pervenire all’annullarsi dei coefficienti a_{13} e a_{23}. I valori di x_0 e y_0 si ottengono con il metodo “del completamento dei quadrati”, come illustrato negli esempi che seguono.

Esempio 25.10 Si studi la curva di equazione: $2x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

L’equazione precedente si puó trasfomare nel modo seguente:

$2x^2 + y^2 - 4x + 6y = 2(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) = 2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) - 2 - 9 = 2(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 11 = 0$.

Operando con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 3 \end{cases}$$

si ottiene l’equazione:

$$\frac{X^2}{\frac{11}{2}} + \frac{Y^2}{11} = 1$$

ossia é un’ellisse con centro nel punto $O' = (1, -3)$ e assi di equazioni: $x = 1, y = -3$.

Esempio 25.11 Si studi la curva di equazione: $x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 4 = 0$.

L’equazione precedente si puó trasformare nel modo seguente:

$(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 2y) - 4 = (x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) - 4 - 1 + 4 = (x - 1)^2 - 4(y - 1)^2 - 1 = 0$.

Operando con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

si ottiene l’equazione:

$$X^2 - 4Y^2 = 1$$

ossia é un’iperbole con centro nel punto $O' = (-1, -1)$ e assi di equazioni: $x = -1, y = -1$.

Esempio 25.12 Si studi la curva di equazione: $y = x^2 + 2x + 2$.

L’equazione precedente si puó trasfomare nel modo seguente:

$y = (x^2 + 2x + 1) + 1;\ y - 1 = (x + 1)^2$.

Operando con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$

si ottiene l’equazione:

$$Y = X^2$$

ossia é una parabola con vertice nel punto $O' = (-1, 1)$ e asse di equazione: $x = -1$.

Avvertenza: per applicare il metodo del completamento dei quadrati e poi effetture la traslazione opportuna si devono sempre mettere in evidenza i coefficienti di x^2 e di y^2.

Secondo caso: Si consideri la matrice A e si supponga $a_{12} \neq 0$. Si vuole effettuare un opportuno cambiamento di base: $X = PX'$ in modo da trasformare la matrice A in una matrice diagonale D.
Ponendo:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

l'equazione (25.7) diventa:

$$^tXAX + 2\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} X + a_{33} = 0$$

e dopo il cambiamento di base si trasforma in:

$$^tX'(^tPAP)X' + 2\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} PX' + a_{33} = 0.$$

Si osservi che il termine noto rimane invariato. Poiché A é una matrice simmetrica, esiste (per un ben noto risultato di algebra lineare) un cambiamento di base ortonormale che permette di ottenere una matrice diagonale $D = {}^tPAP$. In altri termini si effettua una rotazione ponendo i nuovi assi nella direzione degli autovettori. Il verso degli assi del riferimento ruotato deve essere scelto in modo che $\det P = 1$.
Sia:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

la rotazione considerata trasforma l'equazione (25.7) in:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \tag{25.8}$$

Si ricordi, inoltre, che $\det D = \det A$, pertanto la rotazione non cambia il determinante della matrice A. Verifichiamo ora che non viene anche variato il determinante della matrice B. A questo scopo si osservi che, da $X = PX'$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{P} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

ossia:

$$^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} {}^tQ.$$

Da (25.6), mediante il cambiamento di base, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} {}^tQBQ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Poniamo $B' = {}^tQBQ$, é chiaro che $\det B' = \det B$, essendo $\det Q = \det P$. Procedendo con la traslazione si completa la riduzione a forma canonica.

Prima di continuare con la dimostrazione del teorema, inseriamo alcuni esempi numerici.

Esempio 25.13 Si riduca a forma canonica la conica di equazione:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x = 0. \tag{25.9}$$

Le matrici A e B sono date da:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e (25.9) si puó scrivere come:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \tag{25.10}$$

Si osservi che $\det A = 8$ e $\det B \neq 0$, ci sono, quindi, ragionevoli motivi per pensare che si tratti di un'ellisse. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$, i corrispondenti autovettori (di norma unitaria per avere una matrice ortogonale, del cambiamento di base) sono:

$$\mathbf{i}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{j}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

vale a dire, le equazioni della rotazione sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

che sostituite in (25.10) portano all'equazione:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,$$

ossia:

$$2x'^2 + 4y'^2 + 2x' + 2y' = 0.$$

Operando con il metodo del completamento dei quadrati mediante la traslazione:

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{1}{2} \\ Y = y' + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

si ottiene:

$$\frac{X^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{3}{16}} = 1.$$

Si tratta proprio di un'ellisse. Per calcolarne le coordinate del centro, dei vertici e le equazioni degli assi é necessario determinare le equazioni complessive del movimento rigido del piano (composizione della rotazione e della traslazione) che ha permesso di ricavare tale equazione, e precisamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Quindi il centro dell'ellisse O' ha coordinate $\left(-\dfrac{3}{4\sqrt{2}}, \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\right)$, gli assi, che hanno equazioni $X = 0, Y = 0$ nel riferimento $\mathcal{R}'' = (O', X, Y)$, hanno equazioni, rispettivamente:

$$x - y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad x + y + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,$$

nel riferimento iniziale $\mathcal{R} = (O, x, y)$. Con lo stesso procedimento si possono ricavare le coordinate dei vertici e dei fuochi.

Esempio 25.14 Si riduca a forma canonica la conica di equazione:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y - 3 = 0. \tag{25.11}$$

Le matrici A e B sono date da:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

e (25.11) si puó scrivere come:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0. \tag{25.12}$$

Si osservi che $\det A = 0$ e $\det B \neq 0$, ci sono, quindi, ragionevoli motivi per pensare che si tratti di una parabola. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$, i corrispondenti autovettori (di norma unitaria per avere una matrice ortogonale, del cambiamento di base) sono:

$$\mathbf{i}' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad \mathbf{j}' = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

vale a dire, le equazioni della rotazione sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

che sostituite in (25.11) portano all'equazione:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 3 = 0,$$

ossia:

$$5y'^2 + 2\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' - 3 = 0.$$

Operando con il metodo del completamento dei quadrati mediante i passaggi seguenti:

$$5y'^2 + 2\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' - 3 = 0; \; 5\left(y'^2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}y' + \frac{1}{5}\right) = -2\sqrt{5}x' + 4,$$

$$5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -2\sqrt{5}\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

vale a dire, con la traslazione:

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ Y = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

si ottiene:

$$Y^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}X.$$

Si tratta proprio di una parabola. Per calcolare le coordinate del vertice, e le equazioni dell'asse e della direttrice é necessario determinare le equazioni complessive del movimento rigido del piano (composizione della rotazione e della traslazione) che ha permesso di ricavare tale equazione, e precisamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi il vertice della parabola O' ha coordinate $(0, 1)$ e l'asse, cha ha equazione $Y = 0$ nel riferimento $\mathcal{R}'' = (O', X, Y)$, ha equazione:

$$2x - y - 1 = 0$$

nel riferimento iniziale $\mathcal{R} = (O, x, y)$.
Con lo stesso procedimento si possono ricavare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

Riprendiamo la discussione teorica. Dall'equazione (25.8) si ottiene:

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

il cui determinante é:

$$\det B = \det B' = \lambda_1\lambda_2 a_{33} - \lambda_1 a'^2_{23} - \lambda_2 a'^2_{13}. \tag{25.13}$$

Allo scopo di poter scrivere l'equazione della conica in forma canonica, si deve effettuare la traslazione:

$$\begin{cases} x' = X + x_0 \\ y' = Y + y_0 \end{cases} \tag{25.14}$$

in modo da annullare i termini di primo grado. Per calcolare il valore di x_0, y_0 si sostituiscono le equazioni della traslazione (25.14) in (25.8); si ottiene:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(x_0\lambda_1 + a'_{13})X + 2(y_0\lambda_2 + a'_{23})Y + \gamma = 0 \tag{25.15}$$

e il temine noto é dato da:

$$\gamma = \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + 2a'_{13}x_0 + 2a'_{23}y_0 + a_{33}. \tag{25.16}$$

Si distinguono i seguenti casi:

1) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$;
2) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$;
3) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$.

1) Essendo $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, allora $\lambda_1\lambda_2 = \det D = \det A \neq 0$. Si pone:

$$x_0 = -\frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \quad y_0 = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2}, \tag{25.17}$$

sostituendo (25.17) in (25.15) si ha:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \gamma = 0,$$

e in (25.16) si ottiene:

$$\gamma = \frac{\det B'}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Si perviene quindi alla seguente classificazione:

a) se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno e $\det B' = \det B \neq 0$, si ottiene un'ellisse;
b) se λ_1 e λ_2 hanno segno opposto e $\det B' = \det B \neq 0$, si ottiene un'iperbole;
c) se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno e $\det B' = \det B = 0$ (ossia $\gamma = 0$), si ottiene una conica degenere formata da un solo punto reale (intersezione di due rette immaginarie);
d) se λ_1 e λ_2 hanno segno opposto e $\det B' = \det B = 0$ (ossia $\gamma = 0$), si ottiene una conica degenere formata da due rette reali incidenti.
Si osservi che nei due ultimi casi il rango di B é 2.

2) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, l'equazione (25.8) diventa:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Sostituendo le equazioni della traslazione (25.14) si ottiene:

$$\lambda_2 Y^2 + 2(y_0\lambda_2 + a'_{23})Y + 2a'_{13}X + \gamma = 0, \tag{25.18}$$

e il temine noto é dato da:

$$\gamma = \lambda_2 y_0^2 + 2a'_{13}x_0 + 2a'_{23}y_0 + a_{33}.$$

Distinguiamo i due sottocasi:

a) $a'_{13} = 0$;
b) $a'_{13} \neq 0$.

a) si puó subito ricavare il valore di $y_0 = -\dfrac{a'_{23}}{\lambda_2}$; operando quindi con una traslazione in cui x_0 puó assumere qualsiasi valore, da (25.18) si ha:

$$\lambda_2 Y^2 + \gamma = 0. \tag{25.19}$$

Si ottiene, inoltre, da (25.13) che $\det B = \det B' = 0$. Se $\gamma \neq 0$, allora il rango di B' é 2 e (25.19) rappresenta due rette parallele (reali o immaginarie). Se anche $\gamma = 0$, allora il rango di B' é 1 e si ottengono due rette coincidenti.

b) $a'_{13} \neq 0$. Si ricava, di nuovo, il valore di $y_0 = -\dfrac{a'_{23}}{\lambda_2}$, e (25.18) diventa:

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{13}X + \gamma = 0,$$

ossia:

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{13}\left(X + \frac{\gamma}{2a'_{13}}\right) = 0.$$

Dall'equazione $\gamma = 0$ si ottiene anche il valore cercato di x_0, pertanto é univocamente definita la traslazione cercata. La conica é una parabola. Si osservi che $\det B = \det B' = -\lambda_2 a_{13}'^{2} \neq 0$.

3) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, l'equazione (25.8) diventa:

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Sostituendo le equazioni della traslazione (25.14) si ottiene:

$$\lambda_1 X^2 + 2(x_0\lambda_1 + a'_{13})X + 2a'_{23}Y + \gamma = 0, \tag{25.20}$$

e il temine noto é dato da:

$$\gamma = \lambda_1 x_0^2 + 2a'_{13}x_0 + 2a'_{23}y_0 + a_{33}.$$

Distinguiamo i due sottocasi:

a) $a'_{23} = 0$;
b) $a'_{23} \neq 0$.

a) si puó subito ricavare il valore di $x_0 = -\dfrac{a'_{13}}{\lambda_1}$; operando quindi con una traslazione in cui y_0 puó assumere qualsiasi valore, da (25.20) si ha:

$$\lambda_1 X^2 + \gamma = 0. \tag{25.21}$$

Si ottiene, inoltre, da (25.13) che $\det B = \det B' = 0$. Se $\gamma \neq 0$, allora il rango di B' é 2 e (25.19) rappresenta due rette parallele (reali o immaginarie). Se anche $\gamma = 0$, allora il rango di B' é 1 e si ottengono due rette coincidenti.

b) $a'_{23} \neq 0$. Si ricava, di nuovo, il valore di $x_0 = -\dfrac{a'_{13}}{\lambda_1}$, e (25.18) diventa:

$$\lambda_1 X^2 + 2a'_{23}Y + \gamma = 0,$$

ossia:

$$\lambda_1 X^2 + 2a'_{23}\left(Y + \frac{\gamma}{2a'_{23}}\right) = 0.$$

Dall'equazione $\gamma = 0$ si ottiene anche il valore cercato di y_0, pertanto é univocamente definita la traslazione cercata. La conica é una parabola. Si osservi che $\det B = \det B' = -\lambda_1 a_{23}'^{2} \neq 0$.
Si sono cosí ottenute tutte le coniche degeneri e non degeneri; si osservi che tutte le coniche degeneri sono caratterizzate da $\det B = 0$ e classificate dal rango di B; mentre se $\det B \neq 0$, allora le coniche non degeneri sono caratterizzate da $\det A$; $\det A = 0$ corrisponde alla parabola, $\det A > 0$ all'ellisse, $\det A < 0$ all'iperbole.

In conclusione, si puó procedere alla **classificazione delle coniche attraverso il rango** rank(A) e rank(B) delle matrici associate, tenuto conto che il rango di A ed il rango di B sono invarianti per rototraslazioni nel piano:

$$\text{rank}(B) = 3 \begin{cases} \text{rank}(A) = 2: & \text{ellisse, iperbole;} \\ \text{rank}(A) = 1: & \text{parabola.} \end{cases}$$

$$\text{rank}(B) = 2 \begin{cases} \text{rank}(A) = 2: & \text{2 rette incidenti o rette isotrope;} \\ \text{rank}(A) = 1: & \text{2 rette reali parallele, 2 rette parallele immaginarie.} \end{cases}$$

$$\text{rank}(B) = \text{rank}(A) = 1: \quad \text{2 rette reali coincidenti.}$$

Esercizio 25.1 Nel piano, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (0, x, y)$, scrivere l'equazione dell'ellisse avente centro nell'origine e vertici $A_1 = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $A_2 = (-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$, $B_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, indicando esplicitamente le equazioni del cambiamento di riferimento usato.

Le coppie di vertici A_1, A_2 e B_1, B_2 appartengono rispettivamente alle rette $X : x-y = 0$ ed $Y : x+y = 0$ le quali, con l'origine O, si possono assumere come nuovo riferimento cartesiano del piano $\mathcal{R}' = (O, X, Y) = (O, \mathbf{i}', \mathbf{j}')$, dove:

$$\mathbf{i}' = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \ \mathbf{j}' = \frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}.$$

Tenuto conto che l'ellisse ha semiassi:

$$a = d(A_1, O) = 8$$
$$b = d(B_1, O) = 2,$$

la sua equazione, nel riferimento $\mathcal{R}'$, si scrive:

$$\frac{X^2}{64} + \frac{Y^2}{4} = 1. \tag{25.22}$$

Detta:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di riferimento, si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

(si ricordi che ${}^tP = P^{-1}$). Sostituendo in (25.22) si ha:

$$17x^2 + 17y^2 - 30xy - 128 = 0$$

che é l'equazione dell'ellisse richiesta.

Esercizio 25.2 Nel piano, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y) = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, scrivere l'equazione della parabola avente per asse la retta $r : x - 2y = 0$, il vertice nell'origine ed il fuoco nel punto $F = (2, 1)$.

I vettori $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ parallelo alla retta r, $\mathbf{s} = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ortogonale ad r e l'origine O individuano un nuovo riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (O, X, Y) = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, dove:

$$\mathbf{i}' = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$

In tale riferimento, poiché $d(O, F) = \sqrt{5}$, l'equazione della parabola é:

$$Y^2 = 4\sqrt{5}X. \tag{25.23}$$

Detta:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di riferimento, si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

(si ricordi che ${}^tP = P^{-1}$). Sostituendo in (25.23) si ha:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y = 0$$

che é l'equazione della parabola richiesta.

Esercizio 25.3 Nel piano, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y)$ scrivere l'equazione della parabola avente fuoco $F = (2, 1)$ e direttrice h la retta di equazione: $2x + y + 5 = 0$.

Il punto generico $P = (x, y)$ della parabola soddisfa la condizione:

$$d(P, F) = d(P, h),$$

ossia:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{2x + y + 5}{\sqrt{5}}\right)^2,$$

vale a dire:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y = 0.$$

Nel riferimento $\mathcal{R}' = (O, X, Y)$ che ha l'asse X coincidente con la retta OF di equazione $x - 2y = 0$ e l'asse Y passante per O ed ortogonale all'asse X, il fuoco ha coordinate $F = (\sqrt{5}, 0)$ e l'equazione della parabola é:

$$Y^2 = 4\sqrt{5}X.$$

La stessa equazione si ottiene ricordando che: $d(P, F) = d(P, h)$ e h ha equazione (in $\mathcal{R}'$): $X = -\sqrt{5}$, il fuoco ha cordinate $(\sqrt{5}, 0)$, quindi:

$$(X - \sqrt{5})^2 + Y^2 = (X + \sqrt{5})^2,$$

da cui si perviene di nuovo all'equazione $Y^2 = 4\sqrt{5}X$.

Capitolo 26

Per saperne di piú sulle Coniche

26.1 Equazioni parametriche delle coniche

1) La circonferenza di centro l'origine e raggio r si puó scrivere in forma parametrica come:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

La circonferenza di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \alpha + r\cos t \\ y = \beta + r\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

2) L'ellisse di centro l'origine e semiassi a e b si puó scrivere in forma parametrica come:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

Si osservi che i punti dell'ellisse hanno ascissa uguale a quella dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio a e ordinata uguale a quella dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio b; si puó cosí ricavare un metodo interessante per disegnare i punti dell'ellisse.
L'ellisse di centro $C = (\alpha, \beta)$ e semiassi a e b ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \alpha + a\cos t \\ y = \beta + b\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

. 3) L'iperbole di centro l'origine e semiassi a e b si puó scrivere in forma parametrica come:

$$\begin{cases} x = \pm a\cosh t \\ y = b\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'iperbole di centro $C = (\alpha, \beta)$ e semiassi a e b ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \alpha \pm a\cosh t \\ y = \beta + b\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4) La parabola di vertice l'origine e asse l'asse x si puó scrivere in forma parametrica come:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}, \ p \neq 0. \end{cases}$$

26.2 Le coniche in forma polare

Scopo di questo paragrafo é di scrivere le equazioni delle coniche in coordinate polari.

Introducendo un riferimento polare costituito da un punto O, detto **polo**, e da una semiretta orientata uscente da O, detta **asse polare**, é noto che ogni punto del piano (ad eccezione del polo) si puó indviduare dalla sua distanza dal polo ρ (il raggio vettore) e dalla misura dell'angolo θ (l'anomalia) che il segmento OP forma con l'asse polare, con le condizioni $\rho \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.
Introducendo un sistema di riferimento cartesiano avente l'origine coincidente con il polo e l'asse x con l'asse polare, si perviene, facilmente, alle formule di passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane di un generico punto P, e precisamente:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta, \ \rho \geq 0, \ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases} \tag{26.1}$$

Le limitazioni, imposte naturalmente a ρ e a θ, possono causare inconvenienti nello studio di determinati fenomeni, dovuti, in particolare, al brusco passaggio di θ dal valore piú vicino a 2π a 0. Per evitare questo problema, conviene introdurre le **coordinate polari generalizzate** nel modo seguente. Se P é un punto di coordinate polari (ρ, θ); é chiaro che le coordinate $(-\rho, \theta + \pi)$ corrispondono, dal punto di vista geometrico, allo stesso punto, lo stesso per $(\rho, \theta + 2n\pi), n \in \mathbb{Z}$. Si puó quindi associare allo stesso punto P un insieme di coordinate polari equivalenti $((-1)^n\rho, \theta + 2n\pi), n \in \mathbb{Z}$. Tale famiglia di coordinate prende il nome di: **coordinate polari generalizzate** di P.

Si vuole usare questo sistema di coordinate nel caso delle coniche.
Come dimostrato nel precorso, le coniche possono essere definite come il luogo dei punti P del piano tali che:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, f)} = e,$$

dove F é il fuoco, f la direttrice ed e l'eccentricitá. Se si sceglie un riferimento cartesiano avente l'origine coincidente con il fuoco e la direttrice parallela all'asse y di equazione: $x = k$, allora l'equazione del luogo diventa:

$$x^2 + y^2 = e^2(x - k)^2, \tag{26.2}$$

dove (x, y) indicano le coordinate del generico punto P del luogo.
Ci si propone di scrivere l'equazione (26.2) in coordinate polari generalizzate. Da (26.1), sostituendo in (26.2) si ha:

$$\rho^2 = e^2(\rho \cos\theta - k)^2,$$

da cui, estraendo la radice quadrata, segue:

$$\rho = \pm e(\rho \cos\theta - k).$$

Si ottengono cosí, sorpendentemente, due equazioni in coordiante polari:

$$\rho(1 - e\cos\theta) = -ek, \tag{26.3}$$

e

$$\rho(1 + e\cos\theta) = ek. \tag{26.4}$$

Si consideri un generico punto $P = (\rho_0, \theta_0)$ appartenente alla conica di equazione (26.3), vale a dire:

$$\rho_0 = \frac{-ek}{1 - e\cos\theta_0}.$$

In modo equivalente, P_0 puó essere rappresentato come $(-\rho_0, \theta_0 + \pi)$. É immediato verificare che questi valori verificano (26.4), e viceversa, pertanto (26.3) e (26.4) rappresentano lo stesso luogo di punti.
Si distinguono i seguenti casi:

a) $e = 1$: caso della parabola. L'equazione in coordinate polari é:

$$\rho = \frac{k}{1 + \cos\theta}$$

oppure:

$$\rho = \frac{k}{1 - \cos\theta}.$$

Si osservi che, in entrambi i casi, il denominatore si annulla per $\theta = 0 + 2n\pi$ oppure $\theta = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, che corrisponde all'angolo formato dal raggio vettore (con l'asse x) che proietta il punto all'infinito della parabola (vale a direil raggio vettore é parallelo all'asse x).

b) $e < 1$: caso dell'ellisse. Non esistono valori di θ per cui $1 \pm e\cos\theta = 0$.

c) $e < 1$: caso dell'iperbole. I valori di θ per cui $1 \pm e\cos\theta = 0$ corrispondono alle direzioni degli asintoti.

