

Corso di Laurea in Fisica

Tutorato di Analisi 1
A.A. 2012-2013

Numeri complessi

Esercizio 1.

Eseguire le seguenti operazioni di numeri complessi:

1.a) $\left(3 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{2}{3} - 3i\right);$

1.b) $(1 + i)(1 - 2i);$

1.c) $(2 + i)(2 - i);$

1.d) $\frac{5-i}{2+i};$

1.e) $\frac{i}{1-i};$

1.f) $\frac{4-i}{i}.$

Esercizio 2.

Rappresentare nel piano di Gauss i seguenti numeri complessi e il loro complesso coniugato:

2.a) $3 - 2i$; 2.b) $\frac{-1}{2} + \frac{2}{3}i$; 2.c) $-1 - 3i$.

Esercizio 3.

Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

3.a) $\sqrt{3} + i$; 3.b) $-1 + \sqrt{3}i$; 3.c) $2 - 2i$.

Esercizio 4.

Scrivere in forma algebrica i numeri complessi che hanno come modulo e argomento principale le coppie di valori indicati:

4.a) $\rho = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$; 4.b) $\rho = 4, \theta = \frac{\pi}{3}$; 4.c) $\rho = \sqrt{2}, \theta = -\frac{\pi}{4}$.

Esercizio 5.

Calcolare il rapporto e il prodotto dei seguenti numeri complessi:

5.a) $z_1 = 2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right), z_2 = 3\left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi\right);$

5.b) $z_1 = 3\left(\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi\right), z_2 = 5\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right).$

Esercizio 6.

Calcolare $\mathbf{u} + \frac{1}{\mathbf{u}}$ con $\mathbf{u} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

Esercizio 7.

Determinare il numero complesso $\mathbf{u}$ immaginario puro che verifica la seguente uguaglianza: $|\mathbf{u} - i\sqrt{2}| = |\mathbf{u} + \sqrt{6}|$.

Esercizio 8.

Calcolare le seguenti potenze:

8.a) $(-2 + 2i)^4$;

8.b) $(1 - i)^6$;

8.c) $\left(\frac{1}{i}\right)^4$;

8.d) $(\sqrt{3} + i)^6$;

8.e) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.

Esercizio 9.

Determinare le radici quadrate di:

9.a) $z = -1$, 9.b) $z = -i$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Esercizio 10.

Determinare le radici cubiche di:

10.a) $z = -1$, 10.b) $z = -8$, 10.c) $z = -i$, 10.d) $z = \frac{(1-i)^5}{(1+i)}$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Esercizio 11.

Determinare le radici quarte di $z = (-3 + 3i)$ e rappresentarle nel piano di Gauss.

Esercizio 12.

Dato il numero complesso $\mathbf{z} = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{i}$ determinare $\mathbf{z}^2$, $\mathbf{z}^4$ e dedurre $\mathbf{z}^{18}$.

Esercizio 13.

Risolvere le seguenti equazioni algebriche:

13.a) $(2 + i)z - 4 + 3i = 0$;

13.b) $z^2 + 4 = 0$;

13.c) $z^2 - 6z + 5 - 4i = 0$;

13.d) $iz^2 - 2z + 3i = 0$.

Risultati esercizi sui numeri complessi

1.a) $\frac{11}{3} - \frac{5}{2}i$

1.b) $3 - i$

1.c) 5

1.d) $\frac{11}{5} - \frac{7}{5}i$

1.e) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

1.f) $-1 - 4i$

3.a) $2e^{\frac{\pi}{6}i}$

3.b) $2e^{\frac{2}{3}\pi i}$

3.c) $2\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$

4.a) i

4.b) $2 + 2\sqrt{3}i$

4.c) $1 - i$

5.a) rapp. = $\frac{2}{3}e^{\frac{\pi}{12}i}$; prod. = $6e^{\frac{7}{12}\pi i}$

5.b) rapp. = $\frac{3}{5}e^{\frac{5}{8}\pi i}$; prod. = $15e^{\frac{9}{8}\pi i}$

6) $\frac{3}{4}(1 - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$

7) $-\sqrt{2}i$

8.a) -64

8.b) $8i$

8.c) 1

8.d) -64

8.e) -1

9.a) $i, -i$

9.b) $\pm(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

10.a) $e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{5}{3}\pi i}$

10.b) $2e^{\frac{\pi}{3}i}, 2e^{\pi i}, 2e^{\frac{5}{3}\pi i}$

10.c) $e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{7}{6}\pi i}, e^{\frac{11}{6}\pi i}$

10.d) $\sqrt[3]{4}e^{\frac{\pi}{6}i}, \sqrt[3]{4}e^{\frac{5}{6}\pi i}, \sqrt[3]{4}e^{\frac{3}{2}\pi i}$

11) $\sqrt[8]{18}e^{\frac{3}{16}\pi i}, \sqrt[8]{18}e^{\frac{11}{16}\pi i}, \sqrt[8]{18}e^{\frac{19}{16}\pi i}, \sqrt[8]{18}e^{\frac{27}{16}\pi i}$

12) $z^2 = -\frac{1}{2}i, z^4 = -\frac{1}{4}i, z^8 = -\frac{1}{512}i$

13.a) $1 - 2i$

13.b) $\pm 2i$

13.c) $3 + 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{8}i}, 3 + 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{9}{8}\pi i}$

13.d) $i, -3i$