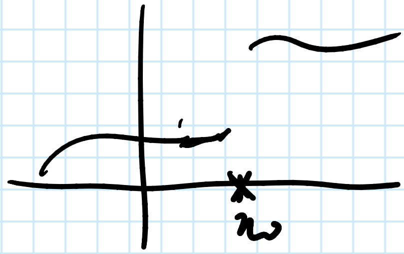
Lezione 11 Definizione di derivata

lunedì 15 ottobre 2018 09:05

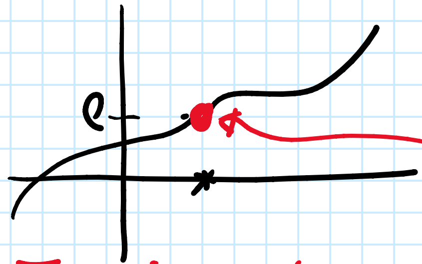
Prolungamento per continuità

$f: I(x_0)\setminus\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$



Richiediamo che

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}}$$



diciamo **Prolungamento per continuità di f**

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I(x_0)\setminus\{x_0\} \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

ovviamente $\tilde f$ definita e CONTINUA su $I(x_0)$

<u>Esempi</u>

1) $f(x) = x^x$ $\quad f$ definita su $(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\lg x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\lg x = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t}\lg\frac{1}{t} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{\lg t}{t} = 0$$

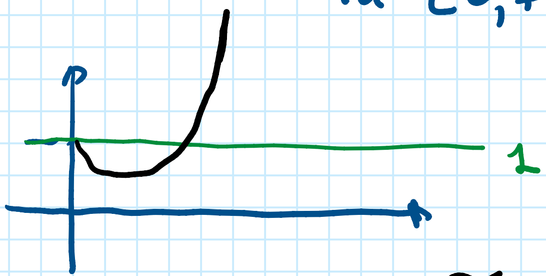
$t = 1/x \quad x = 1/t$

$\ldots = 1/x \quad x = 1/t$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ Estendiamo per continuità $f(x)=x^x$ in $x=0$

$$\tilde f(x) = \begin{cases} x^x & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

definita e continua in $[0,+\infty)$



generalmente si identifica f con $\tilde f$

Si vuole dire $f(x)=x^x$ assume valore 1 in $x=0$

si dice che per estensione per continuità

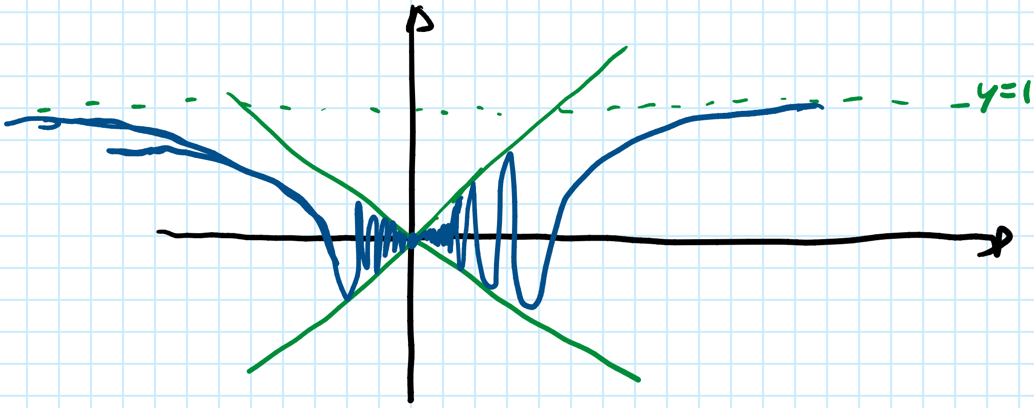
$0^0 = 1$

2) $f(x) = x \sin 1/x \qquad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0}\, \underbrace{\sin 1/x}_{\text{limitato}} = 0$$

estendiamo f per continuità

$$\tilde f(x) = \begin{cases} x\sin 1/x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



osservare

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin 1/x = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