Capitolo 27

Le Coniche – Esercizi

27.1 Esercizi

Tutti gli esercizi di questo capitolo sono assegnati nel piano ordinario, rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y)$.

Ridurre a forma canonica le seguenti coniche, studiarle e scrivere esplicitamente il cambiamento di riferimento usato:

[1] $5x^2 + 2y^2 + 2xy + x + 1 = 0.$

[2] $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 1 = 0.$

[3] $x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$

[4] $y^2 - xy + 1 = 0.$

[5] $x^2 - 3xy + y^2 - 4\sqrt{2}(x - y) + 6 = 0.$

[6] $x^2 + 6xy - 7y^2 - 2x - 6y - 19 = 0.$

[7] $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y - 3 = 0.$

[8] $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x + 2y + 1 = 0.$

[9] $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0.$

[10] $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5y - 9 = 0.$

[11] $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10x - 2y + 9 = 0.$

[12] $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 5x + 10y - 5 = 0.$

[13] $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 7y - 2 = 0.$

[14] $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 4y + 2 = 0.$

[15] $(2x + 3y)x + 4x + 6y = 0.$

[16] $2x^2 - 2xy + 7x - y + 3 = 0.$

[17] $2x^2 + 8y^2 - 8xy - 8\sqrt{5}x + \sqrt{5}y - 5 = 0.$

[18] $16x^2 + 4y^2 + 16xy + 2\sqrt{5}x + 16\sqrt{5}y + 65 = 0.$

[19] Data la famiglia di curve:

$$\gamma_a : (a^2 - 1)x^2 + 2axy + 2x + 2xy - 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

i) determinare per quali valori del parametro a γ_a è degenere.
ii) Posto $a = 1$, verificare che γ_1 è un'iperbole. Determinare la sua forma canonica e scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento usato.

[20] Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la conica:

$$(h - 1)x^2 + (h + 1)y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2x - \frac{\sqrt{3}(h - 2)}{6}y = 0$$

è una parabola non degenere del piano?
Determinare, rispetto ad un opportuno riferimento cartesiano, la forma canonica di tale parabola.
Scrivere, inoltre, esplicitamente il cambiamento di riferimento usato.

[21] Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

i) determinare, se esiste, una matrice ortogonale P (con determinante positivo) in modo tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.
ii) Considerata la conica:

$$2x^2 + 4xy - y^2 - 1 = 0$$

classificarla, ridurla a forma canonica e scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento usato.

[22] Data la conica:

$$5x^2 + 24xy - 5y^2 - 6x - 4y + 2 = 0,$$

i) riconoscere che si tratta di un'iperbole e scrivere esplicitamente le equazioni del cambiamento di riferimento che permettono di rappresentarla in forma canonica.
ii) Determinarne (nel riferimento $\mathcal{R} = (0, x, y)$) le coordinate del centro, le equazioni degli assi e degli asintoti.

[23] Determinare vertice, asse e forma canonica della parabola γ di equazione:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - y = 0.$$

[24] Ridurre a forma canonica l'equazione della conica:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x + 1 = 0$$

e scrivere le equazioni dei suoi assi.

[25] Ridurre a forma canonica l'equazione della conica:

$$7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 1 = 0,$$

e determinarne le equazioni degli assi.

[26] Data la famiglia di coniche:

$$3x^2 + 2axy + 3y^2 + 2x - 2y - 3 = 0, \ a \in \mathbb{R},$$

i) si studi il tipo di conica, al variare di a.
ii) Si trovi l'equazione in forma canonica della conica corrispondente al valore $a = 1$ del parametro ed il relativo cambiamento di riferimento.

[27] Data la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C}_t : tx^2 + txy - y^2 - y - t = 0, \ t \in \mathbb{R},$$

i) classificare le coniche di $\mathcal{C}_t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
ii) Scrivere in forma canonica le equazioni delle parabole (non degeneri) appartenenti a $\mathcal{C}_t$.
iii) Posto $t = -4$, scrivere in forma canonica la conica appartenente a $\mathcal{C}_t$ così ottenuta.

[28] Classificare le coniche della famiglia seguente, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 2hxy + y^2 + 2x + h = 0, \ h \in \mathbb{R},$$

[29] Data la conica:

$$x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 - 2x + 6y + 6 = 0,$$

i) verificare che non è riducibile;
ii) verificare che è una parabola;
iii) sapendo che il vertice è $V = \left(\frac{9}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, trovare l'asse e la tangente nel vertice;
iv) verificare che è la parabola di fuoco $F = (1, -2)$ e direttrice $d : x + 2y - 1 = 0$.

[30] Data la conica:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 2y = 0,$$

i) è reale?
ii) È riducibile?
iii) Ha centro?
iv) Di che conica si tratta?
v) Ricavarne l'equazione canonica.

[31] Data la conica:

$$2xy - x - y + 1 = 0,$$

i) verificare che non è riducibile;
ii) verificare che è un'iperbole equilatera;
iii) trovarne il centro;
iv) determinarne gli asintoti;
v) verificare che la conica passa per $P = (0, 1)$ e trovarne la tangente in P.

[32] Studiare la conica di equazione:

$$4xy - 3y^2 - 8 = 0,$$

ridurla a forma canonica e determinare le equazioni degli assi e degli asintoti.

[33] Riconoscere che, nel piano, l'equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 10x + 2y + 7 = 0$$

rappresenta una parabola di cui si chiedono le coordinate del vertice e l'equazione dell'asse.

[34] Riconoscere che, nel piano, l'equazione:

$$7x^2 - 2xy + 7y^2 + 34x + 2y + 31 = 0$$

rappresenta un'ellisse di cui si chiedono le coordinate dei vertici.

[35] Classificare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, la conica:

$$x^2 + 2hxy + 4y^2 + 8x - 6y = 0.$$

Posto $h = 0$, ridurre la conica così ottenuta a forma canonica e determinare il cambiamento di riferimento usato per tale riduzione.

[36] Data la famiglia di coniche:

$$\mathcal{C} : 8x^2 + 2hxy + 2y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

i) stabilire per quali valori di h $\mathcal{C}$ è una parabola.
ii) Scelto uno di tali valori, scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica.

[37] Scrivere l'equazione dell'ellisse avente centro nell'origine e vertici nei punti: $A_1 = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $A_2 = (-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}), B_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), B_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, indicando esplicitamente le equazioni del cambiamento di riferimento usato.

[38] Data la conica:

$$\mathcal{C} : 3x^2 - \lambda xy + 2y^2 - 4\lambda y = 0.$$

i) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}$ é una parabola.
ii) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}$ é degenere e, in questo caso, scrivere $\mathcal{C}$ come unione di due rette, eventualmente immaginarie.

27.2 Soluzioni

```
<< Graphics‘ImplicitPlot‘;

Co[x_, y_] := Coefficient[x, y];

FS[x_] := FullSimplify[x];

Mat[f_] := Do[e := Expand[f];
   a11 := Co[e, x^2]; a12 := Co[e, x * y]/2; a22 := Co[e, y^2];
   a13 := Co[e/.{y → 0}, x]/2;
   a23 := Co[e/.{x → 0}, y]/2; a33 := e/.{x → 0, y → 0};
   A := {{a11, a12}, {a12, a22}};
   traceofA := a11 + a22; ]

Cell(    OriginalColor    = RGBColor[0, 0, 1];    , PageWidth → PaperWidth)
         RotatedColor     = RGBColor[0, 0.5, 0];
         CanonicalColor   = RGBColor[1, 0, 0];

BoldFace[s_] := StyleForm[s, FontWeight- > Bold];

Title[1] := Print[StyleForm[
 1. The Original Conic
, FontSize- > 12] //BoldFace];

Title[2] := Print[StyleForm[
 2. Rotating the Conic
, FontSize- > 12]//BoldFace];

Title[3] := Print[StyleForm[
 3. Translating the Conic : the canonical form
, FontSize- > 12]//BoldFace];

Title[4] := Print[
StyleForm[
 4. Grafico delle Coniche
, FontSize- > 12]//BoldFace,
StyleForm[  1. Original Conic,
       FontColor- > OriginalColor] //BoldFace,
StyleForm[   2. Rotated Conic,      FontColor - > RotatedColor] //
     BoldFace ,
StyleForm[   3. The Canonical Form,
       FontColor- > CanonicalColor ]//BoldFace];

Comment[A] :=
  Print[   Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :
 //BoldFace];

Comment[kind, detA_] := If[detA > 0,
   Print[   The Conic is an, StyleForm[ Ellipse.
 , FontColor- > OriginalColor]//BoldFace], If[detA == 0,
     Print[   The Conic is a, StyleForm[ Parabola.
, FontColor- > OriginalColor]//BoldFace ],
       Print[
          The Conic is an, StyleForm[ Hyperbola.
, FontColor- > OriginalColor]//BoldFace]]];

Comment[Eigenvalues] := Print[   Eigenvalues of A :
// BoldFace];

Comment[Eigenvectors] := Print[   Eigenvectors of A :
// BoldFace];
```

```
Comment[sos1] :=
  Print[  We apply the rotation of //BoldFace,
    N[ArcCos[P[[1]]]/°], degrees :
 //BoldFace];

Comment[sos2] :=
  Print[  We apply the translation of //BoldFace,
    N[ √(a^2 + b^2) ], units
//BoldFace];

Comment[h] :=
  Print[  Equation of the rotated conic :
//BoldFace];

Comment[k] :=
  Print[  Canonical form (after rotating and translating) :
//BoldFace];

 Conic[f_] := Block[

    (* Here is the list of temporary variables of Conic *)
    {e, g, h, k, A, a11, a12, a21,
      a22, a23, a33, av2, P, traceofA, detA, a, b},

    (* If x, y have been assigned, we stop the execution *)
    If[ValueQ[x] || ValueQ[y],
      Print[x or y are assigned. Please use Clear[x, y] first];
      Abort[]];

    (*       *)
    (* 1. Original Conic *)
    (*       *)
    Title[1];
    Print[f, = 0];


    (* Changin the sign of f *)
    Mat[f];
    detA = Det[A];
    g = f;
    If[(detA < 0) && ( a33 > 0),      g = -f];
    If[(detA == 0) && (traceofA < 0), g = -f];
    If[(detA > 0) && ( a33 < 0),      g = -f];
    Mat[g];
    Comment[A];
    Print[A = , MatrixForm[A], , det(A) = , detA];
    Comment[kind, detA];

    (* Eigenvalues and Eigenvectors of A *)
    Comment[Eigenvalues];
    Print[Eigenvalues[A]];
    Comment[Eigenvectors];
    Print[Eigenvectors[A]];
```

```
  (* Eigenvector for the largest Eigenvalue *)
   av2 = Eigenvectors[A][[2]];
   P = RootReduce[av2/Sqrt[av2.av2]]; (* Remark that ||P|| = 1 *)


   (*        *)
   (* 2.Rotating the Conic *)
   (*        *)
   Title[2];
   sos1 = FS[{x → P[[1]]x - P[[2]]y, y → P[[2]]x + P[[1]]y}];
   Comment[sos1];
   Print[sos1];
   h = FS[g/.sos1 ];
   Mat[h];
  Comment[h];
   Print[h, = 0];


  (*                  *)
  (* 3. Translating the Conic : the Canonical Form *)
  (*                  *)
   Title[3];
   a = If[a11 == 0, If[a13 == 0, 0, a33/(2a13)], a13/a11];
  b = If[a22 == 0, If[a23 == 0, 0, a33/(2a23)], a23/a22];
   sos2 = FS[{x- > x - a, y- > y - b}];
   Comment[sos2];
   Print[sos2];
   k = FS[h/.sos2];
   Comment[k];
   Print[k, = 0]


   (*           *)
   (* 4. Plotting the three Conics *)
   (*           *)
   Title[4];
  ImplicitPlot[{g == 0, h == 0, k == 0},
     {x, -10, 10},
     PlotStyle → {{OriginalColor}, {RotatedColor}, {CanonicalColor}},
     ImageSize → 200, PlotPoints → 250]
]

(* NOTES
   ImplicitPlot fails to plot y^2 =
   0 or equations involving only x.
*)
```

