

Prova scritta di MECCANICA QUANTISTICA II

11 Aprile 2003

Esercizio 1.

All'istante iniziale $t_0 = 0$ un oscillatore armonico unidimensionale si trovi nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} (i\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle)$$

dove abbiamo usato le definizioni

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle, a|0\rangle = 0, a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right).$$

Calcolare dapprima a $t = 0$ e poi per ogni $t > 0$

1. il valore medio dell'energia;
2. il valore medio del momento;
3. il valore medio dell'operatore parit .

Esercizio 2.

Si consideri il moto angolare nel piano xy descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = H_0 + H_1,$$

dove

$$H_0 = \frac{L_z^2}{2I}$$

e

$$H_1 = a \cos 2\varphi$$

rappresenta una perturbazione.

Si calcolino al pi  basso ordine perturbativo non banale le correzioni

1. allo stato fondamentale,
2. al primo stato eccitato.

Esercizio 3.

La dinamica dei due elettroni di un atomo di Elio immerso in un campo magnetico B sia descritta dall'Hamiltoniana seguente:

$$H = H_1 + H_2 + H_B;$$

H_1 e H_2 sono le solite Hamiltoniane per un elettrone in potenziale coulombiano e

$$H_B = \mu B \frac{S_z}{\hbar},$$

dove S_z è la terza componente dello spin totale $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ dei due elettroni.¹

1. Nel caso $B = 0$:
 - 1a) quanto vale lo spin totale s nello stato fondamentale?
 - 1b) quanto vale l'energia minima qualora i due elettroni si trovino in uno stato di tripletto di spin?
2. Per $B > 0$, scrivere gli autovettori di H_B nello spazio di spin e i corrispondenti autovalori.
3. Usando i risultati dei punti 1) e 2), scrivere lo stato, o gli stati, di energia minima E_{min} del sistema descritto dall'Hamiltoniana H e verificare che E_{min} non dipende da B se e solo se $|B|$ è minore di un opportuno B_0 .

NOTA. Si usi la notazione standard $|n, l, m\rangle$ per la parte orbitale degli autostati delle hamiltoniane H_1 e H_2 e $E_n = \frac{1}{n^2} E_1$ per le corrispondenti energie, dove E_1 è l'energia dello stato fondamentale di un elettrone in un atomo idrogenoide.

¹Si sono trascurate sia l'interazione fra i due elettroni che quella del campo magnetico con il momento angolare orbitale.