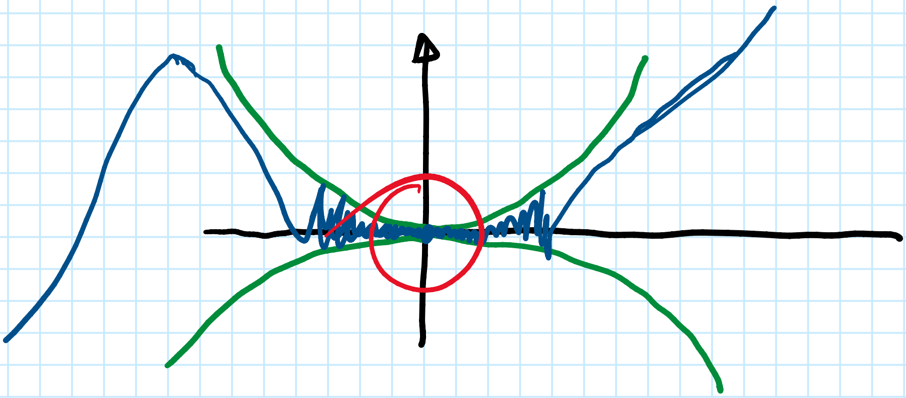
$1/x = t \qquad t \to 0$
$\qquad\qquad x \to +\infty$

3) $f(x) = x^2 \sin 1/x \qquad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim_{x\to 0} x^2 \sin 1/x = 0$ estendiamo per continuità

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

continua su $\mathbb{R}$



DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI

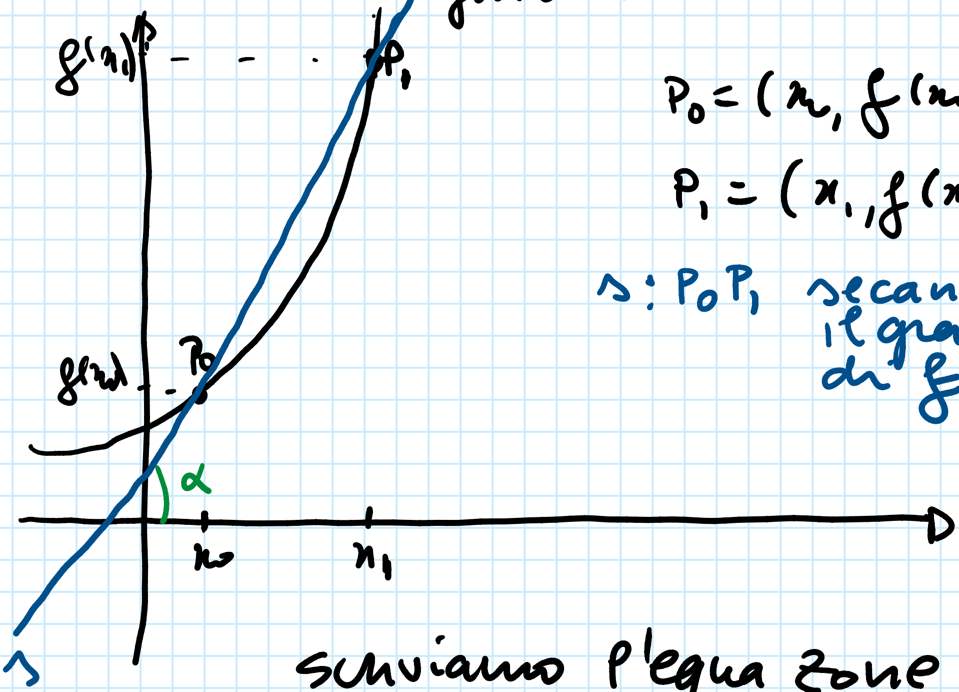
$f: I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad I$ intervallo