Questo programma (scritto dai Proff. S. Berardi e S.M. Salamon) consente, data l'equazione di una conica in generale, di ridurla a forma canonica evidenziando i passaggi algebrici necessari.

[1] Non si tratta di una conica reale.

[2]

Conic[**2x^2 - 2x y + 2y^2 + 2x - 1**]

1. The Original Conic

$-1+2x+2x^2-2xy+2y^2=0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, det(A) = 3

The Conic is an Ellipse.

Eigenvalues of A :

{**-3, -1**}

Eigenvectors of A :

{{**-1, 1**}, {**1, 1**}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 45. degrees :

$\{x\to\frac{x-y}{\sqrt{2}},\ y\to\frac{x+y}{\sqrt{2}}\}$

Equation of the rotated conic :

$1-x\left(\sqrt{2}+x\right)+\left(\sqrt{2}-3y\right)y=0$

3. Translating the Conic : the canonical form

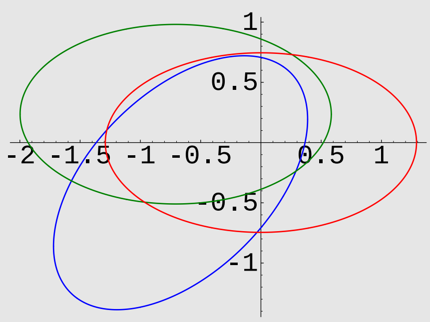
We apply the translation of 0.745356 units

$\{x\to-\frac{1}{\sqrt{2}}+x,\ y\to\frac{1}{3\sqrt{2}}+y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$\frac{5}{3}-x^2-3y^2=0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



-Graphics-

$$X^2+3Y^2=\frac{5}{3};\quad \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X\\ Y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

[3]

Conic[x^2 + 4x y − 2y^2 − 2x + 4y + 1]

1. The Original Conic

$1-2x+x^2+4y+4xy-2y^2=0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, $\det(A)=-6$

The Conic is an Hyperbola.

Eigenvalues of A :

$\{-2,3\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{2,1\},\{-1,2\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 116.565 degrees :

$\{x\to-\frac{x+2y}{\sqrt{5}},\ y\to\frac{2x-y}{\sqrt{5}}\}$

Equation of the rotated conic :

$-1-2\sqrt{5}\,x+3x^2-2y^2=0$

3. Translating the Conic : the canonical form

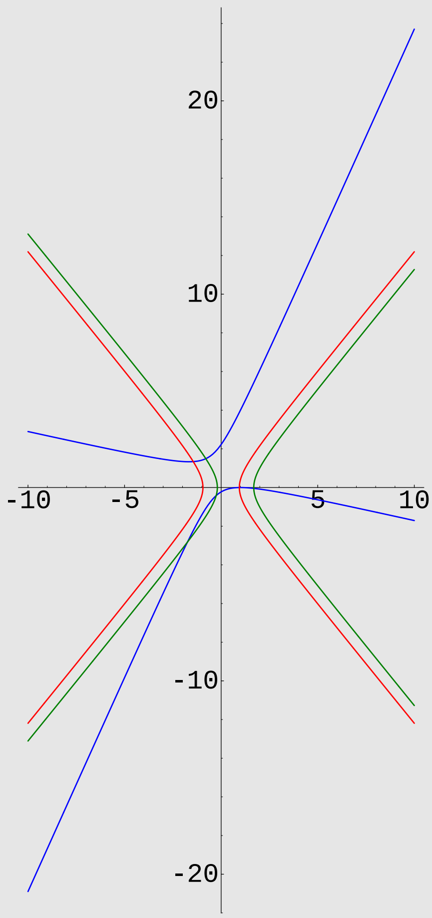
We apply the translation of 0.745356 units

$\{x\to\frac{\sqrt{5}}{3}+x,\ y\to y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$-\frac{8}{3}+3x^2-2y^2=0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



$$2X^2 - 3Y^2 = -\frac{8}{3}; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

[4]

```
Conic[y^2 - x y + 1]
```

1. The Original Conic

$1 - x\,y + y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -\frac{1}{4}$

The Conic is an Hyperbola.

Eigenvalues of A :

$\{\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{1-\sqrt{2}, 1\}, \{1+\sqrt{2}, 1\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 22.5 degrees :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x - \sqrt{2-\sqrt{2}}\,y\right), \\ y \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x + \sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right) \end{array} \right\}$$

Equation of the rotated conic :

$$\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\,(x-y)\,(x+y) - 2\,(2+x^2+y^2)\right) = 0$$

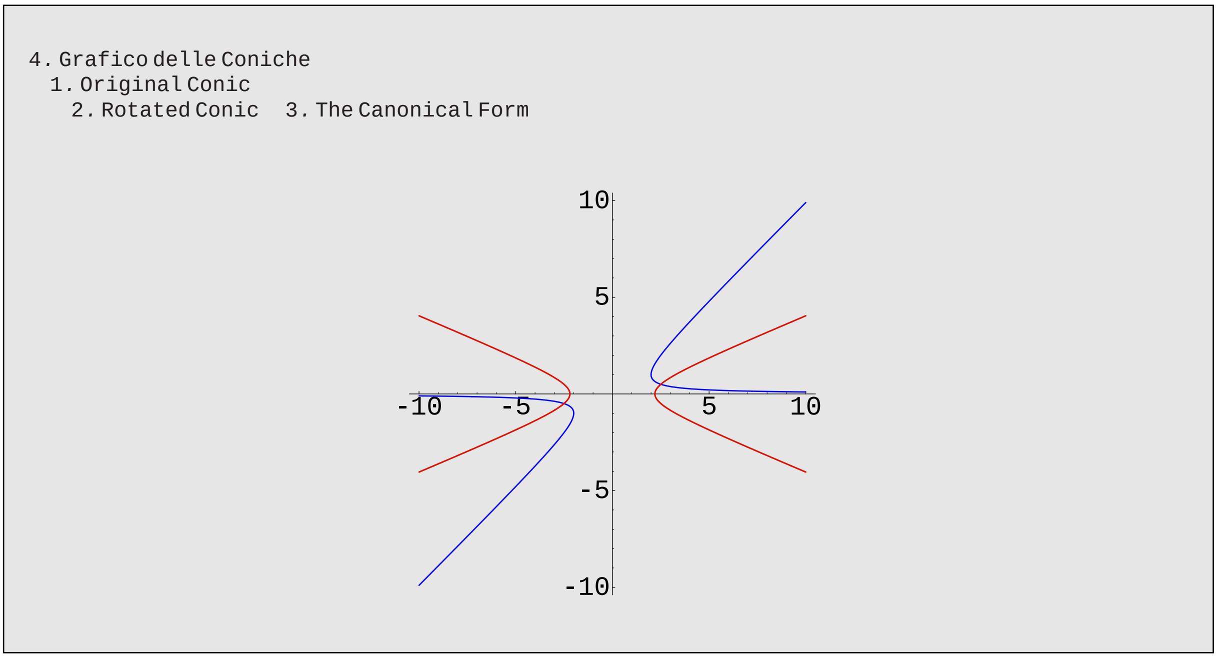
3. Translating the Conic : the canonical form

We apply the translation of 0. units

$\{x \to x, y \to y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$$\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\,(x-y)\,(x+y) - 2\,(2+x^2+y^2)\right) = 0$$



$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}X^2 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

[5] $-\frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{2}Y^2 = \frac{2}{5}; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{8}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

[6] $\frac{1}{10}X^2 - \frac{2}{5}Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$

[7]

Conic[**3x^2 + 4x y + 3y^2 + 2x – 2y – 3**]

1. The Original Conic

$-3 + 2x + 3x^2 - 2y + 4xy + 3y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, det(A) = 5

The Conic is an Ellipse.

Eigenvalues of A :

{**-5, -1**}

Eigenvectors of A :

{{**1, 1**}, {**-1, 1**}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 135. degrees :

$\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\}$

Equation of the rotated conic :

$3 + 2\sqrt{2}\,x - x^2 - 5y^2 = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

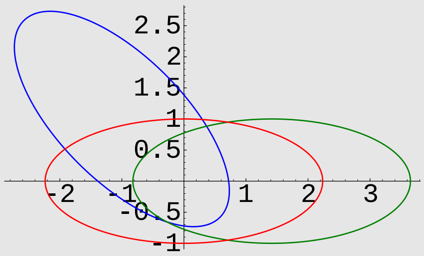
We apply the translation of 1.41421 units

$\{x \to \sqrt{2} + x, y \to y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$5 - x^2 - 5y^2 = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



-Graphics-

$$\frac{X^2}{5} + Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

[8]

Conic[3x^2 + 2 x y + 3 y^2 + 6x + 2y + 1]

1. The Original Conic

$1 + 6x + 3x^2 + 2y + 2xy + 3y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 8$

The Conic is an Ellipse.

Eigenvalues of A :

{**2, 4**}

Eigenvectors of A :

{{**-1, 1**}, {**1, 1**}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 45. degrees :

$\{x \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x+y}{\sqrt{2}}\}$

Equation of the rotated conic :

$1 + 4x\left(\sqrt{2} + x\right) + 2y\left(-\sqrt{2} + y\right) = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

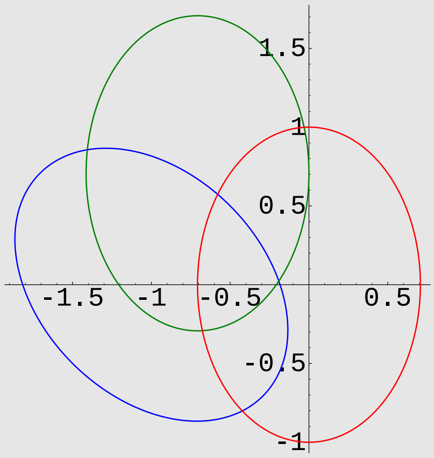
We apply the translation of 1. units

$\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}} + x, y \to \frac{1}{\sqrt{2}} + y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$2\left(-1 + 2x^2 + y^2\right) = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



$$X^2 + 2Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[9]

Conic[x^2 - 2 x y + y^2 - 2x - 2 y]

1. The Original Conic

$-2x + x^2 - 2y - 2xy + y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$

The Conic is a Parabola.

Eigenvalues of A :

{0, 2}

Eigenvectors of A :

{{1, 1}, {-1, 1}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 135. degrees :

$\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\}$

Equation of the rotated conic :

$2\left(x^2 + \sqrt{2}\,y\right) = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

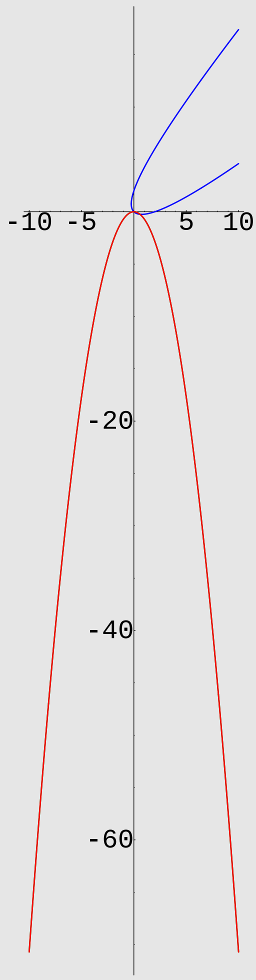
We apply the translation of 0. units

$\{x \to x, y \to y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$2\left(x^2 + \sqrt{2}\,y\right) = 0$

```
4. Grafico delle Coniche
  1. Original Conic
    2. Rotated Conic   3. The Canonical Form
```



$$Y^2 - \sqrt{2}X = 0; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

[10]

Conic[$x^2 - 4x\,y + 4y^2 + 5y - 9$]

1. The Original Conic

$-9 + x^2 + 5\,y - 4\,x\,y + 4\,y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$

The Conic is a Parabola.

Eigenvalues of A :

$\{0, 5\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{2, 1\}, \{-1, 2\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 116.565 degrees :

$\{x \to -\frac{x+2\,y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{2\,x-y}{\sqrt{5}}\}$

Equation of the rotated conic :

$-9 + 5\,x^2 + \sqrt{5}\,(2\,x - y) = 0$

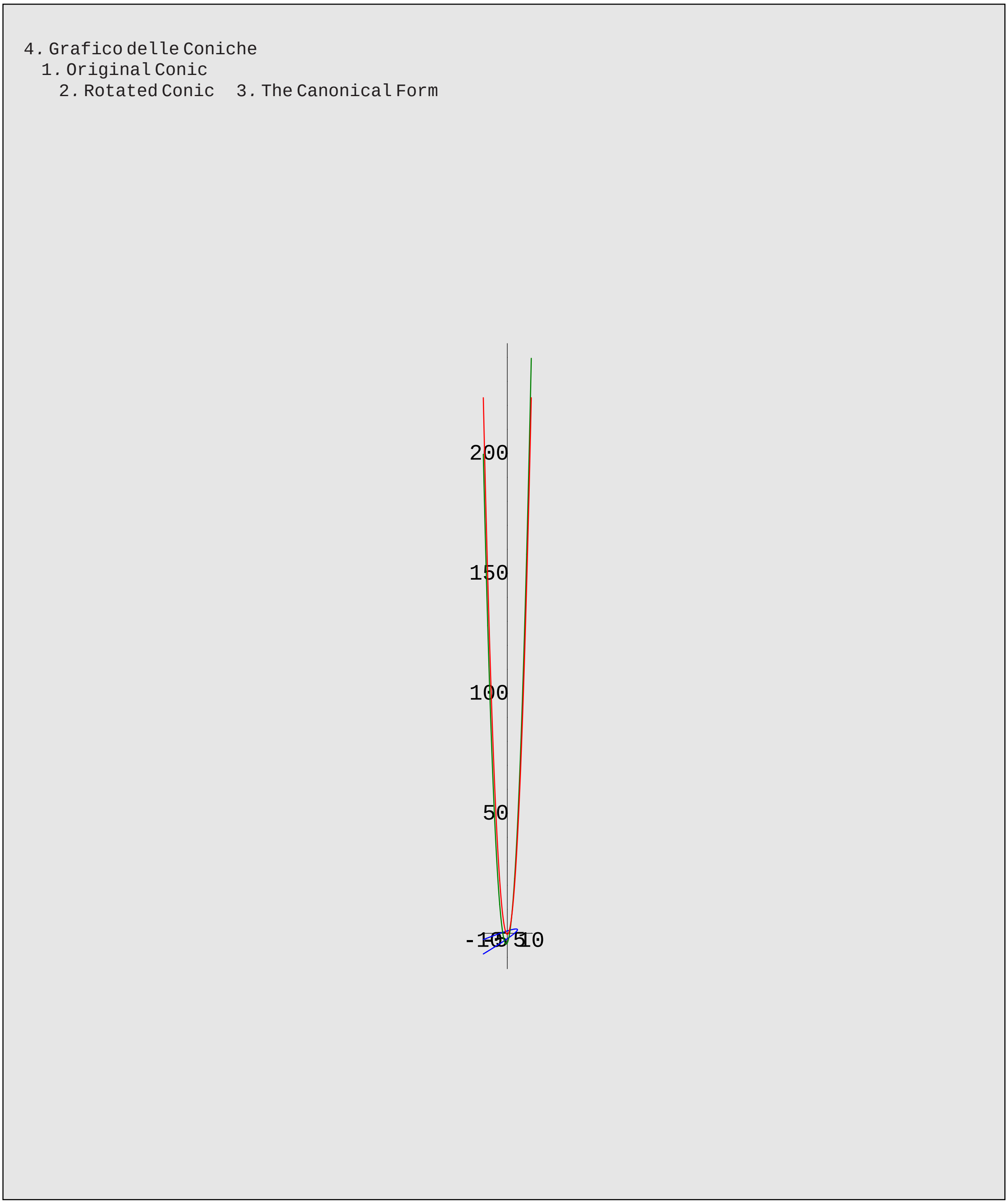
3. Translating the Conic : the canonical form

We apply the translation of 4.04969 units

$\{x \to -\frac{1}{\sqrt{5}} + x, y \to -\frac{9}{\sqrt{5}} + y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$-1 + 5\,x^2 - \sqrt{5}\,y = 0$



$$Y^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}X; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{21}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

[11]

Conic[**3x^2 + 2 x y + 3 y^2 + 10 x - 2 y + 9**]

1. The Original Conic

$9+10x+3x^2-2y+2xy+3y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 8$

The Conic is an Ellipse.

Eigenvalues of A :

{**2, 4**}

Eigenvectors of A :

{{**-1, 1**}, {**1, 1**}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 45. degrees :

$\{x \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x+y}{\sqrt{2}}\}$

Equation of the rotated conic :

$9+4x\left(\sqrt{2}+x\right)+2y\left(-3\sqrt{2}+y\right) = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

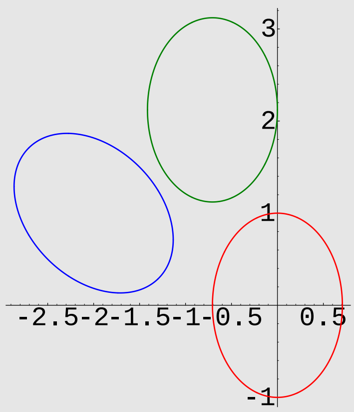
We apply the translation of 2.23607 units

$\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}}+x, y \to \frac{3}{\sqrt{2}}+y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$2\left(-1+2x^2+y^2\right) = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic   3. The Canonical Form



$$X^2 + 2Y^2 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[12]

Conic[2x^2 - 3 x y - 2y^2 - 5x + 10y - 5]

1. The Original Conic

$-5 - 5x + 2x^2 + 10y - 3xy - 2y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -\frac{25}{4}$

The Conic is an Hyperbola.

Eigenvalues of A :

$\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{\frac{1}{3}, 1\}, \{-3, 1\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 161.565 degrees :

$\{x \to -\frac{3x+y}{\sqrt{10}}, y \to \frac{x-3y}{\sqrt{10}}\}$

Equation of the rotated conic :

$\frac{5}{2}\left(-2 + x\left(\sqrt{10} + x\right) - y\left(\sqrt{10} + y\right)\right) = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

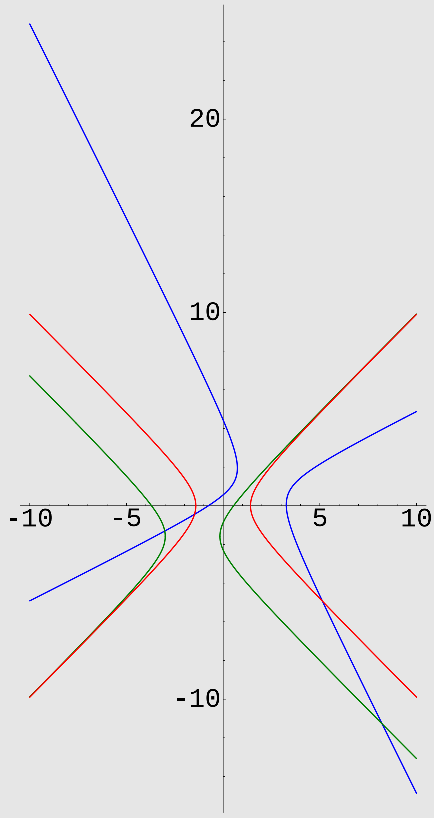
We apply the translation of 2.23607 units

$\{x \to -\sqrt{\frac{5}{2}} + x, y \to -\sqrt{\frac{5}{2}} + y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$\frac{5}{2}\left(-2 + x^2 - y^2\right) = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



$$X^2 - Y^2 = 2; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[13]

Conic[2x^2 - 5 x y - 3 y^2 + 7 y - 2]

1. The Original Conic

$-2+2x^2+7y-5xy-3y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -\frac{49}{4}$

The Conic is an Hyperbola.