Fissiamo $x_0 \in I$

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ I intervallo

fissiamo $x_0 \in I$

consideriamo $x_1 \in I$ generico



$P_0 = (x_0, f(x_0))$

$P_1 = (x_1, f(x_1))$

$s: P_0P_1$ secante il grafico di f

scriviamo l'equazione di $s: P_0P_1$

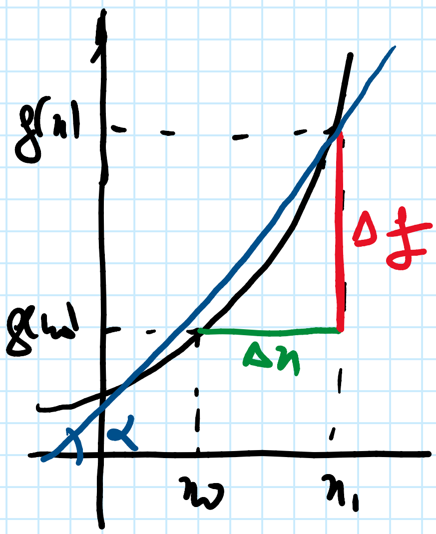
$$y = f(x_0) + \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}(x - x_0)$$

$$\left(y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \right)$$

$\operatorname{tg}\alpha$

coeff angolare pendenza di s

indica l'inclinazione o pendenza della retta s



Lo si indica spesso

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

incremento da x_0 a x_1

l'incremento da $f(x_0)$ a $f(x_1)$

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$

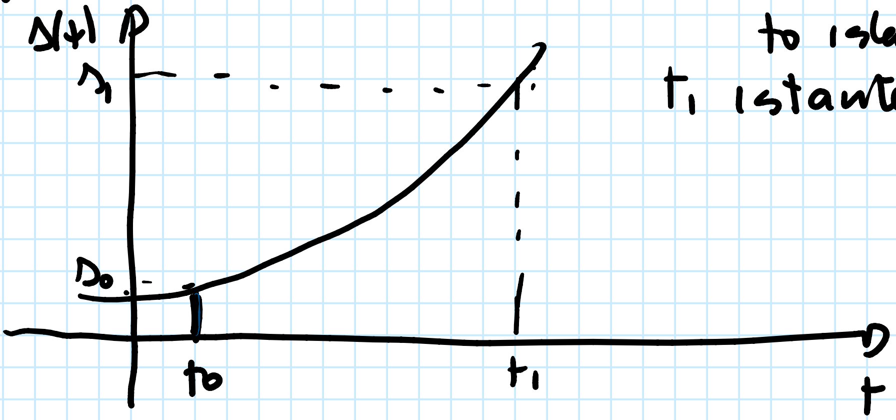
lo chiamiamo rapporto incrementale

$\frac{\dots}{\Delta x}$ ... lo chiamiamo **rapporto incrementale** di f centrato in x_0 e calcolato in x_1