Eigenvalues of A :

$\left\{\frac{1}{2}\left(-1-5\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(-1+5\sqrt{2}\right)\right\}$

Eigenvectors of A :

$\left\{\left\{-1+\sqrt{2}, 1\right\}, \left\{-1-\sqrt{2}, 1\right\}\right\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 157.5 degrees :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \to \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,y\right), \\ y \to \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,y\right) \end{array} \right\}$$

Equation of the rotated conic :

$$\frac{1}{2}\left(-4+7\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x+\left(-1+5\sqrt{2}\right)x^2-y\left(7\sqrt{2+\sqrt{2}}+y+5\sqrt{2}\,y\right)\right) = 0$$

3. Translating the Conic : the canonical form

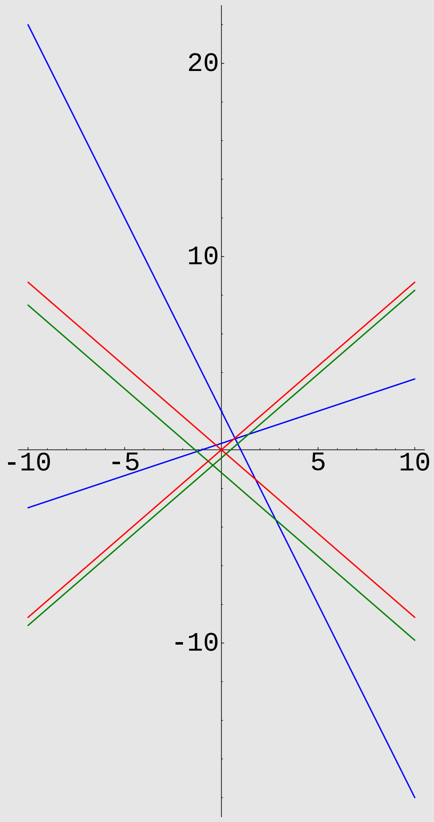
We apply the translation of 0.914732 units

$$\left\{ \begin{array}{l} x \to -\frac{1}{14}\sqrt{82-31\sqrt{2}}+x, \\ y \to -\frac{1}{14}\sqrt{82+31\sqrt{2}}+y \end{array} \right\}$$

Canonical form (after rotating and translating) :

$$\frac{1}{2}\left(\left(-1+5\sqrt{2}\right)x^2-\left(1+5\sqrt{2}\right)y^2\right) = 0$$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



Si tratta della conica degenere: $(2x + y - 2)(x - 3y + 1) = 0$.

[14]

Conic[5x^2 + 4 x y + 2 y^2 - 2 x - 4 y + 2]

1. The Original Conic

$2 - 2x + 5x^2 - 4y + 4xy + 2y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 6$

The Conic is an Ellipse.

Eigenvalues of A :

{1, 6}

Eigenvectors of A :

{{-1, 2}, {2, 1}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 26.5651 degrees :

$\left\{x \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{x+2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Equation of the rotated conic :

$2 + 6x^2 + y^2 - \frac{2(4x+3y)}{\sqrt{5}} = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

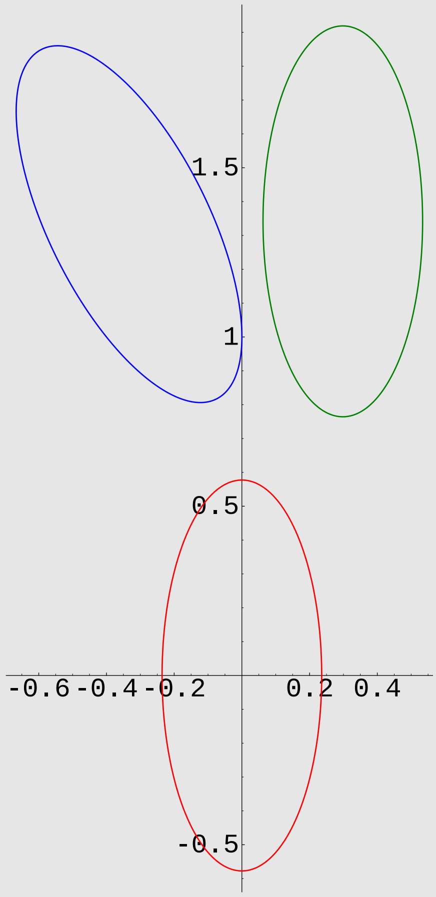
We apply the translation of 1.37437 units

$\left\{x \to \frac{2}{3\sqrt{5}} + x,\ y \to \frac{3}{\sqrt{5}} + y\right\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$-\frac{1}{3} + 6x^2 + y^2 = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



$$\frac{X^2}{\frac{1}{3}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{18}} = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

[15] Si tratta della conica degenere: $(2x + 3y)(x + 2) = 0$.

[16] Si tratta della conica degenere: $(1 + \sqrt{2})Y^2 - (\sqrt{2} - 1)^2 x^2 = 0$.

[17]

Conic[2x^2 + 8y^2 - 8 x y - 8Sqrt[5] x + Sqrt[5] y - 5]

1. The Original Conic

$-5 - 8\sqrt{5}\,x + 2x^2 + \sqrt{5}\,y - 8\,x\,y + 8\,y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$

The Conic is a Parabola.

Eigenvalues of A :

{0, 10}

Eigenvectors of A :

{{2, 1}, {-1, 2}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 116.565 degrees :

$\{\boldsymbol{x} \to -\frac{x+2y}{\sqrt{5}}, \boldsymbol{y} \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}\}$

Equation of the rotated conic :

$5\,(-1 + 2\,x\,(1 + x) + 3\,y) = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

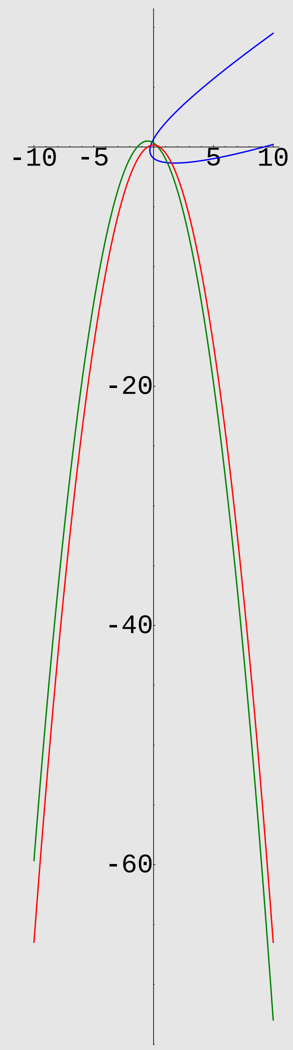
We apply the translation of 0.600925 units

$\{\boldsymbol{x} \to -\frac{1}{2} + \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \to \frac{1}{3} + \boldsymbol{y}\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$\frac{5}{2}\left(-1 + 4\,x^2 + 6\,y\right) = 0$

```
4. Grafico delle Coniche
  1. Original Conic
    2. Rotated Conic   3. The Canonical Form
```



$$2Y^2 - 3X = 0; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

[18] É una parabola di equazione (in forma canonica): $2y^2 + 3x = 0$;

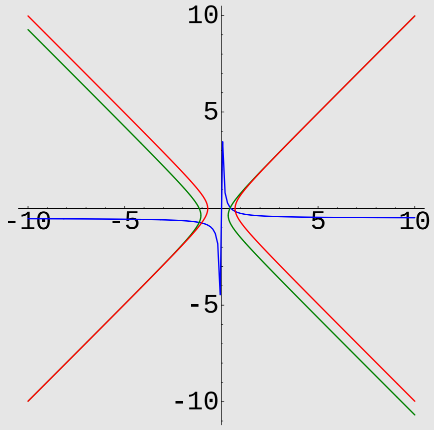
cambiamento di riferimento:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{9}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

[19]

```
B = {{a^2 - 1, a + 1, 1}, {a + 1, 0, 0}, {1, 0, 1}};

Solve[Det[%] == 0, a]
{{a → -1}, {a → -1}}

Conic[2 x y + 2 x + 2 x y - 1]

 1. The Original Conic

-1 + 2 x + 4 x y = 0
   Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

A = (0  2
     2  0), det(A) = -4
   The Conic is an Hyperbola.

   Eigenvalues of A :

{-2, 2}
   Eigenvectors of A :

{{-1, 1}, {1, 1}}

 2. Rotating the Conic

   We apply the rotation of 45. degrees :

{x → (x-y)/√2, y → (x+y)/√2}
   Equation of the rotated conic :

-1 + √2 (x - y) + 2 (x - y) (x + y) = 0

 3. Translating the Conic : the canonical form

   We apply the translation of 0.5 units

{x → -1/(2 √2) + x, y → -1/(2 √2) + y}
   Canonical form (after rotating and translating) :

-1 + 2 x^2 - 2 y^2 = 0
```

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



i) $a = -1$. ii) $2X^2 - 2Y^2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

[20] $h = 2$. $4Y^2 + \sqrt{3}X = 0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{7\sqrt{3}}{96} \end{pmatrix}.$$

[21]

```
Eigensystem[{{2,2},{2,-1}}]
{{-2,3},{{-1,2},{2,1}}}

<<LinearAlgebra`Orthogonalization`

GramSchmidt[{{-1,2},{2,1}}]
```

$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}, \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right\}$

```
Conic[2x^2 + 4 x y - y^2 - 1]

1. The Original Conic
```

$-1 + 2x^2 + 4xy - y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \det(A) = -6$

The Conic is an Hyperbola.

Eigenvalues of A :

{-2, 3}

Eigenvectors of A :

{{-1, 2}, {2, 1}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 26.5651 degrees :

$\left\{x \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x+2y}{\sqrt{5}}\right\}$

Equation of the rotated conic :

$-1 + 3x^2 - 2y^2 = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

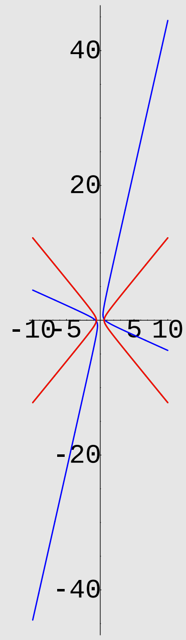
We apply the translation of 0. units

$\{x \to x, y \to y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$-1 + 3x^2 - 2y^2 = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



i) $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

ii) $\frac{X^2}{\frac{1}{3}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1;\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

[22] $13X^2 - 13Y^2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

Centro: $\left(\frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$, assi: $2x - 3y = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$; asintoti: $y = 5x - 1$, $y = -x + \frac{1}{5}$.

[23]

```
Conic[4x^2 - 4 x y + y^2 - y]

 1. The Original Conic
```

$4x^2 - y - 4xy + y^2 = 0$

```
   Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :
```

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$

```
   The Conic is a Parabola.

   Eigenvalues of A :

{0, 5}
   Eigenvectors of A :

{{1, 2}, {-2, 1}}

 2. Rotating the Conic

   We apply the rotation of 153.435 degrees :
```

$\{x \to -\frac{2x+y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x-2y}{\sqrt{5}}\}$

```
   Equation of the rotated conic :
```

$5x^2 - \frac{x-2y}{\sqrt{5}} = 0$

```
 3. Translating the Conic : the canonical form

   We apply the translation of 0.0447214 units
```

$\{x \to \frac{1}{10\sqrt{5}} + x, y \to y\}$

```
   Canonical form (after rotating and translating) :
```

$-\frac{1}{100} + 5x^2 + \frac{2y}{\sqrt{5}} = 0$

Vertice: $V = \left(-\dfrac{9}{100}, \dfrac{1}{100}\right)$,

asse: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}t - \dfrac{9}{100} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}t + \dfrac{1}{100}, \quad t \in \mathbb{R}; \end{cases}$

$$5Y^2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}X; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{9}{100} \\ \frac{1}{100} \end{pmatrix}.$$

[24] $X^2 + 6Y^2 = 2$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

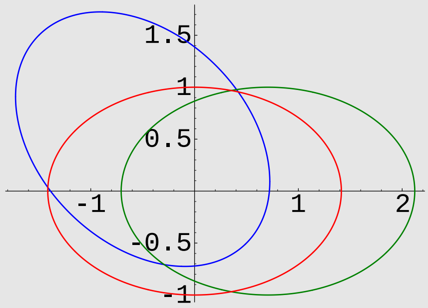
Assi: $x - 2y - 3 = 0$, $2x + y - 1 = 0$;

[25] $X^2 - 9Y^2 = 1$; assi: $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$.

[26]

```
B = {{3, a, 1}, {a, 3, -1}, {1, -1, -3}};

Solve[Det[B] == 0, a]
{{a -> -3}, {a -> 11/3}}

A = B[[{1, 2}, {1, 2}]]
{{3, a}, {a, 3}}

Solve[Det[A] == 0, a]
{{a -> -3}, {a -> 3}}

Conic[3x^2 + 2 x y + 3y^2 + 2x - 2y - 3]

 1. The Original Conic

-3 + 2 x + 3 x^2 - 2 y + 2 x y + 3 y^2 = 0
   Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

A = ( -3  -1 ), det(A) = 8
    ( -1  -3 )
   The Conic is an Ellipse.

   Eigenvalues of A :

{-4, -2}
   Eigenvectors of A :

{{1, 1}, {-1, 1}}

 2. Rotating the Conic

   We apply the rotation of 135. degrees :

{x -> -(x+y)/√2, y -> (x-y)/√2}
   Equation of the rotated conic :

3 + 2 (√2 - x) x - 4 y^2 = 0

 3. Translating the Conic : the canonical form

   We apply the translation of 0.707107 units

{x -> 1/√2 + x, y -> y}
   Canonical form (after rotating and translating) :

-2 ( - 2 + x^2 + 2 y^2) = 0
```

4. Grafico delle Coniche
  1. Original Conic
    2. Rotated Conic   3. The Canonical Form



i) $a < -3$, $a > 3$: iperboli; $-3 < a < 3$: ellissi;

$a = -3$: parabola degenere; $a = 3$: parabola; $a = \frac{11}{3}$: iperbole degenere.

ii) $\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1$, $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

[27]

```
B = {{t, t/2, 0}, {t/2, -1, -1}, {0, -1, -t}};

Solve[Det[B] == 0, t]
```

$\{\{t\to 0\}, \{t\to 2(-1-\sqrt{2})\}, \{t\to 2(-1+\sqrt{2})\}\}$

```
A = B[[{1, 2}, {1, 2}]]
```

$\{\{t, \frac{t}{2}\}, \{\frac{t}{2}, -1\}\}$

```
Solve[Det[A] == 0, t]
```

$\{\{t\to -4\}, \{t\to 0\}\}$

```
Conic[-4x^2 - 4 x y - y^2 - y + 4]
```

1. The Original Conic

$4 - 4x^2 - y - 4xy - y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$

The Conic is a Parabola.

Eigenvalues of A :

$\{0, 5\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{-1, 2\}, \{2, 1\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 26.5651 degrees :

$\{x \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}}, y \to \frac{x+2y}{\sqrt{5}}\}$

Equation of the rotated conic :

$-4 + 5x^2 + \frac{x+2y}{\sqrt{5}} = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

We apply the translation of 4.47236 units

$\{x \to -\frac{1}{10\sqrt{5}} + x, y \to 2\sqrt{5} + y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$-\frac{1}{100} + 5x^2 + \frac{2y}{\sqrt{5}} = 0$

i) Se $t < -4$, $t > 0$: iperboli; se $-4 < t < 0$: ellissi;

$t = -4$: parabola, $t = 0$: parabola degenere, $t = -2 \pm \sqrt{5}$: iperboli degeneri.

ii) $Y^2 = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}X$; iii) coincide con ii).

[28]

```
A = {{1, h}, {h, 1}}; B = {{1, h, 1}, {h, 1, 0}, {1, 0, h}};
Solve[Det[B] == 0]
```

$$\left\{\left\{h \to -\left(\frac{2}{3\left(9-\sqrt{69}\right)}\right)^{1/3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}{3^{2/3}}\right\},\right.$$
$$\left\{h \to \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}{2\,3^{2/3}} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(3\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}\right\},$$
$$\left.\left\{h \to \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}{2\,3^{2/3}} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2^{2/3}\left(3\left(9-\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

```
Eigensystem[A]
{{1 - h, 1 + h}, {{-1, 1}, {1, 1}}}
```

$-1 < h < 1$: ellissi; $h = \pm 1$: parabole; $h < -1, h > 1$: iperboli.

[29] ii) $\frac{5}{4}Y^2 = -2\sqrt{5}X$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$;

iii) asse: $10x - 5y - 24 = 0$, tangente nel vertice: $5x + 10y + 3 = 0$.

[30]

Conic[3x^2 – 2 x y + 3 y^2 + 2x + 2y]

1. The Original Conic

$2x + 3x^2 + 2y - 2xy + 3y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 8$

The Conic is an Ellipse.

Eigenvalues of A :

$\{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{\mathbf{1}, \mathbf{1}\}, \{\mathbf{-1}, \mathbf{1}\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 135. degrees :

$\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\}$

Equation of the rotated conic :

$2\left(2x^2 + y\left(-\sqrt{2} + y\right)\right) = 0$

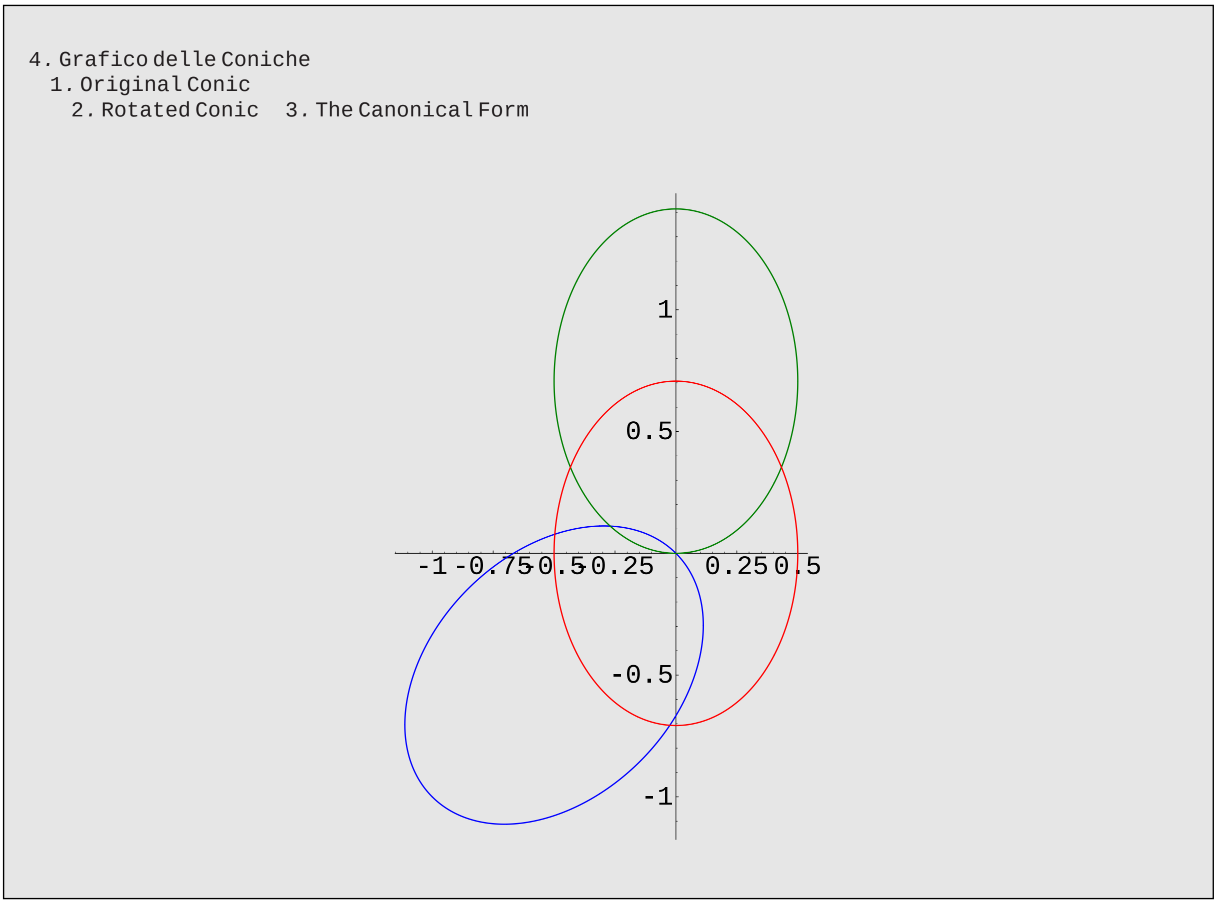
3. Translating the Conic : the canonical form

We apply the translation of 0.707107 units

$\{x \to x, y \to \frac{1}{\sqrt{2}} + y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$-1 + 4x^2 + 2y^2 = 0$



i) Sì. ii) No. iii) Sì. iv) È un'ellisse. v) $2x^2 + 4y^2 = 1$.