rappresenta la pendenza della secante P_0P_1

Punto di vista cinematico

legge oraria del moto rettilineo $s = s(t)$



t_0 istante iniziale

t_1 istante finale

Velocità media in $[t_0, t_1]$

$$V_M = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

è il rapporto incrementale di $s(t)$ centrato in t_0 e calcolato in t_1

Obiettivo: Definire e calcolare la velocità istantanea all'istante t_0

Procedura

Fissiamo t_0 e lasciamo $t_1 = t$ libero di muoversi

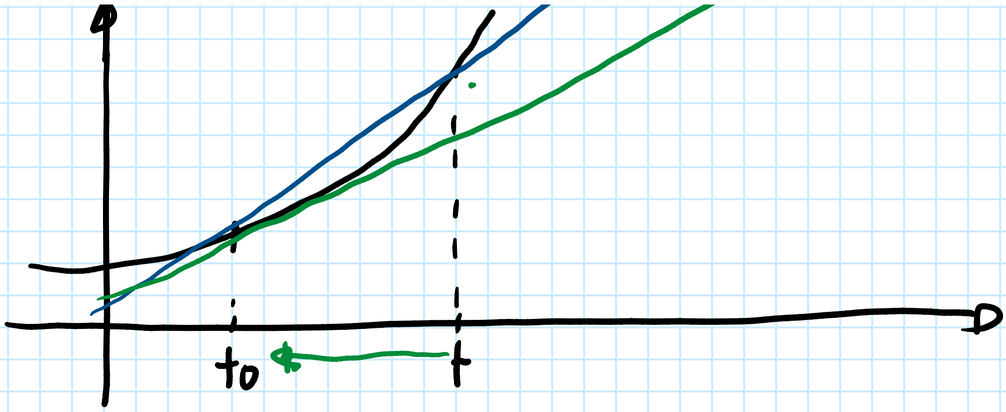
Valutiamo

$$\lim_{t \to t_0} V_M(t)$$

$$\frac{s(t) - s_0}{t - t_0}$$

se tale limite esiste viene detto velocità istantanea in t_0

$$V_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s_0)}{t - t_0}$$



Descriviamo rigorosamente in termini generali ciò che abbiamo visto in cinematica

Definizione sia $f: I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$

Consideriamo il RAPPORTO INCREMENTALE centrato in x_0

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \forall x \in I$$

diciamo che f è derivabile in x_0 se $\exists\, L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

L viene detto DERIVATA PRIMA di f calcolata in x_0.

Si scrive:

$$L = f'(x_0)$$

Si indica anche

$$\underbrace{L = \dot{f}(x_0)}_{\text{notazione cinematica di Newton}} \; ; \; \underbrace{L = \frac{df}{dx}(x_0)}_{\text{notazione di Leibnitz}} \; ; \; L = Df(x_0)$$

cinematica di Newton

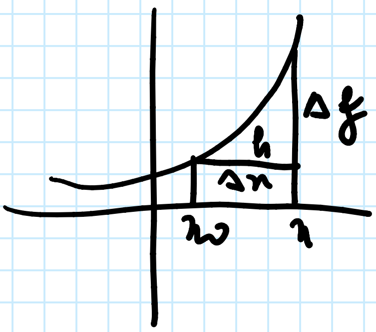
di Leibnitz

Osserviamo che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\Delta x = x - x_0$ $\qquad$ $x = x_0 + \Delta x$

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ $\qquad$ $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$



spesso si indica

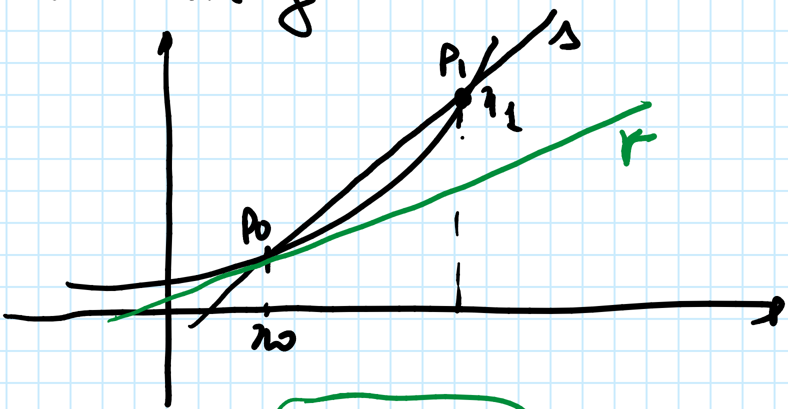
$\Delta x = h$

si scriverà allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tangente al grafico

assumiamo che f sia derivabile in x_0



$$s: \quad y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\xrightarrow{x_1 \to x_0} f'(x_0)} (x - x_0)$$

secante in $P_0 P_1$

allora

$s \longrightarrow r$

$$r: \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

r è della retta tangente al grafico

r è detta retta tangente al grafico
nel punto $P_0 := (x_0, f(x_0))$
(oppure tangente a f in x_0)