[31] ii) $2X^2 - 2Y^2 = 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

iii) centro: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; iv) asintoti: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$; v) tangente: $x - y + 1 = 0$.

[32]

Conic[**4 x y – 3 y^2 – 8**]

1. The Original Conic

$-8 + 4\,x\,y - 3\,y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -4$

The Conic is an Hyperbola.

Eigenvalues of A :

{**-4, 1**}

Eigenvectors of A :

{{**-1, 2**}, {**2, 1**}}

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 26.5651 degrees :

$\{x \to \frac{2x-y}{\sqrt{5}},\ y \to \frac{x+2y}{\sqrt{5}}\}$

Equation of the rotated conic :

$x^2 - 4\left(2 + y^2\right) = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

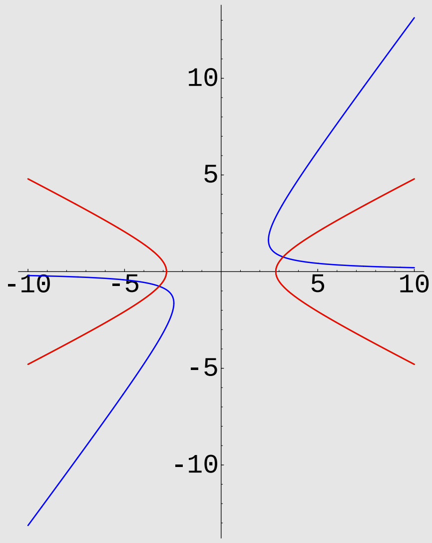
We apply the translation of 0. units

$\{x \to x,\ y \to y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$x^2 - 4\left(2 + y^2\right) = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



$$\frac{X^2}{8} - \frac{Y^2}{2} = 1;$$ assi: $2x + y = 0$, $x - 2y = 0$; asintoti: $4x - 3y = 0$, $y = 0$.

[33]

Conic[x^2 – 2 x y + y^2 + 10 x + 2 y + 7]

1. The Original Conic

$7 + 10x + x^2 + 2y - 2xy + y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$

The Conic is a Parabola.

Eigenvalues of A :

$\{0, 2\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{1, 1\}, \{-1, 1\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 135. degrees :

$\{x \to -\frac{x+y}{\sqrt{2}}, y \to \frac{x-y}{\sqrt{2}}\}$

Equation of the rotated conic :

$7 + 2x^2 - 2\sqrt{2}(2x + 3y) = 0$

3. Translating the Conic : the canonical form

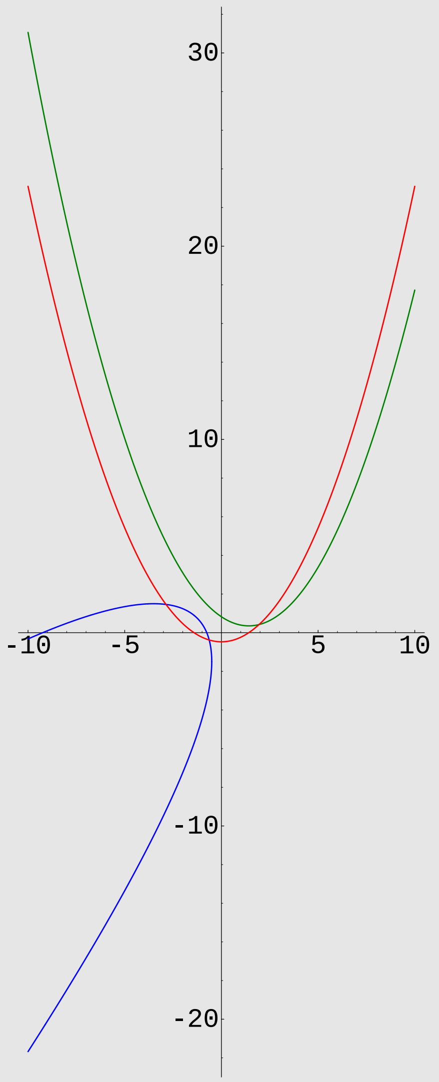
We apply the translation of 1.63724 units

$\{x \to \sqrt{2} + x, y \to \frac{7}{6\sqrt{2}} + y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$2\left(-2 + x^2 - 3\sqrt{2}\,y\right) = 0$

4. Grafico delle Coniche
1. Original Conic
2. Rotated Conic 3. The Canonical Form



$Y^2 = -3\sqrt{2}X$, vertice: $V = \left(\dfrac{-5-6\sqrt{2}}{12}, \dfrac{-5+6\sqrt{2}}{12}\right)$, asse: $x - y + \sqrt{2} = 0$.

[34] $\dfrac{X^2}{2} + \dfrac{Y^2}{\frac{3}{2}} = 1$;

vertici: $A_1 = \left(\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$, $A_2 = \left(\dfrac{-5-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-5+\sqrt{2}}{2}\right)$,

$$B_1 = \left(\frac{-3-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \right), B_2 = \left(\frac{-3+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \right).$$

[35]

```
A = {{1, h}, {h, 4}}; B = {{1, h, 4}, {h, 4, -3}, {4, -3, 0}};

Solve[Det[B] == 0]
```

$\left\{\left\{h \to -\frac{73}{24}\right\}\right\}$

```
e = Eigenvalues[A]
```

$\left\{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{9+4h^2}\right), \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{9+4h^2}\right)\right\}$

```
Solve[e[[1]] == 0]
{{h -> -2}, {h -> 2}}

Solve[e[[2]] == 0]
{}

Conic[x^2 + 4 y^2 + 8 x - 6 y]

 1. The Original Conic
```

$8x + x^2 - 6y + 4y^2 = 0$

Symmetric matrix A out of degree 2 coefficients :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 4$

The Conic is an Ellipse.

Eigenvalues of A :

$\{1, 4\}$

Eigenvectors of A :

$\{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}$

2. Rotating the Conic

We apply the rotation of 90. degrees :

$\{x \to -y, y \to x\}$

Equation of the rotated conic :

$-6x + 4x^2 + (-8 + y)\, y = 0$

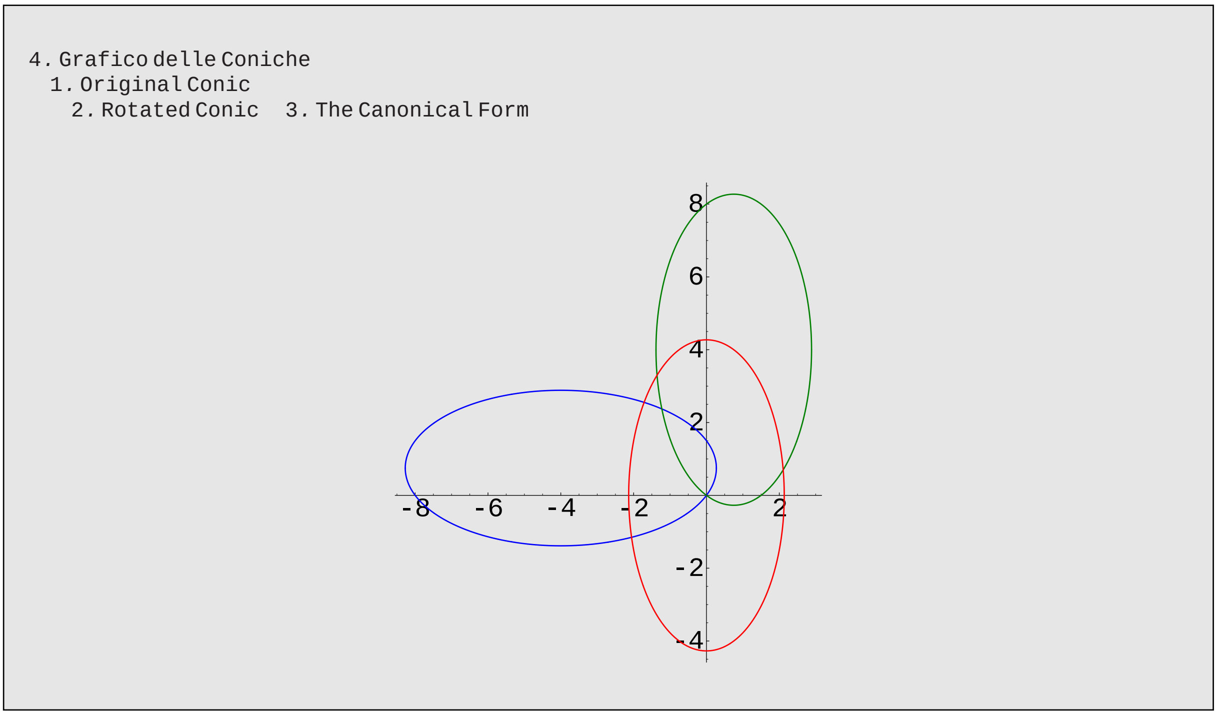
3. Translating the Conic : the canonical form

We apply the translation of 4.06971 units

$\{x \to \frac{3}{4} + x, y \to 4 + y\}$

Canonical form (after rotating and translating) :

$-\frac{73}{4} + 4x^2 + y^2 = 0$



Se $h = -\frac{73}{24}$ la conica è degenere; altrimenti è non degenere.

Se $-2 < h < 2$ la conica è un'ellisse, se $h < -2$ e $h > 2$ la conica è un'iperbole, se $h = \pm 2$ la conica è una parabola.

Se $h = 0$: $\dfrac{X^2}{\frac{73}{4}} + \dfrac{Y^2}{\frac{73}{16}} = 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

[36] i) $h = \pm 4$.

ii) Se $h = 4$, allora $C : 10Y^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}X = 0$;

se $h = -4$, allora $C : 10Y^2 - 2\sqrt{5}X = 0$.

[37] $17x^2 + 17y^2 - 30xy - 128 = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y. \end{cases}$$

[38] i) $\lambda = \pm 2\sqrt{6}$.
ii) $\lambda = 0, (\sqrt{3}x + \sqrt{2}iy)(\sqrt{3}x - \sqrt{2}iy) = 0$.