Relazione fra Derivabilità e Continuità

Proprietà $f : I \to \mathbb{R}$
$x_0 \in I$

f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

dim Ricordiamo f continua in x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0}$

dimostriamo che questa affermazione è verificata

sappiamo che f è derivabile in x_0 ossia:
$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

consideriamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}}_{\xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} = 0$$

abbiamo allora verificato
$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ ossia f continua in x_0 $\square$

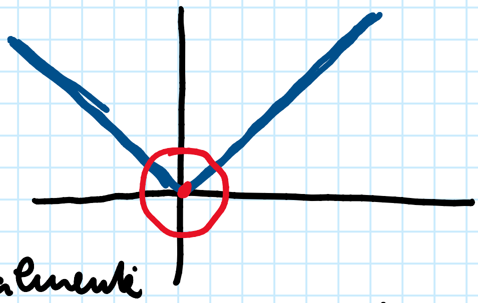
Non è vero il viceversa

f continua in x_0 $\cancel{\Longrightarrow}$ f derivabile in x_0

Controesempio

$$f(x)=|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \qquad \left(=\sqrt{x^2}\right)$$

Valutata in $x_0=0$



$x_0=0$ è detto punto angoloso

si verifica banalmente

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$$

dunque $f(x)=|x|$ è continua in $x_0=0$

Verifichiamo derivabilità

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$x>0$, $x\to 0^+$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$x\to 0^-$, $x<0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

Concludiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \nexists \Rightarrow$$

$f(x)=|x|$ NON È DERIVABILE IN $x_0=0$

Terminologia

Diciamo che f è derivabile da destra (sinistra) in x_0 se

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{f'_+(x_0)}_{\text{derivata dx in } x_0} = \left(\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

$$\left(\exists \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) = \left(\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\right)$$

derivata

$\left(\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) = \left(\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) \right)$

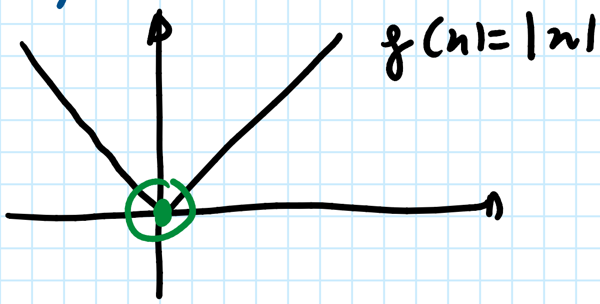
derivata sx in x_0

Esempio

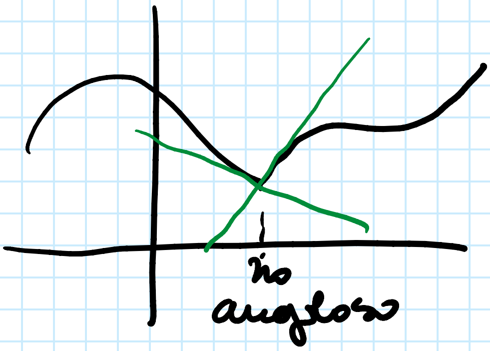
$f(x) = |x| \quad x_0 = 0 \quad f'_+(0) = 1 \quad f'_-(0) = -1$

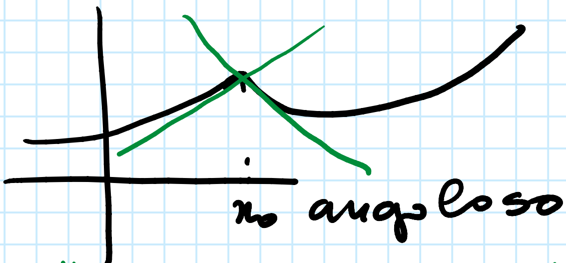
non esiste $f'(0)$

in generale diciamo che
x_0 è un PUNTO ANGOLOSO per f
se f non è derivabile in x_0
ma ammette $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$
con $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$



in generale





le tangenti in x_0 al grafico "arrivando da destra e sinistra" sono diverse e formano un angolo

Funzione derivata

$f: I \to \mathbb{R}$ generico $x \in \mathbb{R}$
sappiamo che f è derivabile in x se

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste

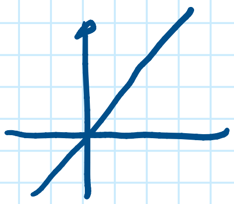
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{esiste finito}$$

Assumendo f derivabile per $\forall x \in I$

Diciamo (funzione) derivata (prima) di f:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esempio $f(x) = x$

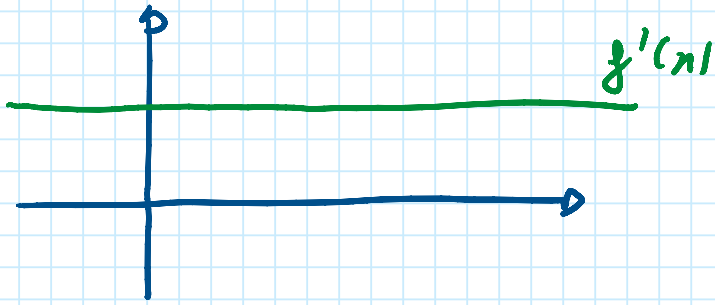


f è derivabile su $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = 1$$

$f(x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1$



Esempio 2

$f(x) = |x| \quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

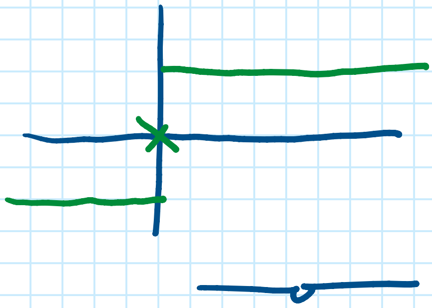
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

f derivabile per $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Allora per $x \neq 0$

$$\underset{x\neq 0}{f'(x)} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f'(x) = \mathrm{sgn}(x)$

Assumiamo f derivabile su I

consideriamo $f'(x)$.

se $f'(x)$ è derivabile su I definiamo

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

derivata seconda di x su I

⋮

assumiamo f derivabile n volte su I

Consideriamo la derivata n esima di f

$f^{(n)}(x)$

se $f^{(n)}(x)$ è ancora derivabile su I

diciamo derivata $n+1$ esima

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h}$$

Notazione: f derivabile n volte in I

indichiamo derivata n esima

$f^{(n)}(x)$, $D^n f(x)$, $\frac{d^n f}{\underbrace{dx^n}}$

estensione notazione di Leibnitz

per i primi valori di n

$n=1$ $f'(x)$; $\dot{f}(x)$; $\frac{df}{dx}$; $Df(x)$

$n=2$ $f''(x)$; $\ddot{f}(x)$; $d^2 f$; $D^2(x)$

$n=2$ $f''(x)$; $\ddot{f}(x)$; $\frac{d^2 f}{dx^2}$; $D^2(x)$

$n=3$ $f'''(x)$; ; $\frac{d^3 f}{dx^3}$; $D^3(x)$

$n=4$ $f^{IV}(x)$; $\frac{d^4 f}{dx^4}$; $D^4(x)$;

si assume $f^{(0)}(x) = f(x)$

—o—

Osserviamo

$$\mathrm{dom}\, f^{(n)} \subset \mathrm{dom}\, f^{(n-1)}$$

—o—

indichiamo $C^1(I)$ = funzioni derivabili su I con derivata f' continua su I

$C^n(I)$ = funzioni con derivate n esima continua

$C^\infty(I)$ = funzioni derivabili infinite volte

—o—

Derivate funzioni elementari

	$f(x)$	$Df(x)$
1)		
2)	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
3)	$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = n\, x^{n-1}$
4) $\alpha \in \mathbb{R}$	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$
5)	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
6)	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

6) $f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
7) $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x \quad a > 0$	$f'(x) = a^x \lg a$
8) $f(x) = \lg x \quad x > 0$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = \log_a x \quad x > 0,\ a \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\lg a}$

Dimostreremo 4) 5) 7)